Le regard géométrique et un peu plus

AZIZ EL KACIMI

(Version juin 2019)

« *...que de charme possède le regard qui saisit chaque signe.* »
S. KIERKEGAARD (*Lettres des fiançailles*)

Mon œil reçoit de la lumière et je vois, à des degrés divers et de différentes manières. Je l'ai *aperçu* : je l'ai juste vu, j'ai constaté qu'il est là, qu'il est passé par là. Je l'ai *entrevu* : je l'ai vu rapidement, je l'ai croisé. Je l'ai *regardé* : je l'ai vu de façon volontaire. Tu as vu ce film ? Oui, je l'ai vu. Cela signifie que j'en ai *regardé* les scènes, *écouté* ce qui s'y disait, *suivi* le déroulement de l'histoire... et tout cela avec attention.

Je suis au musée. Mon ami m'interpelle :

- Tu as vu ce tableau ?
- Oui, je l'ai vu en passant devant tout à l'heure.
- Tu l'as bien regardé ?
- Non, j'ai juste vu qu'il était là.
- Alors, prends un peu de ton temps, regarde-le bien et nous en parlerons.

Je m'assois sur un banc, en face du tableau et me mets à le regarder. En fait, j'observe, c'est-à-dire je regarde avec attention. Que vois-je alors ? Des détails que je n'aurais pas vus si je ne m'étais pas attelé à regarder de près. La suite ? Elle est passionnante ! mais ce n'est pas tout à fait le propos pour le moment.

C'est ce qui se passe quand on regarde une figure géométrique, plus spécialement lorsqu'on essaie de résoudre un problème de géométrie en basse dimension (deux ou trois) où il est possible de dessiner et donc de visualiser. C'est de cela dont il s'agit dans ce texte : le ***regard géométrique***. J'y livre un peu les impressions que j'en ai, mais seulement sur des exemples et à travers quelques expériences personnelles, sans nullement prétendre y développer un essai sur le langage sensoriel ou autre. Il se compose de deux parties.

Dans la première, je décris un certain nombre d'exemples où l'observation d'une figure intervient de manière fondamentale et montre quand le regard :

- est nécessaire,
- trompe,
- est dynamique,
- fait un clin d'œil à l'algèbre,
- met en parallèle graphe et expression analytique,
- est furtif et décoince,
- est enfin jeté sur une peinture.

Ce dernier point fait apparaître une différence entre le regard du géomètre et celui de l'artiste observateur ou l'historien de l'art comme on le verra.

La deuxième partie est le récit d'une intervention devant des collégiens. Elle fut très intéressante et fortement liée au thème du regard à l'école cette fois-ci. C'est en partie ce qui m'a amené à la relater dans un billet [3] paru dans *Images des Mathématiques* (un site du CNRS dédié aux mathématiques). Le lecteur (qui a le courage d'aller jusquau bout) pourra ainsi noter la vivacité des collégiens et la comparer au silence cassant des étudiants décrit dans [4].

PREMIÈRE PARTIE

Quelques regards

1. Le regard est nécessaire

On prendra comme support le théorème qui suit dont l'énoncé a été formulé en 1840 par C.L. Lehmus et soumis à J. Steiner (éminent géomètre suisse de l'époque). Ce dernier en donna une solution et le théorème porte désormais son nom. Il y a eu d'autres démonstrations depuis lors, parmi lesquelles celle que je vais exposer.

Soit ABC un triangle ; on note BB' le segment bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ et CC' celui de l'angle $\widehat{ACB}$. On suppose $BB' = CC'$; alors ABC est isocèle de base BC.

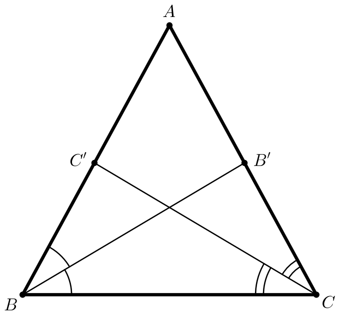


Fig.1

Avant de savoir que c'est un théorème "important" de la géométrie plane (et qu'il porte un nom), j'ai découvert son énoncé dans les années 1980 : un des membres de notre équipe *Feuilletages* de l'époque à Lille 1 nous l'a posé comme exercice. Aucun de nous n'a su le faire ; lui non plus ne savait pas le faire, et il nous a même appris qu'un de ses camarades à l'ENS l'avait soumis à son Tonton (un brillant mathématicien du XXème siècle) qui a séché dessus. Ce qui m'a beaucoup intrigué (j'étais pleinement naïf ces années-là) : un problème de formulation si simple sur lequel calent de si grosses têtes ! Mais oui ! des casse-tête du genre peuvent donner du fil à retordre à n'importe qui ! Bref...j'ai passé quelques jours à chercher une démonstration mais sans succès. Quelques années plus tard, j'ai eu à faire un cours de géométrie élémentaire à des élèves "futurs enseignants". Là, j'ai été obligé d'aller jusqu'au bout de tout problème que je commençais. Normal, il faut savoir résoudre soi-même un exercice avant de le soumettre à ses étudiants ! Je me suis souvenu de l'exercice sur les bissectrices et je me suis dit que ce serait une bonne idée de le traiter en séance de travaux dirigés. Il fallait donc avoir une preuve sous la main. J'ai fini par en dénicher une dans [2]. Je l'ai trouvée simple et sympathique mais le fait qu'elle ne soit pas la mienne me gênait. Je me suis alors mis dans la tête l'idée d'en trouver une (autre) du même acabit. J'y suis arrivé même si cela m'a pris beaucoup de temps. C'est un bel exemple sur lequel on peut commenter un aspect de l'usage du ***regard géométrique***.

Comme on ne voit pas a priori comment donner une preuve directe du théorème, on use d'un raisonnement par l'absurde : on suppose que le triangle ABC n'est pas isocèle (de base BC) et on montre que $BB' \neq CC'$. Dans ce genre de tâche, on part d'un dessin de base (voir (Fig.1)) où ne figurent que les données du problème.

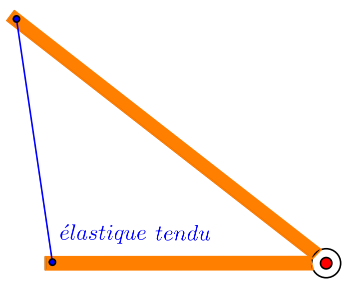
On suppose $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$ par exemple et on essaie d'arriver à $BB' \neq CC'$ comme conclusion, ce qui contredit l'hypothèse. Mais la (Fig.1) ne donne pas suffisamment de renseignements et on n'y voit pas grand chose ; il faut rajouter des éléments pour retrouver la grandeur BB', l'angle $\widehat{ABC}$ ou $\frac{\widehat{ABC}}{2}$... par exemple, un parallélogramme dont l'un des côtés est BB' et l'un des angles est $\frac{\widehat{ABC}}{2}$ (comme dans la (Fig.3)). Une première chose est sûre : l'inégalité $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$ donne $\frac{\widehat{ABC}}{2} > \frac{\widehat{ACB}}{2}$; cette dernière combinée à l'hypothèse $BB' = CC'$ fournit l'inégalité $B'C > BC'$ qui nous sera utile dans la preuve. Pour justifier cette dernière, on utilise une propriété élémentaire en géométrie plane :

Si deux triangles XYZ et $X'Y'Z'$ sont tels que $XY = X'Y'$ et $XZ = X'Z'$, alors $\widehat{YXZ} > \widehat{Y'X'Z'}$ si, et seulement si, $YZ > Y'Z'$.

