LICENCE 3 - MATHÉMATIQUES
ANALYSE 5 - 2018

Fiche d'exercices

(A. El Kacimi)

Exercice 1

Soient X et Y deux ensembles (non vides) et $f : X \longrightarrow Y$ une application.

1 - Soit A une partie de X. Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$ et qu'il y a égalité si f est injective.

2 - Soit B une partie de Y. Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subset B$ et qu'il y a égalité si f est surjective.

3 - Soient $\{A_i\}_{i\in I}$ une famille de parties de X et $\{B_j\}_{j\in J}$ une famille de parties de Y. Démontrer les formules suiventes :

$$f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i), \quad f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j) \quad \text{et} \quad f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j).$$

Exercice 2

Soient X un ensemble non vide et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de X. Démontrer les formules suivantes, dites *formules de Morgan* :

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c \quad \text{et} \quad \left(\bigcap_{i\in I} A_n\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$$

où, pour chaque partie A de X, A^c désigne son complémentaire.

Exercice 3

Sur $X = \mathbb{R}$, on considère la famille $\mathcal{S}$ constituée des parties U de la forme $]-\infty, x[$ avec $x \in \mathbb{R}$ auxquelles ont adjoint $\emptyset$ et X.

1 - Montrer que $\mathcal{S}$ est une topologie sur X.

2 - L'espace topologique $(X, \mathcal{S})$ est-il séparé ?

Exercice 4

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $a \neq 0$. On note $U_{ab} = a\mathbb{Z} + b$ la partie de $\mathbb{Z}$ constituée des éléments de la forme $an + b$ avec $n \in \mathbb{Z}$; par exemple $3\mathbb{Z} + 1$ est l'ensemble $\{\cdots, -11, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, 13, \cdots\}$. Lorsque $b = 0$, U_{ab} sera noté simplement U_a.

On considère la famille $\mathcal{T}$ des parties U de $\mathbb{Z}$ définies par la condition suivante :

$$U \in \mathcal{T} \Longleftrightarrow U = \emptyset \text{ ou } U \text{ est une réunion de parties de la forme } U_{ab}.$$

1 - Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie sur $\mathbb{Z}$. On l'appelle *topologie de la congruence* sur $\mathbb{Z}$. (Remarquer qu'une partie finie non vide de $\mathbb{Z}$ n'est pas ouverte pour $\mathcal{T}$.)

2 - Montrer que, pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $a \neq 0$, l'ouvert U_{ab} est aussi fermé.

On note $\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \cdots\}$ l'ensemble des nombres premiers.

3 - Montrer que $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} = \displaystyle\bigcup_{p\in\mathcal{P}} U_p$.

4 - En déduire que l'ensemble $\mathcal{P}$ est infini.

Exercice 5

Soit X un ensemble non vide. Pour $x, y \in X$, on pose $\delta(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$

1 - Montrer que δ est une distance (métrique) sur X.

2 - Soient $x \in X$ et $r \geq 0$. Décrire explicitement la boule ouverte $B(x,r)$.

3 - Montrer que tout singleton $\{x\}$ est une partie ouverte et en déduire qu'il en est de même pour toute partie de X.

δ est appelée *métrique discrète* de X et la topologie associée *topologie discrète.*

Exercice 6

Soit E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. Pour $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $y = (y_1, \cdots, y_n)$, on pose :

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \quad \text{et} \quad d_\infty(x,y) = \sup_{i=1,\cdots,n} \{|x_i - y_i|\}.$$

1 - Montrer que d_1 et d_∞ sont des distances sur $\mathbb{R}^n$.

2 - Dessiner la boule unité centrée en 0 pour chacune de ces distances pour $n = 2$ et $n = 3$.

3 - On pose $\Delta = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 < 1\}$. Montrer que Δ est un ouvert de $(\mathbb{R}^2, d_1)$.

Exercice 7

Soient (E, d) un espace métrique et $A \subset E$. Pour tout $x \in E$, on pose : $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$. Ce nombre est la distance du point x à la partie A.

