Licence 3 - Mathématiques
DS en Analyse 5 - 27 octobre 2017
Aucun document n'est autorisé

Exercice 1

Pour $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $y = (y_1, \cdots, y_n)$, deux points de $E = \mathbb{R}^n$, on pose :

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \quad \text{et} \quad d_\infty(x,y) = \max_{i=1,\cdots,n} \{|x_i - y_i|\}.$$

1 - Montrer que d_1 et d_∞ sont des distances sur E.

2 - Montrer que $d_\infty(x,y) \leq d_1(x,y) \leq n d_\infty(x,y)$ pour tous $x, y \in E$. Conclusion ?

Dans les trois questions qui suivent on suppose $n = 2$.

3 - Dessiner la boule unité fermée centrée en 0 pour chacune des distances d_1 et d_∞.

4 - Montrer que toute boule ouverte $B_1(a,r)$ ($r > 0$ bien sûr) pour d_1 contient une boule ouverte $B_\infty(a,r')$ ($r' > 0$ aussi) pour d_∞ et inversement.

5 - Montrer que la topologie $\mathcal{T}_1$ associée à d_1 est la même que celle $\mathcal{T}_\infty$ associée à d_∞.

Exercice 2

On rappelle que le plan euclidien $\mathbb{E}$ est l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^2$ muni de la distance :

$$d_2(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \qquad \text{où } x = (x_1, x_2) \text{ et } y = (y_1, y_2).$$

Pour $x, y \in \mathbb{E}$, on pose :

$$\delta(x,y) = \begin{cases} d_2(x,y) & \text{si } x,\ y \text{ et } 0 \text{ sont alignés} \\ \\ d_2(x,0) + d_2(0,y) & \text{sinon.} \end{cases}$$

1 - Montrer que δ est une distance sur $\mathbb{E}$.

2 - Dessiner la boule unité fermée centrée à l'origine. Même question pour une boule fermée de rayon $r > 1$ et de centre $a = (1,0)$.

La métrique δ est connue sous le nom de <u>métrique de la SNCF</u>.

Exercice 3

On rappelle qu'un *homéomorphisme* entre deux espaces métriques X et Y est une application bijective $\psi : X \longrightarrow Y$ telle que ψ et ψ^{-1} soient continues.

Tout intervalle de $\mathbb{R}$ que l'on considérera sera muni de sa métrique usuelle $d(x,y) = |x - y|$. Soit J un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

Montrer qu'il existe un homéomorphisme $\phi :]0,1[\longrightarrow J$ en en donnant un explicitement dans chacun des cas :

$$J =]-\infty, +\infty[, \quad J =]-\infty, \varepsilon[, \quad J =]\eta, +\infty[\quad \text{avec } \varepsilon, \eta \in \mathbb{R}$$

et

$$J =]a, b[\quad \text{avec } a, b \in \mathbb{R} \text{ vérifiant } a < b.$$

Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation de la copie.

Corrigé

Exercice 1

1 - Montrons que d_1 est une distance sur $\mathbb{R}^n$.

• Il est évident que si $x = y$, on a $x_i = y_i$ pour tout $i = 1, \cdots, n$; par suite $d_1(x, y) = 0$. Inversement, si $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = 0$, chacun des termes $|x_i - y_i|$ de la somme étant positif ou nul vaut forcément 0, donc $x_i = y_i$ pour tout $i = 1, \cdots, n$ *i.e.* $x = y$.

• On voit immédiatement que $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| = d_1(y, x)$.

• Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^n$. Alors :

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \le \sum_{i=1}^{n} (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i| = d_1(x,z) + d_1(z,y)$$

ce qui démontre l'inégalité du triangle pour d_1.

Montrons maintenant que d_∞ est une distance sur $\mathbb{R}^n$.

• Si $x = y$, on a $x_i = y_i$ pour tout $i = 1, \cdots, n$; par suite $d_\infty(x, y) = \max\limits_{i=1,\cdots,n} |x_i - y_i| = 0$. Inversement, si $d_\infty(x, y) = \max\limits_{i=1,\cdots,n} |x_i - y_i| = 0$, chacun des termes $|x_i - y_i|$ est a fortiori égal à 0, donc $x_i = y_i$ pour tout $i = 1, \cdots, n$ *i.e.* $x = y$.

• On a $d_\infty(x, y) = \max\limits_{i=1,\cdots,n} |x_i - y_i| = \max\limits_{i=1,\cdots,n} |y_i - x_i| = d_\infty(y, x)$.

• Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^n$. Alors $d_\infty(x, y) = \max\limits_{i=1,\cdots,n} |x_i - y_i| \le \max\limits_{i=1,\cdots,n} \{|x_i - z_i| + |z_i - y_i|\}$. Mais $\max\limits_{i=1,\cdots,n} \{|x_i - z_i| + |z_i - y_i|\} \le \max\limits_{i=1,\cdots,n} \{|x_i - z_i|\} + \max\limits_{i=1,\cdots,n} \{|z_i - y_i|\} = d_\infty(x, z) + d_\infty(z, y)$. Ce qui démontre l'inégalité du triangle pour d_∞.

2 - Le nombre $d_\infty(x, y)$ est le plus grand élément de l'ensemble $\{|x_1 - y_1|, \cdots, |x_n - y_n|\}$. Il est forcément inférieur ou égal à la somme $d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|$. D'autre part, chaque terme de cette somme est inférieur ou égal à $d_\infty(x, y)$, on a donc $d_1(x, y) \le n d_\infty(x, y)$. Finalement on a la double inégalité cherchée :

$$d_\infty(x, y) \le d_1(x, y) \le n d_\infty(x, y).$$

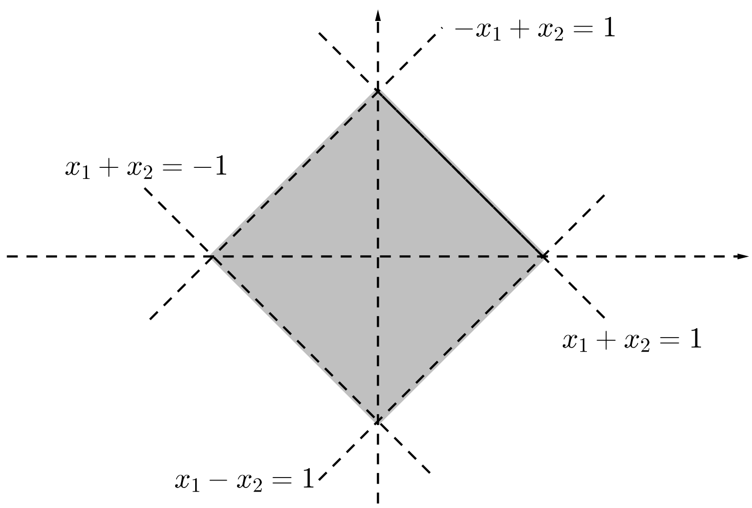
<u>Conclusion</u> : Les deux métriques d_1 et d_∞ sont équivalentes.

3 - Sur $\mathbb{R}^2$, la métrique d_1 s'écrit $d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$. La boule unité fermée centrée à l'origine est donc :

$$B(0, 1) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| \le 1\}.$$

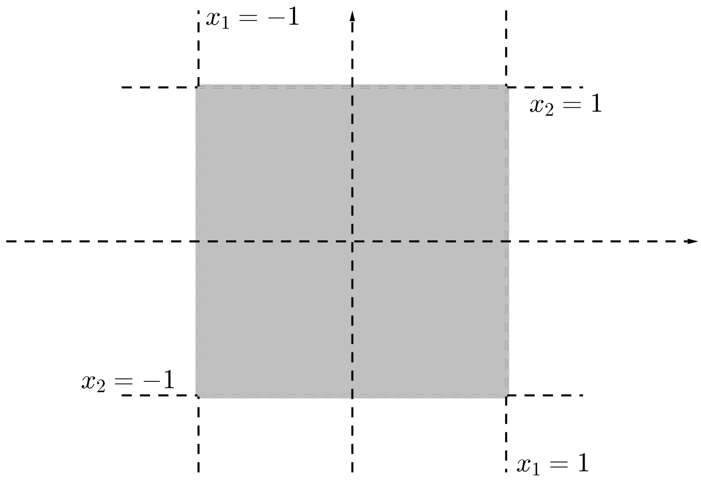
C'est l'intersection des quatre demi-plans fermés définis par les inéquations qui suivent :

$$x_1 + x_2 \le 1, \qquad x_1 - x_2 \le 1, \qquad -x_1 + x_2 \le 1 \qquad \text{et} \qquad -x_1 - x_2 \le 1.$$

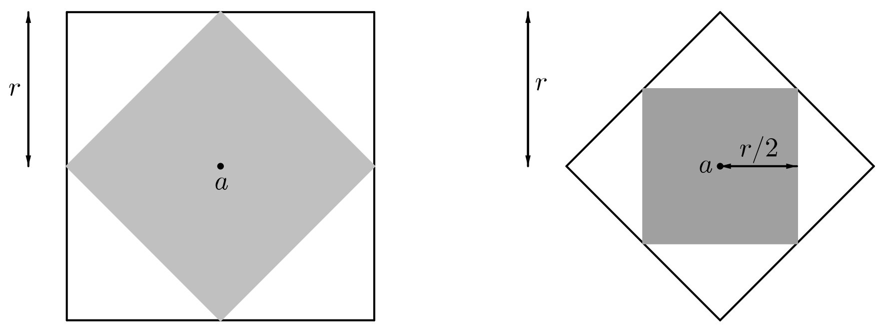


La métrique d_∞ s'écrit $d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$. La boule unité fermée centrée à l'origine est donc $B(0, 1) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x_1|, |x_2|\} \leq 1\}$. C'est l'intersection des quatre demi-plans fermés définis par les inéquations qui suivent :

$$x_1 \leq 1, \qquad x_1 \geq -1, \qquad x_2 \leq 1 \qquad \text{et} \qquad x_2 \geq -1.$$