On peut voir cela assez facilement et même de façon dynamique, pour "sentir" l'idée (c'est le cas de le dire !) que plus l'angle est grand plus le côté opposé l'est.

On prend deux tiges rectilignes ayant pour longueurs respectives $XY = X'Y'$ et $XZ = X'Z'$; on colle une extrémité de l'une sur une extrémité de l'autre de façon à ce qu'on puisse les faire pivoter autour du point où elles ont été collées. Pour simplifier, on maintient fixe l'une de ces tiges, qui représente par exemple les segments XY et $X'Y'$ (on a superposé le point X' sur X et le point Y' sur Y). Une position de la deuxième tige donne le triangle XYZ et une autre le triangle $X'Y'Z'$ (*cf.* dessin de gauche dans (Fig.2)). Aux extrémités encore libres, on fixe un élastique d'une longueur assez petite (pour qu'il puisse déjà être tendu à sa longueur minimale). Lorsqu'on écarte la tige libre de celle qui est immobile, l'élastique se tend et prend une longueur de plus en plus grande.

Pour être plus sérieux, et donner une "vraie démonstration", il suffit de jeter un ***regard géométrique*** sur le dessin de droite de (Fig.2) : la médiatrice du segment $[ZZ']$ passe par le point X ; elle partage son complémentaire dans le plan en deux demi-plans ouverts dont l'un contient les points $Y = Y'$ et Z', donc $Y' = Y$ est plus proche de Z' que ne l'est $Y = Y'$ du symétrique Z de Z', c'est-à-dire qu'on a $YZ > Y'Z'$.



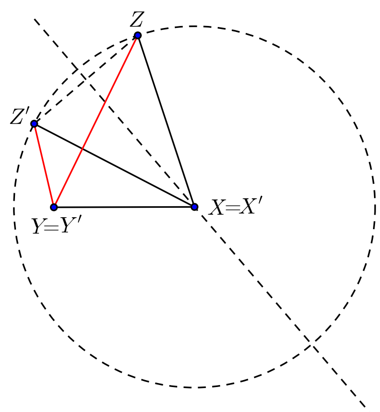


Fig.2

Un éclaircissement apparaît mais les choses restent encore opaques, comme derrière une vitre couverte de buée : il faut nettoyer pour voir plus clairement. Continuons notre démarche. Quand on nie une conclusion, c'est pour arriver à la négation de l'hypothèse, en l'occurrence celle de l'égalité $BB' = CC'$.

L'égalité $BB' = C'D$ et l'inégalité $B'C > BC' = B'D$ suggèrent de s'intéresser aux deux angles $\widehat{B'DC}$ et $\widehat{B'CD}$. Ils vont être alors tels que $\widehat{B'DC} > \widehat{B'CD}$; d'où

$\widehat{C'DC} > \widehat{C'CD}$ qui implique $C'C > C'D = BB'$ et qui amène à la contradiction de l'hypothèse $BB' = CC'$. Fin de la preuve !

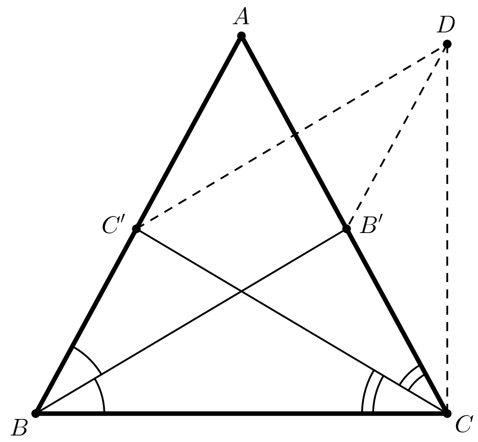


Fig.3

2. Le regard qui trompe

Soient $ABCD$ un carré de côté mesurant 1 et E, F, G et H les milieux respectifs des côtés DC, CB, BA et AD. Quelle est l'aire de l'octogone $\mathcal{O} = IJKLMNOP$?

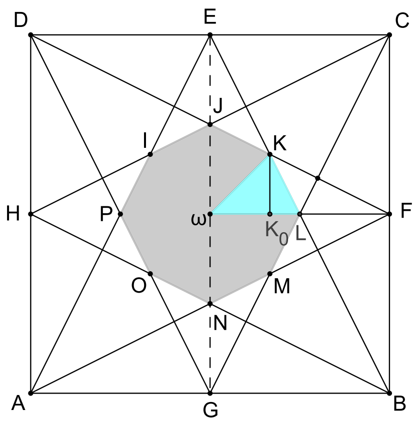


Fig.4

Beau dessin avec le même décor sous toutes les coutures. Vu qu'on part d'un carré, qu'on considère les milieux de ses côtés et qu'on joint chacun d'eux aux extrémités du côté opposé, notre octogone naît de façon apparente avec beaucoup de symétrie. On le prend pour un octogone régulier. J'ai pensé cela pendant un moment, et je ne sais pas pourquoi auparavant je n'ai pas eu le réflexe de vérifier si c'est vrai ou pas.

• Il y a huit petits triangles constituant l'octogone $\mathcal{O}$: ωIJ, ωJK, ωKL, ωLM, ωMN, ωNO, ωOP et ωPI. Le premier regard suggère qu'ils sont tous isométriques. Ils le sont effectivement. D'abord les deux triangles ωIJ et ωJK sont symétriques par rapport à la droite (ωJ) ; ensuite ωJK et ωKL sont symétriques par rapport à la droite (ωK). Ces trois triangles sont donc isométriques. En répétant ce raisonnement, on montre que les huit triangles évoqués le sont aussi. Pour calculer l'aire de l'octogone $\mathcal{O}$, il suffit donc d'avoir celle de l'un de ces huit triangles, par exemple ωKL. C'est le deuxième regard, qui nous recommande de ramener le calcul de l'aire de notre l'octogone à celui de figures plus simples.

Les deux regards évoqués, aussi géométriques soient-ils, ont tout de même été suivis d'une vérification détaillée au niveau du raisonnement.

• Le triangle KDE se déduit du triangle KFL par l'homothétie de centre K et de rapport $-\frac{DE}{FL} = -2$. Donc $\frac{KF}{FD} = \frac{1}{3}$; par suite $\frac{FK_0}{FH} = \frac{FK}{FD} = \frac{1}{3}$. On en déduit $FK_0 = \frac{1}{3}$ qui donne $\omega K_0 = \omega F - FK_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. ($K_0$ est le pied de la hauteur issue de K du triangle ωKL.) Comme le triangle $\omega K_0 K$ est rectangle en K_0 et son angle $\widehat{K\omega K_0}$ vaut $\frac{\pi}{4}$, il est isocèle de base ωK, donc $KK_0 = \omega K_0 = \frac{1}{6}$.

• L'aire de l'octogone $\mathcal{O}$ est donc : $\mathcal{A}(\mathcal{O}) = 8 \cdot \mathcal{A}(\omega KL) = 8 \cdot \frac{\omega L \cdot KK_0}{2} = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$.