Montrer que $d(x, A) = 0$ si, et seulement si, $x \in \overline{A}$.

Exercice 8

On prend $X = \mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle *i.e.* celle définie par la distance $d(x,y) = |x - y|$.

1 - Soit $A =]0, 1[$. Quelle est l'adhérence $\overline{A}$ de A ? Quel est son intérieur $\mathring{A}$?

2 - Même question pour $B = \{0\} \cup]1, 2]$. Cet ensemble a-t-il des points isolés ? (Expliquer.)

3 - Montrer que tous les points de $\mathbb{Z} \subset X$ sont isolés.

4 - Quel est l'intérieur $\mathring{\mathbb{Q}}$ de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels ? De son complémentaire $\mathbb{Q}^c$?

5 - Quelle est la frontière $Fr(C)$ de $C =]0, 1[\cup \{2, 3\}$? De $C = \mathbb{Q}$?

6 - Soit D une partie de X. Montrer que $\left(\mathring{D}\right)^c = \overline{D^c}$, $Fr(D) = \overline{D} \setminus \mathring{D}$. Montrer que $\mathring{D} = \emptyset$ si, et seulement si, $\overline{D^c} = X$.

Exercice 9

Soit X un ensemble ayant deux éléments notés a et b. On le munit de la métrique discrète *i.e.* la métrique δ définie par $\delta(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$

1 - Montrer que l'espace métrique (X, δ) n'est pas connexe.

Soit (E, d) un autre espace métrique.

2 - On suppose E connexe. Montrer que toute application continue $f : E \longrightarrow X$ est constante.

3 - Montrer que si toute application continue $E \xrightarrow{f} X$ est constante, E est connexe.

4 - Soient (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques et $\phi : E_1 \longrightarrow E_2$ une application continue surjective. On suppose E_1 connexe. En utilisant les questions 2 et 3 montrer que E_2 est connexe.

Exercice 10

On définit l'application $\delta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ par $\delta(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$.

Montrer que l'espace métrique $(\mathbb{R}, \delta)$ est complet.

Exercice 11

Soit $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ un ensemble dénombrable ($x_n = x_p$ si, et seulement si, $n = p$). Pour tous $x_p, x_q \in X$, on pose :

$$d(x_p, x_q) = \begin{cases} 0 & \text{si } p = q \\ 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} & \text{sinon.} \end{cases}$$

1 - Montrer que d est une distance sur X.

2 - Montrer que l'espace métrique (X, d) est complet.

Soit $f : X \longrightarrow X$ l'application définie par $f(x_n) = x_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3 - Montrer que f vérifie $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ pour tous $x, y \in X$ avec $x \neq y$.

4 - Montrer que f n'a pas de point fixe.

5 - La réponse à la question 4 contredit-elle le *théorème du point fixe* pour une application contractante dans un espace métrique complet ?

Exercice 12

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de sa norme euclidienne usuelle $||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ et de la distance d associée. On pose $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + 1\}$.

1 - Montrer que F est une partie fermée de l'espace métrique $(\mathbb{R}^3, d)$.

2 - Montrer que F est connexe par arcs.

Exercice 13

On rappelle que $X = [0, 1]$ muni de sa métrique usuelle $d(x, y) = |x - y|$ est un espace métrique connexe. Soit $\phi : X \longrightarrow X$ une application continue.

Montrer que ϕ admet un point fixe *i.e.* il existe $a \in X$ tel que $\phi(a) = a$. (**Indication** : *Introduire la fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - \phi(x)$ et utiliser le fait que X est connexe.*)

Exercice 14

Soient (E, d) un espace métrique et A et B deux parties de E. Par définition la *distance* de A à B est le nombre positif ou nul $d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$. Soient C et K deux parties de E ; on suppose C fermée, K compacte et $C \cap K = \emptyset$.