4 - Pour avoir la réponse à cette question, il suffit de se rappeler de la forme des boules des métriques d_1 et d_2 (Question 2) et de bien regarder le dessin ci-dessous.



(i) (ii)

5 - Soit U une partie ouverte de E pour la topologie $\mathcal{T}_1$. Montrons qu'elle est aussi ouverte pour $\mathcal{T}_\infty$. Soit $a \in U$; comme U est ouverte pour d_1, il existe $r > 0$ tel que $B_1(a, r) \subset U$. Mais d'après la question 4, il existe $r' > 0$ tel que $B_\infty(a, r') \subset B_1(a, r)$. Donc $B_\infty(a, r') \subset U$ et par suite U est ouverte pour la topologie $\mathcal{T}_\infty$; ceci montre que $\mathcal{T}_1$ est contenue dans $\mathcal{T}_\infty$. De la même manière on montre l'inclusion $\mathcal{T}_\infty \subset \mathcal{T}_1$.

Conclusion : les topologies $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_\infty$ sont les mêmes.

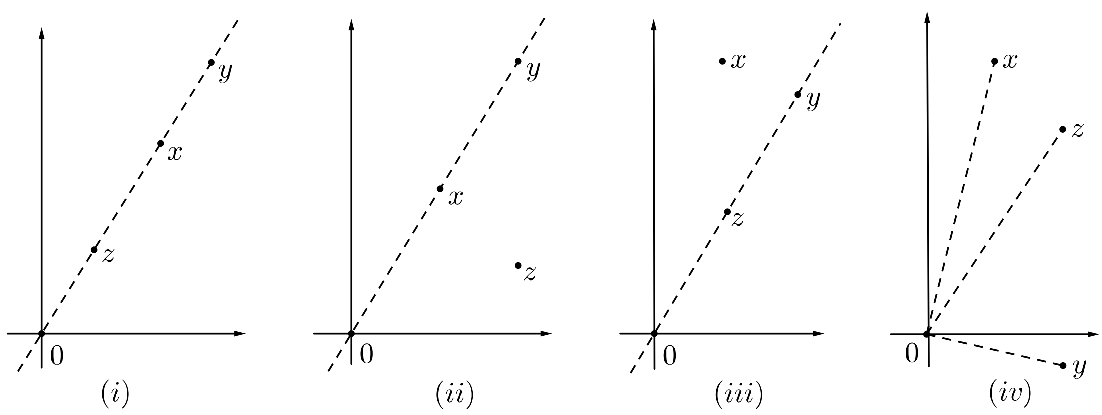
Exercice 2

1 - Montrons que δ est une distance sur $\mathbb{R}^2$.

• Si $x = y$, les trois points x, y et 0 sont alignés ; donc $\delta(x, y) = d_2(x, y) = 0$. Supposons $x \neq y$; si x, y et 0 sont alignés, $\delta(x, y) = d_2(x, y) > 0$; si x, y et 0 ne sont pas alignés, ils sont distincts deux à deux ; donc les deux nombres $d_2(x, 0)$ et $d_2(0, y)$ sont strictement positifs et par suite leur somme $\delta(x, y)$ est aussi strictement positive.

• Soient $x, y \in \mathbb{R}^2$. Si x et y sont alignés avec 0, on a $\delta(x, y) = d_2(x, y) = d_2(y, x) = \delta(y, x)$. Sinon $\delta(x, y) = d_2(x, 0) + d_2(0, y) = d_2(y, 0) + d_2(0, x) = \delta(y, x)$.

• Pour démontrer l'inégalité du triangle nous considérons les quatre cas illustrés par les dessins ci-dessous.



(i) On a $\delta(x, y) = d_2(x, y) \leq d_2(x, z) + d_2(z, y) = \delta(x, z) + \delta(z, y)$.