Revenons un peu sur l'erreur éventuelle qu'on pourrait commettre sur la nature de l'octogone $\mathcal{O}$. Sa régularité supposée impose aux huit triangles ωIJ, ωJK, ωKL, ωLM, ωMN, ωNO, ωOP et ωPI d'être isocèles de bases respectives les côtés opposés au sommet commun ω. Or un examen précis, usant du théorème de Thalès, montre que les rapports $\frac{\omega K_0}{\omega F}$ et $\frac{\omega K}{\omega C}$ sont égaux. Donc $\omega K = \frac{1}{3}\omega C = \frac{\sqrt{2}}{6}$ qui est différent de $\frac{1}{4} = \omega L$. Par suite le triangle ωKL n'est pas isocèle. Mais comme $\frac{1}{4}$ est "voisin" de $\frac{\sqrt{2}}{6}$, sur la figure, on n'arrive pas à voir à l'œil nu cette différence, ce qui la rend trompeuse et laisse penser que l'octogone $\mathcal{O}$ est régulier.

Cet exemple met en garde : quand on use du regard géométrique, il ne faut jamais omettre d'aller jusqu'au bout pour être certain de ce qu'on serait tenté d'affirmer.

3. Le regard dynamique

Est-ce la figure qui se meut ou le regard qui cherche où elle se trouve ? Peu importe, toute réponse qu'on donnerait serait bonne. Essayons plutôt de comprendre sur un exemple ce que cela signifie.

Soit ABC un triangle non dégénéré. Construire géométriquement un carré $MNPQ$ inscrit dans ce triangle. Cela signifie, par exemple, que le point M est sur le segment $[AB]$, N sur $[AC]$ et P et Q sur $[BC]$ (cf. (Fig.5)).

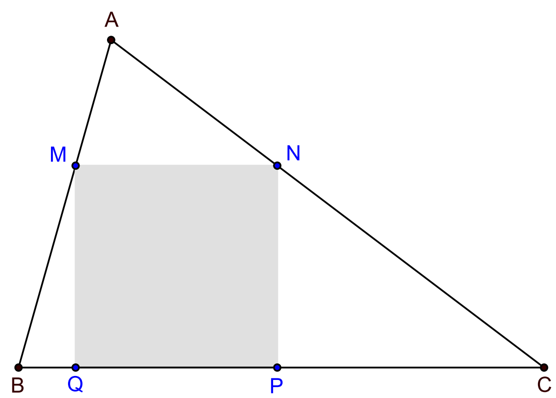


Fig.5

Comme tout problème de construction géométrique, une bonne manière de le résoudre est de supposer que la construction est faite. À cet effet, on commence par faire un dessin pour voir des éléments dedans. On part d'un carré $MNPQ$. Sur la droite (PQ) en dehors du segmet ouvert $]QP[$, on choisit un point B du côté de Q et un point C du côté de P de telle sorte que les droites (BM) et (CN) se coupent en un point A. C'est à une telle figure qu'on veut arriver mais en partant du triangle ABC qui est donné. On constate un certain nombre de choses :

(i) Les deux angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ doivent être aigus (inférieur ou égaux à un droit) si on veut que le côté BC du triangle porte le côté PQ du carré.

(ii) Pour déterminer le carré, il suffit de connaître par exemple P. En effet, N sera l'intersection de $[AC]$ avec la perpendiculaire à $[BC]$ en P, M l'intersection de la parallèle passant par P au côté BC et le côté AB et enfin Q la projection orthogonale de M sur $[BC]$.

(iii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$. L'homothétie h de centre A et de rapport λ transforme le carré $\mathcal{C} = MNPQ$ en un carré $\mathcal{C}_\lambda = M_\lambda N_\lambda P_\lambda Q_\lambda$ dont le côté $M_\lambda N_\lambda$ reste constamment parallèle au segment $[BC]$. Pour $\lambda < 1$, le carré $\mathcal{C}$ se contracte et se réduit au point A lorsqu'on arrive à $\lambda = 0$; pour $\lambda > 1$, il se dilate et à un certain moment son côté $M_\lambda N_\lambda$ se confond avec la base BC du triangle ABC. On peut voir tout cela dans les trois dessins de la (Fig.6).

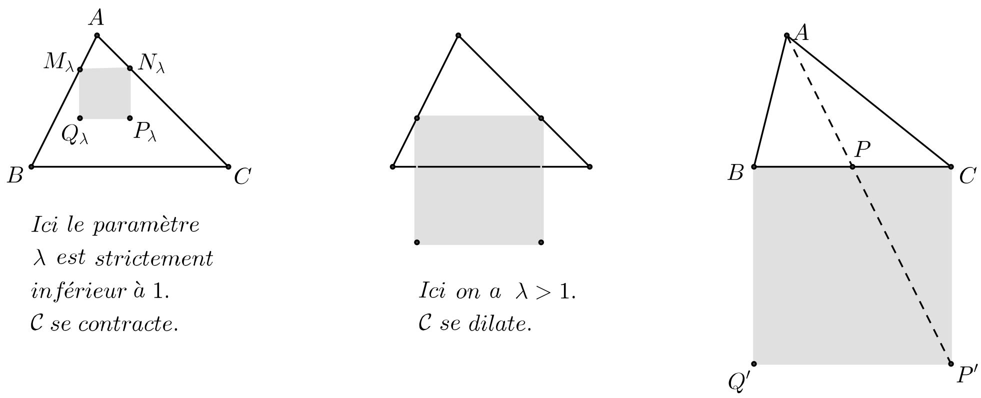


Fig.6

(iv) Comme h envoie $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}_\lambda$, l'inverse h^{-1} va envoyer $\mathcal{C}_\lambda$ sur $\mathcal{C}$. L'avantage est que la construction de $\mathcal{C}_\lambda$ est soumise à moins de contraintes que celle de $\mathcal{C}$. Et c'est la construction de l'un des $\mathcal{C}_\lambda$ qu'on va faire effectivement.

(v) On construit n'importe lequel des carrés $\mathcal{C}_\lambda$ en question. Par exemple $BCP'Q'$ (dessin de droite sur la (Fig.6)). L'homothétie qui le ramène vers l'un des carrés $MNPQ$ cherchés (a priori il n'est pas le seul) envoie le point P' sur le point P ; donc P est l'intersection de la droite (AP') avec le segment $[BC]$. Comme on l'a déjà remarqué au point (ii), la connaissance de ce point P suffit à avoir le carré $MNPQ$.

(vi) On a en même temps montré l'unicité du carré qu'on cherche lorsque on décide de mettre les points P et Q sur BC. En fait, si les trois angles sont strictement aigus, il y a trois solutions : chaque côté du triangle peut héberger un côté du carré. Deux solutions si l'un des angles est droit. Si l'un des angles est strictement obtus (strictement plus grand qu'un droit), seul son côté opposé peut héberger un côté du carré, donc il n'y a qu'une seule solution.

Notre carré $MNPQ$ ne peut pas être construit directement sur le triangle ABC. Nous avons dû chercher ailleurs un autre carré $BCP'Q'$ que nous avons transformé en celui qui nous intéresse : nous l'avons mis en mouvement dans l'espace et son homogénéité. Signalons en passant que la notion d'homogénéité est très importante en mathématiques. Elle l'est aussi en philosophie ! Voici ce qu'en disait Sartre par exemple dans [6] :

> ***Le mouvement est pur changement de lieu d'un ceci demeurant par ailleurs inaltéré, comme le montre assez le postulat de l'homogénéité de l'espace.***

C'est l'inaltération de la forme : dans notre exemple, le carré a beau changer de taille mais reste toujours un carré. C'est même sûrement le "même carré" vu à travers des lunettes différentes !