1 - Montrer que $d(C, K) > 0$. (**Indication** : *Si $d(C, K) = 0$, il existe une suite $(x_n, y_n) \in K \times C$ telle que $\lim d(x_n, y_n) = 0$. Utiliser alors le fait que K est compacte pour extraire de $(x_n)_n$ une suite $(x_{n_k})_k$ convergeant vers un $x \in K$.*)

2 - Montrer, en donnant un exemple, qu'en général le même résultat ne reste plus vrai si les parties K et C sont fermées mais toutes les deux non compactes.

Exercice 15

On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et $(e_1, \cdots, e_n)$ sa base canonique. On le munit des trois normes :

$$N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad N_2(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \qquad \text{et} \qquad N_\infty(x) = \sup_{i=1,\cdots,n} |x_i|.$$

1 - Montrer qu'il existe des constantes réelles strictement positives κ_1, κ'_1, κ_2 et κ'_2 telles que, pour tout $x \in E$, on ait :

$$\kappa_1 N_1(x) \leq N_\infty(x) \leq \kappa'_1 N_1(x) \qquad \text{et} \qquad \kappa_2 N_2(x) \leq N_\infty(x) \leq \kappa'_2 N_2(x).$$

2 - En déduire que les trois normes N_1, N_2 et N_∞ sont équivalentes.

On note $\mathcal{S}_1$ la sphère unité de l'espace normé (E, N_1) *i.e.* l'ensemble des vecteurs $x \in E$ tels que $N_1(x) = 1$. On rappelle que $\mathcal{S}_1$ est un fermé borné de (E, N_1) et donc une partie compacte de (E, N_1). Soit N une norme quelconque sur E.

3 - Montrer que l'application identité $j : (E, N_1) \longrightarrow (E, N)$ est continue. En déduire que $\mathcal{S}_1$ est une partie compacte de l'espace normé (E, N).

4 - Montrer que l'application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est continue. En déduire qu'il existe $m, M \in \mathbb{R}_+^*$ tels que : $\inf_{x \in \mathcal{S}_1} N(x) = m$ et $\sup_{x \in \mathcal{S}_1} N(x) = M$.

5 - En utilisant tout ce qui précède, montrer que N est équivalente à N_1.

Conclusion : toutes les normes sur E sont équivalentes.

Exercice 16

On note E l'espace vectoriel réel des fonctions continues $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$. On le munit de la norme de la convergence uniforme $||f|| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$ et de la distance associée d définie par $d(f,g) = ||f - g||$. On rappelle que l'espace normé $(E, || \ ||)$ est de Banach *i.e.* l'espace métrique sous-jacent (E, d) est complet. Pour toute fonction $f \in E$ et tout $x \in [0,1]$, on pose :

$$T(f)(x) = e^{-(x+2)} \int_0^x f(t)dt + x.$$

1 - Montrer que $T(f)$ est un élément de E et qu'on a ainsi une application bien définie $T : f \in E \longmapsto T(f) \in E$.

2 - Montrer que T est une application contractante *i.e.* il existe $\lambda \in]0,1[$ tel qu'on ait l'inégalité $||T(f) - T(g)|| \leq \lambda ||f - g||$ pour toutes fonctions $f, g \in E$.

3 - Montrer qu'il existe un unique élément $f \in E$ qui vérifie l'équation :

$$e^{-(x+2)} \int_0^x f(t)dt + x - f(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in [0,1].$$

Exercice 17

Un *homéomorphisme* entre deux espaces métriques X et Y est une bijection $\psi : X \longrightarrow Y$ telle que ψ et ψ^{-1} soient continues.

Tout intervalle de $\mathbb{R}$ que l'on considérera dans cet exercice sera muni de sa métrique usuelle $d(x,y) = |x - y|$. Soit J un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Montrer qu'il existe un homéomorphisme $]0,1[\xrightarrow{\phi} J$ en en donnant un explicitement dans chacun des cas : $J =]-\infty, \varepsilon[$, $J =]\eta, +\infty[$ avec $\varepsilon, \eta \in \mathbb{R}$ et $J =]a,b[$ où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.