(ii) On a :

$$\begin{aligned}
\delta(x, y) &= d_2(x, y) \\
&\leq d_2(x, z) + d_2(z, y) \\
&\leq \{d_2(x, 0) + d_2(0, z)\} + \{d_2(z, 0) + d_2(0, y)\} \\
&= \delta(x, z) + \delta(z, y).
\end{aligned}$$

(iii) On a :

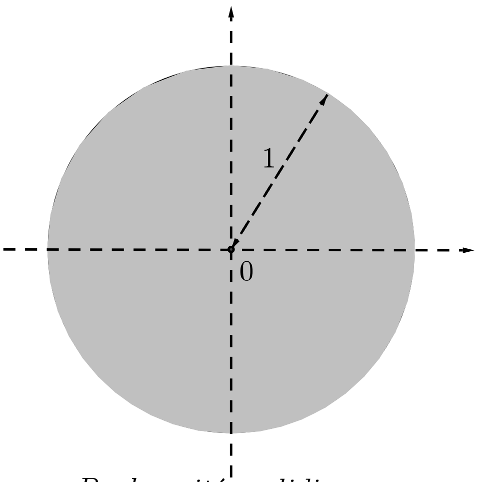
$$\begin{aligned}
\delta(x, y) &= d_2(x, 0) + d_2(0, y) \\
&\leq d_2(x, 0) + \{d_2(0, z) + d_2(z, y)\} \\
&= \{d_2(x, 0) + d_2(0, z)\} + d_2(z, y) \\
&= \delta(x, z) + \delta(z, y).
\end{aligned}$$

(iv) On a :

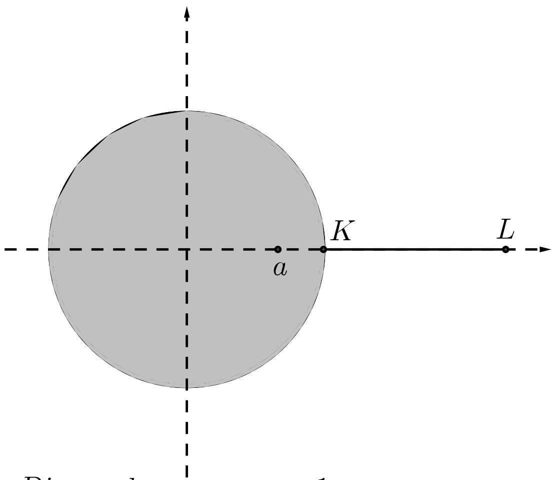
$$\begin{aligned}\delta(x,y) &= d_2(x,0)+d_2(0,y)\\ &\leq d_2(x,0)+d_2(0,z)+d_2(z,0)+d_2(0,y)\\ &= \delta(x,z)+\delta(z,y).\end{aligned}$$

2 - La boule unité fermée $B(0,1)$ est l'ensemble $\{x=(x_1,x_2) : \delta(0,x)=d_2(0,x)\leq 1\}$ c'est-à-dire la boule euclidienne $\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : \sqrt{x_1^2+x_2^2}\leq 1\}$.

La boule fermée de centre $a=(1,0)$ et de rayon $r>1$ est l'ensemble des $x=(x_1,x_2)$ vérifiant $\delta(a,x)\leq r$. Sa trace sur l'axe $x_2=0$ est le segment fermé $[1-r,1+r]$. Si x n'est pas sur cet axe, la condition $\delta(a,x)=d_2(a,0)+d_2(0,x)\leq r$ s'écrit $\sqrt{x_1^2+x_2^2}\leq r-1$, *i.e.* x est dans la boule fermée euclidienne de centre 0 et de rayon $r-1$. La boule $B(a,r)$ qu'on cherche est donc la réunion de cette boule euclidienne et le segment $[KL]$ (voir dessin ci-dessous).



Boule unité euclidienne



Disque de rayon $= r-1$

Exercice 3

Les applications qui suivent sont clairement continues :

$$\phi_1 : t\in]0,1[\longmapsto (1-t)a+tb=s\in]a,b[$$

$$\phi_2 : t\in]0,1[\longmapsto \mathrm{Log}(t)+\varepsilon=s\in]-\infty,\varepsilon[$$

$$\phi_3 : t\in]0,1[\longmapsto -\mathrm{Log}(t)+\eta=s\in]\eta,+\infty[.$$

$$\phi_4 : t\in]0,1[\longmapsto \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}(2t-1)\right)=s\in]-\infty,+\infty[.$$

Elles sont bijectives et ont respectivement pour inverses les applications :

$$\Phi_1^{-1}(s)=\frac{s-a}{b-a}\qquad \phi_2^{-1}(s)=e^{(s-\varepsilon)}\qquad \phi_3^{-1}(s)=e^{(\eta-s)}\qquad \phi_4^{-1}(s)=\frac{1}{\pi}\mathrm{Arctg}(s)+\frac{1}{2}$$

qui sont aussi continues. Les applications ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 et ϕ_4 sont donc des homéomorphismes de $]0,1[$ respectivement sur les intervalles $]a,b[$, $]-\infty,\varepsilon[$, $]\eta,+\infty[$ et $]-\infty,+\infty[$. $\square$