La géométrie nourrit nos yeux tous les jours : elle est présente dans tous les coins de notre espace de vie. C'est certainement (ou c'était !) la partie la plus plaisante par laquelle on débute l'apprentissage des mathématiques à l'école (c'est le souvenir que j'en ai personnellement). Pendant longtemps, elle avait une place de choix aussi bien dans le secondaire que dans le supérieur, et c'était plus que légitime. Mais, ces dernières années, pour des raisons laissées tout le temps sombres (délibérément ou par ignorance), un bon nombre de décideurs l'ont amputée. Le pire : beaucoup de membres de la communauté mathématique applaudissent un tel acte. J'en étonnerais plus d'un si je disais que certains d'entre eux vont jusqu'à interdire à leurs étudiants de faire des dessins en cours d'algèbre linéaire :

- Je ne veux rien savoir, ne me dites pas qu'un noyau est un plan !

- Eh...comment ça, Professeur !

- Non ! non ! et non ! je ne veux pas entendre ça, je vous l'interdis !

Vampirisés, les pauvres. Petite histoire (rien ne vaut les faits réels) qui montre que ces étudiants étaient obligés de rester dans les rangs impartis et ne rien tenter d'autre.

4. Clin d'œil à l'algèbre

J'ai cette "sale habitude" de commencer de temps en temps une séance de travaux dirigés par un petit test. Je pose la question aux étudiants :

- Est-il possible de diagonaliser la matrice A d'une rotation du plan euclidien de centre l'origine et d'angle 90 degrés ?

Je m'attendais à une réponse rapide (géométrique bien entendu) ; rien de tout cela, on n'y pense même pas. Mais on sort la bonne recette du chef : on retranche λ de tous les termes diagonaux, on calcule le déterminant, puis le discriminant (il le faut absolument ?) et paf, celui-ci est négatif.

- Monsieur, pas de solutions réelles, on ne peut donc pas diagonaliser A.

- C'est parfait ! mais que signifie cela du point de vue géométrique ? leur dis-je.

- On ne sait pas ! On ne nous a jamais rien dit là-dessus et on nous déconseille de faire des dessins. On doit se contenter de calculer.

Oui, en effet, seul le calcul convainc. Tout s'arrête là. Je n'étais pas étonné de cette réaction et j'avais du mal à comprendre pour quelle raison on ne peut pas (ou on ne doit pas) leur expliquer l'aspect géométrique qu'il y a derrière. Je décide de réparer (ce que je n'ai jamais cassé). C'est alors tout le tralala "valeur propre, vecteur propre..." qu'il fallait reprendre, mais je passe par dessus tout pour ne retenir que le fait (sur lequel finalement on s'est mis d'accord) que l'existence d'une valeur propre non nulle implique celle d'un vecteur non nul dont la direction (ou la droite qui le "porte") reste la même sous l'effet de l'application linéaire. Je leur demande de dessiner le plan euclidien (celui de tout le monde : deux axes perpendiculaires portant chacun un vecteur de longueur 1 d'origine le point d'intersection) ; ils le font ; ensuite de prendre un vecteur non nul et lui appliquer la rotation ; ils le font.

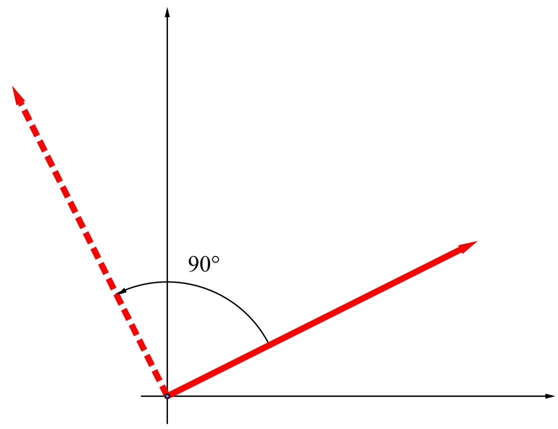


Fig.7

- Ah oui, tous les vecteurs tournent d'un quart de tour, s'écrient-ils ; aucune direction ne reste la même.

- Et donc ?

- Il n'y a pas de valeur propre réelle, A n'est pas diagonalisable, s'empressent-ils de conclure.

Leur joie fut immense de découvrir en "voyant avec leurs yeux" (au sens propre du terme) le "phénomène valeur propre et vecteur propre". Ils en connaissent la définition, par la simple phrase habituelle (qu'ils récitent) : *On dit que λ est valeur propre de l'endomorphisme f s'il existe un vecteur non nul u tel que $f(u) = \lambda u$; on dit alors que u est un vecteur propre associé à λ.* Et tout reste là. Dommage ! ça laisse l'enseignement qu'ils subissent totalement incomplet.

Continuons ! Nous allons voir qu'il n'y a pas que l'algèbre linéaire à qui le ***regard géométrique*** fait des clins d'œil.

5. Graphe ou expression analytique ?

Plus précisément : *Faut-il penser à une fonction par son expression analytique ou par son graphe* ? Examinons cela sur un problème plus concret : *Exhiber une suite de fonctions continûment dérivables sur l'intervalle* $[-1, 1]$ *qui converge uniformément vers f continue non dérivable* (histoire de montrer que l'espace des fonctions continûment dérivables sur $[-1, 1]$ n'est pas complet pour la norme uniforme).

J'ai souvent posé cette question en Master et, toujours, les étudiants ne sont tentés que par la forme analytique de chacune des fonctions. Ils y passent du temps, et en vain.

- Pourquoi vous n'essayez pas géométriquement ? leur dis-je à chaque fois.

- Comment ça, géométriquement, Monsieur ? c'est de l'analyse ? rétorquent-ils.

Je leur suggère alors de bien se rappeler pourquoi la fonction $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable en 0, de tracer son graphe et de le considérer comme un petit ravin dans lequel on jette un cerceau (cercle) de diamètre $\frac{1}{n}$. Ensuite, faire varier $n = 1, 2, \ldots$ et laisser le reste à l'imagination. Ils se demandent pourquoi tout cela. Mais quand je les invite à bien regarder la figure et après quelques échanges, ils finissent par comprendre et arriver à construire la suite cherchée.

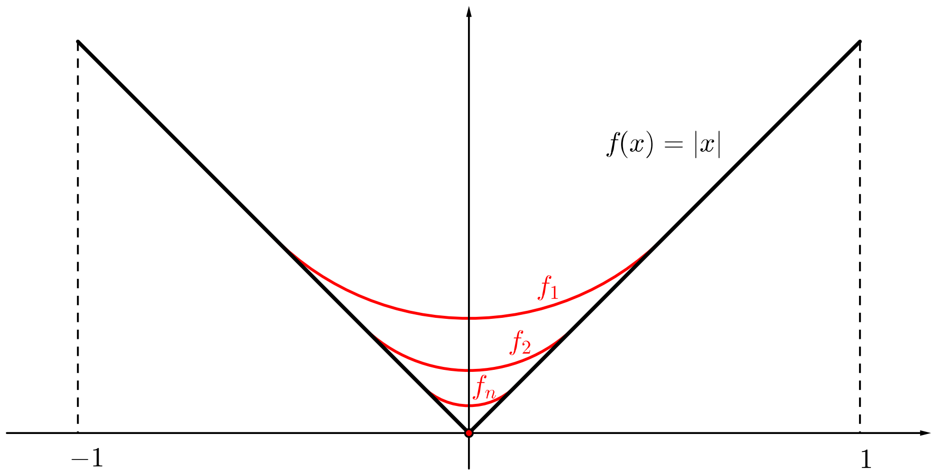


Fig.8

Même s'il faut encore travailler afin de les dissuader de faire des calculs compliqués pour montrer qu'effectivement la suite f_n converge uniformément vers f, ils ne tardent pas à réaliser et à se convaincre que c'est le moyen le plus intuitif et le plus facile pour répondre à une question de ce genre. Ainsi, ils découvrent la vertu et la force du ***regard géométrique***.