Exercice 18

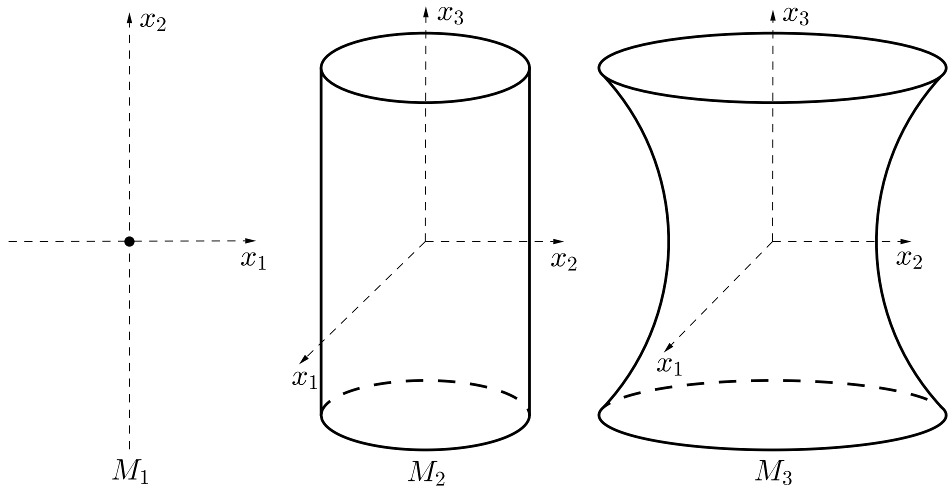
On munit $\mathbb{R}^n$ de sa norme euclidiennes usuelle $||x|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. On considère les ensembles suivants :

$$M_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2) \neq (0,0)\}$$

$$M_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$
$$M_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1\}$$
et les applications $\Psi_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $\Psi_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définies par :

$$\Psi_1(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \frac{1}{2} \ln\left(x_1^2 + x_2^2\right) \right)$$

$$\Psi_2(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1\sqrt{1 + x_3^2}, x_2\sqrt{1 + x_3^2}, x_3 \right).$$



1 - Montrer que M_1 est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et que M_2 et M_3 sont des fermés de $\mathbb{R}^3$.

2 - Montrer que Ψ_1 envoie bijectivement M_1 sur M_2 et Ψ_2 envoie bijectivement M_2 sur M_3.

3 - Calculer les applications inverses $\Psi^{-1} : M_2 \longrightarrow M_1$ et $\Psi_2^{-1} : M_3 \longrightarrow M_2$.

4 - Montrer que $\Psi_1 : M_1 \longrightarrow M_2$ et $\Psi_2 : M_2 \longrightarrow M_3$ sont des homéomorphismes.

Exercice 19

Soient (E, d) un espace métrique et $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy dans E. On suppose que $(x_n)_{n\geq 1}$ admet une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ convergeant vers $x \in E$. Montrer que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge vers x.

Exercice 20

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ muni de sa métrique usuelle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur I. On suppose que la dérivée première f' et la dérivée seconde f'' sont strictement positives sur un intervalle $[a, b] \subset I$ (avec $a < b$) et $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$.

1 - Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α dans l'intervalle $]a, b[$.

2 - En utilisant le théorème des accroissements finis montrer que pour tout $x \in [a, b]$ on a :

$$|\alpha - x| \leq \frac{|f(x)|}{f'(a)}. \tag{1}$$

Soient (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et Δ_0 la tangente à (C) au point d'abscisse $x_0 = b$. On note M_1 le point d'intersection de l'axe Ox avec Δ_0.

3 - Déterminer l'équation cartésienne de Δ_0 ainsi que l'abscisse x_1 du point M_1.

On construit une suite de réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite de droites $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :
- $x_0 = b$;
- pour $n \in \mathbb{N}$, Δ_n est la tangente à (C) au point d'abscisse x_n ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, x_n est l'abscisse du point M_n, intersection de l'axe Ox avec Δ_{n-1}.

4 - Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{2}$$

5 - Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

6 - Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On notera θ sa limite.