Je peux conter mille histoires du même genre. Toutes amènent à se demander pourquoi on va de façon aveugle vers la privation de l'enseignement des mathématiques de tous ces services que lui rend la géométrie. Car le vider de celle-ci, c'est y mettre fin une fois pour toutes.

6. Furtif mais décoince !

Nous avons souvent les yeux ouverts sur les objets de la vie réelle dont beaucoup ont des formes géométriques diverses. Les regarder fait penser à ceci ou cela, fait rêver...et peut-être même, peut donner une idée de travail à un mathématicien, lui faire apparaître ainsi une direction qui flotte dans son subconscient. C'est un peu ce qui m'est arrivé dernièrement : un regard bref m'a décoincé et m'a permis de résoudre un problème qui me turlupinait depuis longtemps. Au risque d'ennuyer, je me lance un défi de conter l'histoire en espérant arriver à être clair même auprès d'un lecteur non spécilaiste. Je me mets dans la situation la plus simple : la dimension trois dans laquelle il est toujours possible de visualiser. Mais il peut toujours zapper ce passage.

On note $\mathbb{C}$ le champ complexe qu'on voit simplement comme le plan euclidien $\mathbb{R}^2$. On forme le produit cartésien $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ dans lequel on repère chaque point par ses coordonnées (z, t). On peut voir $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ comme un bloc, c'est-à-dire un espace *connexe*, mais aussi comme la réunion disjointe de toutes les droites $\{z\} \times \mathbb{R}$ avec z variant dans $\mathbb{C}$; on dit alors que $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ est *feuilleté* (par ces droites). Si on le prive de l'origine $(0, 0)$, on obtient l'ouvert $M = \mathbb{C} \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$ dans lequel la droite verticale $\{0\} \times \mathbb{R}$ a été cassée en deux demi-droites ouvertes F_+ et F_- (en rouge sur la (Fig.9)). Cette famille

$\mathcal{F}$ de droites et des deux demi-droites F_+ et F_- est un *feuilletage* de M ; chaque droite ou demi-droite de cette famille en est une *feuille*.

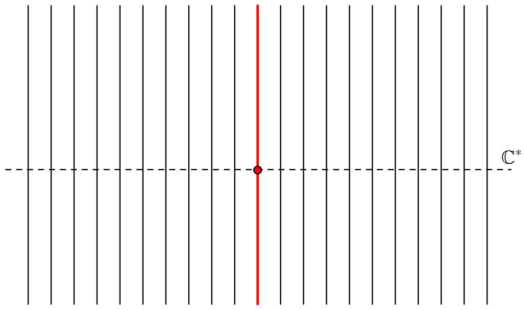


Fig.9

Chaque feuille de $\mathcal{F}$ admet en chacun de ses point (z,t) un vecteur tangent $T(z,t)$, par exemple celui qui a pour composantes $(0,1)$. Il est partout le même mais rien ne nous empêche de le modifier en le multipliant par un nombre réel $c(z,t)$ non nul pour que ses composantes deviennent $(0, c(z,t))$. Habituellement, on demande à ce que la fonction $(z,t) \longmapsto c(z,t)$ soit de classe C^∞ (indéfiniment différentiable en (z,t)) pour avoir une bonne régularité ; on obtient ainsi un autre champ de vecteurs $X(z,t) = c(z,t)T(z,t)$ tangent au feuilletage $\mathcal{F}$.

Les fonctions de classe C^∞ sur M s'ajoutent entres elles et se multiplient par les constantes. Elles forment donc un espace vectoriel $C^\infty(M)$. Sur celui-ci le champ X définit un opérateur linéaire D : il associe à toute fonction $f(z,t)$ dans $C^\infty(M)$ la fonction $Df(z,t) = c(z,t)\frac{\partial f}{\partial t}(z,t)$ qui est encore dans $C^\infty(M)$. Problème naturel :

On se donne $g \in C^\infty(M)$ et on cherche les conditions nécessaires et/ou suffisantes pour lesquelles l'équation différentielle $Df = g$ a une solution $f \in C^\infty(M)$.

Dire que pour toute fonction g dans $C^\infty(M)$, l'équation $Df = g$ a une solution $f \in C^\infty(M)$ est équivalent à dire que l'opérateur $D : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ est surjectif. S'il ne l'est pas, son image $R = D(C^\infty(M))$ est un sous-espace strict de $C^\infty(M)$. Le quotient $C^\infty(M)/R$ est alors un espace vectoriel non trivial. Il ne dépend pas de la fonction (partout non nulle) $c \in C^\infty(M)$ mais uniquement du feuilletage $\mathcal{F}$; on le note $H^1_{\mathcal{F}}(M)$ et on l'appelle *premier groupe de cohomologie feuilletée* de $(M, \mathcal{F})$. Sa connaissance est fondamentale car il contient exactement les *obstructions* à la résolution de l'équation $Df = g$.

Il y a une trentaine d'années, je me suis posé un problème : calculer le premier groupe de cohomologie feuilletée d'un feuilletage provenant de $(M, \mathcal{F})$ après passage au quotient par le groupe $\mathbb{Z}$ via un difféomorphisme γ (je me passe de la description qui n'est pas immédiate). Le calcul de $H^1_{\mathcal{F}}(M)$ en était une première étape fondamentale. J'ai toujours procédé de manière frontale mais sans jamais rien trouver. Ce n'est que récemment que je me suis dit qu'il fallait peut-être que je m'y prenne différemment (quand j'ai envie de me mettre dessus), par d'autres méthodes, par exemple certaines techniques de topologie algébrique. À cet effet, on peut montrer les assertions suivantes, que j'énonce sans démonstration évidemment.

• Sur l'espace $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$, il est facile de trouver une solution $f \in C^\infty(\mathbb{C} \times \mathbb{R})$ de l'équation $Df = g$ pour toute fonction $g \in C^\infty(\mathbb{C} \times \mathbb{R})$. Il suffit de poser : $f(z,t) =$

$\int_0^t \frac{g(z,s)}{c(z,s)}ds$. On a donc $H^1_{\mathcal{F}}(\mathbb{C}\times\mathbb{R}) = 0$. Le fait d'ôter l'origine $(0,0)$ de $\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ et de se mettre sur $M = \mathbb{C}\times\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$ ne permet plus d'user d'une telle intégration. Mais on peut montrer que si U est un ouvert $\mathcal{F}$*-trivial* de M, c'est-à-dire pour lequel il existe un difféomorphisme $\phi : \mathbb{C}\times\mathbb{R} \longrightarrow U$ de la forme $(\phi_1(z,t), \phi_2(t))$, alors $H^1_{\mathcal{F}}(U) = 0$. (Il faut voir le difféomorphisme ϕ comme un changement de coordonnées qui respecte la structure feuilletée.)

• Si U_+ et U_- sont deux ouverts $\mathcal{F}$-triviaux ainsi que leur intersection U, un outil de topologie algébrique bien connu (portant le nom de suite exacte de Mayer-Vietoris) donne un moyen d'arriver au calcul du groupe $H^1_{\mathcal{F}}(M)$. Mon problème se transforme donc en le suivant : *Trouver un recouvrement ouvert* $\mathcal{F}$*-trivial* $\mathcal{U} = \{U_+, U_-\}$ *de* M (*cela signifie que* U_+, U_- *et leur intersection* $U = U_+ \cap U_-$ *sont* $\mathcal{F}$*-triviaux*).

De temps en temps j'y pense. En vain ? Pas vraiment... Fin avril 2015, je me baladais en famille dans une Médina au Maroc. Un peu hagard et tête en l'air, je regardais par-ci par-là sans but précis, j'appréciais simplement le mouvement de la foule et le tintamarre de la vie quotidienne. À un moment je dirigeai mon regard vers le haut et j'aperçus une femme sortant sa tête d'une fenêtre armée de barreaux de fer ne laissant qu'une petite ouverture triangulaire en bas (comme dans la (Fig.10)).

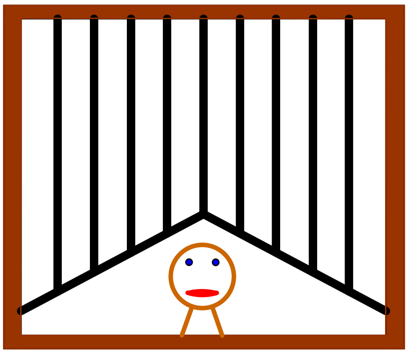


Fig.10

Grand tilt : "Une coupe plane verticale de mon feuilletage ! Et si je prenais les ouverts que je cherchais de la même forme que la partie que remplissent les barreaux, ils seraient $\mathcal{F}$-triviaux ainsi que leur intersection, n'est-ce pas ?" m'étais-je questionné. Je ne voulais pas laisser filer l'idée, il fallait que je voie ce qu'elle pourrait donner. J'ai prétexté un coup de fatigue auprès de ma famille et je leur ai proposé de les attendre dans un café pendant qu'ils faisaient leurs courses. J'en ai choisi un, me suis installé sur la terrase et j'ai commandé un thé à la menthe fraîche. Et malgré l'air pollué par la fumée de cigarettes - tout le monde en avait une au bec - et le manque de présence féminine rendant l'atmosphère dénaturée et sans douceur, je n'ai pas changé d'endroit tellement je m'empressais à faire mes calculs. Je m'y suis mis et j'ai pu ainsi me convaincre qu'effectivement ça fonctionne comme je l'avais pensé. Le premier but que je me suis fixé était alors bel et bien atteint. Les jours qui suivirent, j'ai pu résoudre complètement et élégamment mon problème.

Un regard au hasard, tout à fait inattendu, furtif, et sans rapport a priori avec les mathématiques mais révélateur et décoinçant. C'est un ***regard géométrique*** !

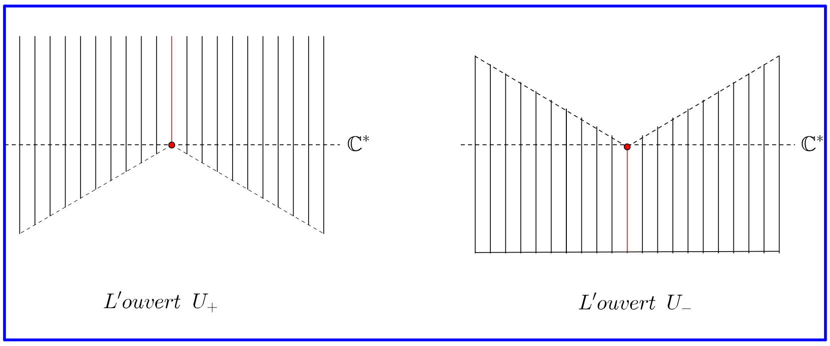


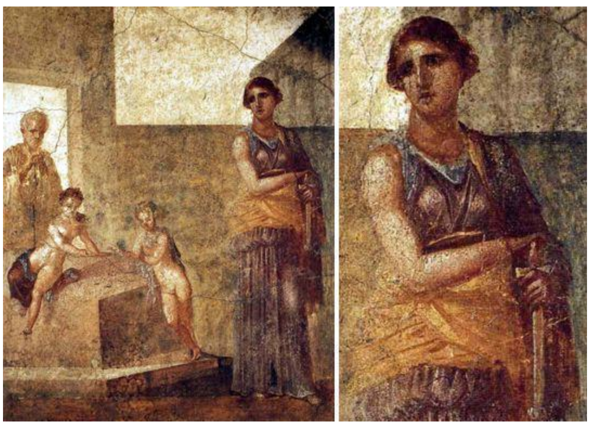
Fig.11

On peut noter que toutes les démonstrations qu'on vient de donner, même quelquefois avec du calcul, restent géométriques ou impulsées par le regard géométrique qu'on porte sur la figure et ses éléments. Mais ce regard à lui seul est insuffisant sans les connaissances préalables pour pouvoir mener le raisonnement qui doit impérativement l'accompagner (par exemple, dans un triangle le plus grand angle est opposé au plus grand côté, argument dont nous avons usé dans la section 1). C'est donc un tout. A-t-on la même chose pour une peinture ? Pas tout à fait comme on va le voir sur l'exemple qui suit.

7. Voici Médée !

Nous avons choisi le tableau ci-dessous (de Timonaque de Byzance) exposé au *Museo Archelegico Nazionale* à Naples mais provenant de la *Maison des Dioscures* à Pompéi.

On y voit une femme debout, regardant à sa droite et tenant un sabre à la main. Elle tourne le dos à deux enfants en train de jouer sous l'œil attentif d'un homme au fond de la salle. Qui est cette femme ? qui sont ces enfants ? qui est cet homme ? Que signifie cette scène ? La réponse à chacune de ces questions se trouve dans l'histoire de Médée. La voici donnée de façon brève.



Médée

Fig. 12

Éeson était roi d'Iolcos en Thessalie mais fut chassé de son royaume par son frère Pélias. Son fils Jason fut recueilli par le centaure Chiron qui lui apprit non seulement la sagesse mais aussi l'art du combat. À l'âge adulte, il décida de revenir dans son pays pour aider son père à récupérer son trône. Pélias, ayant rencontré une vieille femme qui lui prédit sa mort par un vagabond, craignait ce retour. Il accepta alors de se démettre à condition que Jason ramène la Toison d'or qui se trouve en Colchide chez le roi Éetès, pendue à un chêne et gardée par un dragon, pensant ainsi qu'il ne pourra jamais y arriver. Jason se rendit chez Éetès. Celui-ci consentit à lui céder la Toison d'or s'il arrive à surmonter certaines épreuves difficiles. Médée, fille du roi, et connue par ses pouvoirs de sorcellerie, tomba amoureuse de Jason et l'aida à décrocher cette toison. À son départ de Colchide, Ascylros, le frère de Médée, menaça Jason. Médée le tua, s'enfuit avec Jason et se donna à lui. Ils eurent deux enfants, Merméros et Phérès. À leur retour à Iolcos, Pélias n'a pas tenu sa promesse et Médée le tua en le faisant bouillir dans une cuve. Médée et Jason se réfugièrent alors chez le roi Créon de Corinthe. Mais ce dernier ignora l'existence de Médée et offrit sa fille Creüse à Jason, celui-ci répudia Médée et épousa Creüse dont il fut épris et parce qu'elle était grecque comme lui. Médée, foudroyée par ce qui lui arriva et complètement rattrapée par ses instincts meurtriers, tua sa rivale et égorgea ses deux enfants pour se venger de Jason.