7 - Montrer que θ est égale à la solution $\alpha \in]a,b[$ de l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 21

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne $||(x,y)|| = \sqrt{x^2+y^2}$. Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$ son graphe. On pose :

$$U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\} \quad \text{et} \quad \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma.$$

1 - Montrer que U et Ω sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$ et que U n'est pas connexe.

2 - Montrer que la restriction à U de l'application $\phi : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (x, y+f(x)) \in \mathbb{R}^2$ induit un homéomorphisme de U sur Ω.

3 - Montrer que Ω n'est pas connexe.

4 - On note F la partie de $\mathbb{R}^2$ constituée des points (x,y) qui vérifient les conditions :

$$\begin{cases} x^2+y^2 \geq 1 \\ x - y \leq 0 \\ x + y \leq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x \geq -1. \end{cases}$$

Dessiner F. Montrer qu'elle est fermée et connexe par arcs. Quel est son intérieur $\overset{\circ}{F}$?

Exercice 22

On rappelle que le plan euclidien $\mathbb{E}$ est l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^2$ muni de la distance :

$$d_2(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}.$$

Pour $x, y \in \mathbb{E}$, on pose :

$$\delta(x,y) = \begin{cases} d_2(x,y) & \text{si } x,\ y \text{ et } 0 \text{ sont alignés} \\ d_2(x,0) + d_2(0,y) & \text{sinon.} \end{cases}$$

1 - Montrer que δ est une distance sur $\mathbb{E}$.

2 - Dessiner la boule unité centrée à l'origine. Même question pour une boule qui est centrée ailleurs qu'à l'origine et de rayon $r > 0$.

La métrique δ est connue sous le nom de métrique de la SNCF.

Exercice 23

Soit $\phi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction strictement croissante vérifiant $\phi(0) = 0$ et $\phi(x+y) \leq \phi(x)+\phi(y)$. Soit (E, d) un espace métrique. On pose $\delta(x, y) = \phi(d(x, y))$ pour tous $x, y \in E$.

1 - Montrer que δ est une métrique sur E.

2 - Appliquer ce qui précède pour montrer que $d_1 = \frac{d}{1+d}$, $d_2 = \ln(1 + d)$ et $\delta_\alpha = d^\alpha$ (avec $0 < \alpha < 1$) sont des métriques sur E.

Exercice 24

Soit (E, d) un espace métrique. Pour tous $x, y \in E$, on pose :

$$d_1(x, y) = \inf(1, d(x, y)) \quad \text{et} \quad d_2(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

Montrer que d, d_1 et d_2 sont uniformément équivalentes deux à deux.

Exercice 25 (**Complété d'un espace métrique**)

Soient (X, d) un espace métrique et $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite dans X. Sur un espace complet, on dispose donc d'un critère permettant de décider de la convergence d'une suite sans connaître a priori sa limite. Dire que (X, d) est non complet, c'est dire qu'il existe des suites de Cauchy qui n'y convergent pas. La question de savoir s'il est possible de rajouter ce qu'il faut pour qu'il le soit paraît alors toute naturelle.

Rappelons qu'une partie A de X est dite *dense* si, pour tout $x \in X$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ tel que $d(x, a) < \varepsilon$.

On appelle *complété* de (X, d) la donnée d'un triplet $(\widehat{X}, \widehat{d}, j)$ où $(\widehat{X}, \widehat{d})$ est un espace métrique complet et $j : X \longrightarrow \widehat{X}$ une application telle que :

i) $\widehat{d}(j(x), j(y)) = d(x, y)$ pour tous $x, y \in X$ (j est donc une injection isométrique de X dans $\widehat{X}$) ;

ii) l'image $j(X)$ de X par j est une partie dense de $\widehat{X}$.

Si $(\widehat{X}', \widehat{d}', j')$ est un autre complété de (X, d), il existe une isométrie $\sigma : \widehat{X} \longrightarrow \widehat{X}'$ telle que $j' = \sigma \circ j$. Le complété est donc unique à isométrie près. L'objet de l'exercice qui suit est de montrer qu'il existe toujours.