C'est ce dernier instant précis que décrit le peintre : les enfants jouent sous le regard de leur éducateur qui ne se doute de rien ; Médée se tient devant, un sabre à la main et dans un mouvement de rotation qui l'amène vers eux pour accomplir son geste. Voici ce qu'en dit Pascal Quignard dans [5] :

> ***Dans la fresque de la maison de Jason, les regards des enfants et de leur mère sont croisés. Le pédagogue regarde Merméros et Phérès. Il y a deux interprétations possibles de l'attitude et du regard de Médée. Ou bien, se recueillant avant le crime, elle est partagée entre deux sentiments qui sont contraires : la pitié et la vengeance ; en elle la mère et la femme s'opposent ; elle hésite entre l'abstention de l'acte et la férocité d'un double infanticide. Ou bien, se recueillant devant le crime, monte en elle l'irrésistible colère, l'irrésistible acte, l'irréstible instant de mort. La première interprétation est psychologique. La seconde est non psychologique, physiologique, tragique. C'est la seule interprétation possible parce que c'est celle du texte que les fresques condensent. Parce que c'est celle d'Euripide.***

Pour l'observateur λ, il est impossible de deviner cela s'il ne connaît pas l'histoire de Médée. Il y a donc une différence fondamentale entre le regard que jette le géomètre sur une figure et celui de l'historien de l'art sur un tableau : le premier dispose de règles d'observation qui lui permettent d'examiner chaque figure dans un cadre assez général, le deuxième a besoin de connaître l'histoire des objets, des personnages...dans chaque tableau pris individuellement.

DEUXIÈME PARTIE

Goûter symétrique chez les collégiens

Être un enseignant dans un sens véritable, c'est être un élève. L'enseignement commence lorsque vous, l'enseignant, apprenez de l'élève, vous mettant à sa place de sorte que vous puissiez comprendre ce qu'il comprend, et la façon dont il le comprend.

Soren Kierkegaard

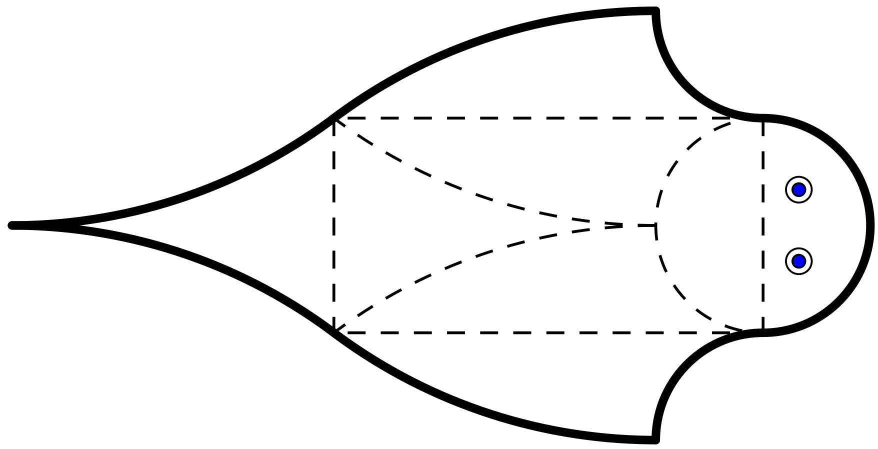


Fig.13

Le lundi 12 mai 2014, Valerio et moi sommes intervenus dans deux établissements. Le matin au Collège Vauban à Maubeuge et l'après-midi au Collège Jacques Brel à Louvroil. Il ne faisait pas beau ce jour-là, il pleuvait des cordes et la température était basse. Un peu surprenant pour une mi-mai, mais nous sommes dans le nord, un pays merveilleux, des gens formidables... alors, si le temps fait ses caprices, ce n'est pas si grave. Toujours est-il que la salle où nous avons mené notre intervention le matin n'était pas chauffée, et même en nous y déplaçant pas mal, nous étions un peu frigorifiés. Le repas chaud de la cantine scolaire nous a remis un peu d'aplomb, mais pas complètement. Nous étions comme de pauvres petits oiseaux grelottant sous la neige et il a fallu nous réfugier un petit moment dans la voiture pour nous réchauffer derrière les carreaux. Un quart d'heure plus tard, un peu mieux retapés, nous prîmes la direction du Collège Jacques Brel. Kaled Boutahar, enseignant en SVT et responsable du laboratoire de mathématiques, nous accueillit très chaleureusement dans sa salle de classe. (Eh oui, il y a un laboratoire de mathématiques dans ce collège, on n'y démontre pas de gros théorèmes mais les élèves y apprennent des mathématiques en manipulant divers objets conçus à cet effet.) Nous étions déjà prêts à entamer la séance mais avec très peu d'élèves : sept des douze, de trois niveaux (Sixième, Cinquième et Quatrième), devant être là étaient en sortie. Il n'en restait que cinq : Kessy, Tonzilla, Waffa, Hamza et Quentin. Nous étions un peu déçus mais... nous ne pouvions faire autrement, il fallait y aller.

Comme il n'est pas de notre habitude d'imposer un thème, nous demandâmes aux élèves d'en suggérer un. Ils hochèrent la tête, signifiant par là qu'ils accepteraient ce que nous leur proposerions. Nous prononçâmes par hasard le mot *symétrie*. Et de suite, celui-ci les interpella.

– Aimeriez-vous travailler dessus ?

Les réponses jaillirent de tous les côtés :

– Oui, oui ! la symétrie, la symétrie, c'est bien ! crièrent-ils.

– Et laquelle, centrale ou axiale ? s'empressa de demander l'un d'entre-nous.

– La symétrie axiale, répondit de façon affirmée Hamza du fond de la salle.

– Vous êtes tous d'accord ?

– Oui ! répondirent-ils.

– Parfait, allons-y pour la symétrie axiale.

Nous étions partis du fait que ces élèves étaient les meilleurs de leurs classes et qu'ils fréquentaient le laboratoire parce qu'ils en demandaient plus. Nous démarrâmes la séance par la question toute naturelle :

– Qu'est-ce que la symétrie axiale ?

Des doigts se levèrent :

– Monsieur, monsieur ! Ils s'adressaient à l'un ou à l'autre d'entre nous. Nous désignâmes Kessy.

– À toi !

– Un carré qui se dédouble, répondit-elle.

– Un carré qui se dédouble ? Peux-tu nous expliquer cela ? nous faire un dessin sur le tableau ?

Elle y alla, toute joyeuse. (Nous aurions bien aimé noter un tel enthousiasme chez nos étudiants à l'université.) Elle dessina un axe et, toute hésitante, un petit carré à gauche et s'apprêta à le reproduire entièrement à droite. Mais elle n'était sûre de rien, ce qui fit sursauter Hamza :

– On commence d'abord par un point. Il entendait par là, un sommet du carré.

– Et pourquoi par un point d'abord ?

– C'est comme ça qu'on fait habituellement : d'abord les points du carré, ensuite les quatre côtés l'un après l'autre.

Cette réponse nous ébahit. Décidément, Hamza avait bien des choses à dire. Restait à effectuer la symétrie concrètement. Quentin demanda à aller au tableau. Il se saisit de la règle, plaqua le chiffre 0 sur le point en question et en la maintenant perpendiculaire à l'axe, releva la distance à celui-ci et la reporta de l'autre côté pour repérer un point. Il en fit de même pour chacun des sommets et traça finalement le carré représentant le symétrique de la figure initiale. Évidemment, il n'avait pas manqué de nous montrer que c'est un carré et qu'il est parfaitement identique à celui de gauche.