Soit (X, d) un espace métrique. On note E l'espace vectoriel des fonctions bornées $X \longrightarrow \mathbb{R}$ muni de la *norme de la convergence uniforme* :

$$||f||_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$$

et de la distance associée d_∞.

1 - Montrer que l'espace normé $(E, || \ ||_\infty)$ est complet.

2 - Soit $\mathcal{C}$ le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions continues bornées $X \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{C}$ est fermé dans E.

3 - Montrer que si d' est une autre distance uniformément équivalente à d, alors d et d' ont les mêmes suites de Cauchy.

On peut donc supposer que le diamètre $\delta(X) = \sup_{x,y\in X} d(x, y)$ est fini, quitte à remplacer d par une autre métrique qui lui est uniformément équivalente (par exemple $\inf(1, d)$ ou $\frac{d}{1+d}$).

Pour tout $a \in X$, on note f_a la fonction $f_a : X \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à $x \in X$ associe $d(x, a)$.

4 - Montrer que $f_a \in \mathcal{C}$ et que l'application $j : a \in X \longmapsto f_a \in \mathcal{C}$ est une injection isométrique.

5 - On note $\widehat{X}$ l'adhérence de $j(X)$ dans $\mathcal{C}$ et $\widehat{d}$ la restriction de d_∞ à $\widehat{X}$. Montrer que l'espace métrique ainsi obtenu $(\widehat{X}, \widehat{d})$ est un complété de (X, d).

Exercice 26

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle *semi-norme* sur E toute application $p : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

i) $p(0) = 0$;

ii) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$;

iii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ pour tous $x, y \in E$.

Soient E l'espace vectoriel complexe des fonctions continues $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ et K un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. Pour toute fonction $f \in E$, on pose :

$$p_K(f) = \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

1 - Montrer que p_K est une semi-norme sur E et qu'elle n'est pas une norme.

Soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'intervalles fermés bornés de $\mathbb{R}$ de réunion $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note p_n la semi-norme p_{K_n}. Pour $f, g \in E$, on pose :

$$\delta(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \inf(1, p_n(f - g)).$$

2 - Montrer que cette série converge et que δ est une distance sur l'espace E invariante par toute translation.

3 - La distance δ provient-elle d'une norme ? (Justifier la réponse.)

Exercice 27

Soient r un entier naturel et E l'espace des fonctions $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^r. Soit s un entier tel que $0 \leq s \leq r$. Pour toute fonction $f \in E$, on pose :

$$||f||_\infty^s = \max_{\ell = 0, \cdots, s} \left\{ \sup_{x \in [0,1]} |f^{(\ell)}(x)| \right\}.$$

1 - Montrer que $|| \ ||_\infty^s$ est une norme sur E. Fait-elle de E un espace de Banach ?

2 - On note $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues $[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme. Soient $\varphi_0, \cdots, \varphi_r \in E$. Pour $f \in E$, on pose :

$$Df(x) = \sum_{\ell=0}^{r} \varphi_\ell(x) f^{(\ell)}(x).$$

L'application linéaire $D : E \longrightarrow C^0([0, 1], \mathbb{R})$ ainsi définie est-elle continue ?

Exercice 28

Soient (E, d) un espace métrique et A une partie de E. On rappelle que la distance d'un point $x \in E$ à A est :

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

On note α la fonction $E \longmapsto \mathbb{R}$ qui à x associe $d(x, A)$. Montrer que α est lipschtzienne de rapport 1.

Exercice 29

Soit $(X_n, d_n)_{n\geq 1}$ une famille dénombrable d'espaces métriques. On suppose que pour tout n, le diamètre de X_n est ≤ 1. Sur $X = \prod_n X_n$, on définit une distance en posant, pour tous $x = (x_n)_n$ et $y = (y_n)_n$:

$$d(x, y) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n).$$

1 - Montrer que les projections $\pi_n : (x_n) \in X \longmapsto x_n \in X_n$ sont continues.

2 - Montrer que toute boule ouverte $B(x, \varepsilon)$ dans X contient une partie de la forme :

$$\prod_{i=1}^{N} B(x_i, \eta) \times \prod_{j\geq N+1} X_j$$

où $x_i = \pi_i(x)$ et $B(x_i, \eta)$ est la boule de X_i de centre x_i et de rayon η avec $\eta < \varepsilon$.

3 - Montrer que pour qu'une application f d'un espace métrique (Y, δ) dans (X, d) soit continue il faut, et il suffit que, pour tout n, l'application $Y \xrightarrow{\pi_n \circ f} X_n$ soit continue.

4 - Montrer que si, pour tout n, l'espace (X_n, d_n) est complet, il en est de même pour (X, d).

Exercice 30

Soient $(E, ||\ \ ||)$ un espace normé, B sa boule unité ouverte et $\varphi : E \longrightarrow B$ l'application définie, pour tout $x \in E$, par :

$$\varphi(x) = \frac{x}{1 + ||x||}.$$

Montrer que φ est un homéomorphisme de E sur B.

Exercice 31

On note E l'espace vectoriel des fonctions continues $[0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$. Pour $f \in E$, on pose :

$$||f||_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$$

$$||f||_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$||f||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

1 - Montrer que $||\ \ ||_1$, $||\ \ ||_2$ et $||\ \ ||_\infty$ sont des normes sur E.

2 - Montrer qu'on a :

$$||f||_1 \leq ||f||_2 \leq ||f||_\infty$$

pour toute fonction $f \in E$.

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ dans E définies par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \in [1/n, 1] \\ 1 - nx & \text{pour } x \in [0, 1/n] \end{cases}$$

3 - Calculer $||f_n||_1$, $||f_n||_2$ et $||f_n||_\infty$

4 - Montrer que deux quelconques de ces normes ne sont jamais équivalentes.

Exercice 32

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On suppose que la fonction dérivée $f' : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est bornée *i.e.* il existe une constante réelle $M > 0$ telle que $|f'(x)| \leq M$ pour tout $x \in I$.

Montrer que f est lipschitzienne de rapport $k = \sup\limits_{x \in I} |f'(x)|$.

Exercice 33

On note $\mathcal{B}$ l'espace vectoriel des fonctions bornées $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme :

$$||f|| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

et de la distance associée d définie par $d(f,g) = ||f - g||$.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(\mathcal{B}, ||\ \ ||)$.

1 - Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, la suite réelle $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Soit $f(x)$ sa limite.

2 - Montrer que la fonction $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ ainsi obtenue est bornée.

3 - Montrer que la suite (f_n) converge vers f pour la norme $||\ \ ||$.

L'espace normé $(\mathcal{B}, ||\ \ ||)$ est donc complet. Soit $\mathcal{C}$ le sous-espace de $\mathcal{B}$ dont les éléments sont les fonctions continues $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$.

4 - Montrer que $\mathcal{C}$ est fermé dans $\mathcal{B}$.

Soit $T : \phi \in \mathcal{C} \longmapsto T(\phi) \in \mathcal{C}$ l'application définie par :

$$T(\phi)(x) = \frac{1}{x+2} \int_0^x \phi(t)dt + 1.$$

5 - Montrer que T est une application contractante *i.e.* il existe un réel $k \in]0,1[$ tel que :

$$||T(\phi) - T(\psi)|| \leq k||\phi - \psi||$$

pour tous éléments $\phi, \psi \in \mathcal{C}$.

On définit une suite $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{C}$ par $\phi_0 = 1$ et $\phi_n = T(\phi_{n-1})$ pour $n \geq 1$.

6 - Calculer ϕ_1 et ϕ_2.

7 - Montrer que la suite (ϕ_n) converge dans $\mathcal{C}$ vers l'unique solution ϕ de l'équation qui suit (dite *équation fonctionnelle*) :

$$\frac{1}{x+2} \int_0^x \phi(t)dt - \phi(x) + 1 = 0 \qquad \text{pour tout } x \in [0,1].$$