Cette séquence nous convainquit que ces élèves percevaient bien la notion de symétrie axiale, qu'il fallait persister dans cette direction et pousser le plus loin possible. Nous sortîmes alors un fichier électronique (que j'avais fabriqué pour illustrer toute intervention autour du thème) et commençâmes à leur projeter des objets habituels de la vie quotidienne pour lesquels nous leur demandâmes d'exhiber tous les axes de symétrie possibles. Le premier était une pizza ronde et notre question ne manquait pas de motivation :

– Voici une pizza. Comment la partager en deux parties égales ?

Évidemment, dans nos têtes comme dans celles des élèves, chacune des parties était d'un seul tenant. Nous leur avons aussi précisé que la coupe devait se faire d'un unique coup de couteau traversant de façon rectiligne notre pizza. Où fallait-il alors l'asséner ? Des bribes de réponse arrivèrent, entre autres :

– Il faut le milieu de la pizza, monsieur, s'adressa Hamza à l'un de nous.

– Qu'est-ce que le milieu de la pizza Hamza ?

– Son centre, répondit-il.

– Il est où ce centre ?

– Je peux aller au tableau vous le montrer ?

– Oui, bien sûr, tu peux.

Il fit une tentative mais n'y arriva qu'approximativement. Comme les dessins (droites, cercles...) faits à la main étaient souvent imprécis et pouvaient amener à de mauvaises conclusions, nous leur proposâmes de travailler directement sur l'image projetée sur le tableau blanc. Cela leur facilita les choses d'autant plus que nous avions l'impression quelque peu mystérieuse qu'ils étaient persuadés de travailler sur une vraie pizza ! Après Hamza, Kessy proposa de nous montrer comment elle s'y prendrait. Elle traça deux cordes, toutes deux proches d'un diamètre.

– C'est le centre, nous dit-elle, en nous montrant leur point d'intersection.

– Vraiment ?

– Oui, vraiment !

– À quoi le reconnais-tu ?

– Il est plus proche de tout, répondit-elle tout naturellement. Elle était sûre d'elle et de ce qu'elle disait. C'est incroyable ce que ces jeunes collégiens peuvent avoir des opinions si tranchées, c'est tellement différent de ce que nous avons l'habitude de voir dans les classes supérieures.

Nous avions compris que presque tous ces élèves savaient ce qu'ils entendaient par centre du cercle et qu'ils voyaient où il se situe. Mais nous voulions absolument qu'ils arrivassent à le placer sur cette pizza. C'est ce qui s'est passé effectivement après quelques approximations : ils le mirent là où il fallait, au-dessus d'une appétissante olive noire. Alléluia ! on a gagné une manche ! La suite :

– Et maintenant qu'on connaît bien le centre de la pizza, comment la partager en deux parties égales ?

Tous les élèves levèrent leurs doigts pour passer au tableau. Nous en avions fait défiler quatre tour à tour, et parmi eux, Tonzilla et Waffa qui d'habitude sont un peu moins spontanées que les autres. Chacun a eu droit à son diamètre. C'est assez curieux d'ailleurs la manière dont ils avaient procédé : le premier élève le dessina horizontal, le second vertical, le troisième choisit la première bissectrice des deux premiers et le quatrième leur deuxième bissectrice.

– Il n'y a que ces quatre-là ? Les réponses ne tardèrent pas à fuser :

– Non, il y en a cinq, dit l'un ;

– c'est tout ?

– six, dit un autre ;

– beaucoup plus, dit un troisième ;

– l'infini, martela Hamza avec insistance. L'infini ? Mais nous comprîmes parfaitement ce qu'il veut dire : on peut tracer une infinité de diamètres.

Satisfaits, étions-nous : tous savent maintenant que le cercle a une infinité d'axes de symétrie, en l'occurrence toute droite passant par son centre en est un. Il fallait ensuite leur montrer, qu'à cet effet, le cercle occupe une place particulière, et qu'il existe des figures qui n'en ont pas autant. Et même, on peut compter leurs axes de symétrie sur les doigts de la main ! Nous leur projetâmes alors un gâteau carré, un papillon étendant ses deux petites ailes toutes planes, un flocon de neige, une photo bien symétrique du Taj Mahal, un petit âne admirant son image dans un miroir, un triangle équilatéral, un rectangle... mais aussi des figures n'ayant aucun axe de symétrie et parmi lesquels, bien entendu, un quadrilatère tout à fait quelconque. Umberto Eco disait *Pour dire qu'une chose est fausse, il faut croire qu'une autre chose est vraie.* Donc des figures symétriques et d'autres qui ne le sont pas !

La dernière séquence de notre intervention avait consisté à montrer en quoi la symétrie axiale permet de résoudre certains problèmes pratiques, par exemple le calcul de l'aire d'une figure géométrique. Habituellement, les élèves de ces niveaux connaissent la formule qui donne l'aire d'un rectangle. Il fallut nous assurer d'abord que c'était effectivement le cas. Après cela, nous leur demandâmes s'ils savent comment calculer l'aire d'un triangle, histoire de les amener à procéder à des découpages de figures, pratique indispensable pour ce que nous projetions de faire dans la suite. La question posa réellement problème : les réponses étaient un peu quelconques au début. Ce n'était pas du tout évident de leur faire comprendre qu'on peut se ramener à un rectangle. Mais nous étions arrivés quand même à mener la tâche. Le plus important était qu'ils apprissent que quand on ne peut pas aller directement d'un point A à un point B, il faut toujours chercher à passer par un troisième qu'on connaît bien, règle qui n'est pas propre aux mathématiques mais de mise dans la vie réelle. En ce qui nous occupait, il s'agissait de partager le triangle en deux triangles rectangles, en faire d'autres exemplaires pour fabriquer un rectangle dont l'aire est le double de celle qu'on cherche. C'est ce que nous avions fait avec eux ; mais malgré que ce rectangle eût été volontairement fabriqué dans ce but, le retour à l'aire du triangle initial n'était pas si évident.

En fait, ce n'était pas tout à fait l'aire de telles figures (dites régulières) qui nous intéressait le plus cet après-midi mais plutôt celle d'une qui sort un peu de l'ordinaire. Un poisson, comme par exemple celui du dessin ci-dessous (je suis tombé dessus par hasard il y a quelques années sous forme d'exercice dans [1]). Son bord Γ est constitué de morceaux de droites et de cercles, délibérément tracés dans le but de l'adapter au calcul de son aire. Sur ce bord Γ, on peut repérer quatre points A, B, C et D formant un rectangle qui constitue le ventre du poisson. Les quatre morceaux extérieurs, de contours respectifs α, β, γ et δ sont façonnés de telle sorte que leurs symétrisés respectifs par rapport aux segments AB, BC, CD et DA se superposent à l'intérieur et pavent le rectangle $ABCD$ (*cf.* dessin qui suit).

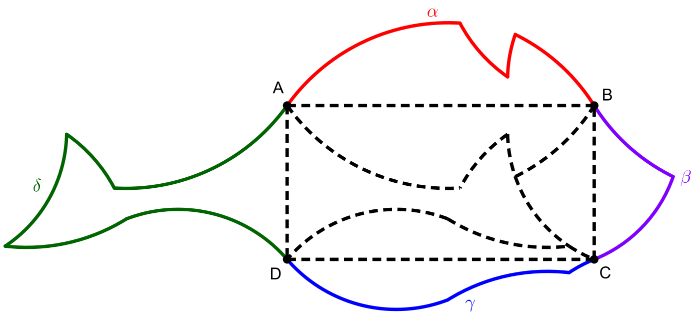


Fig.14

L'idée de laisser les élèves dessiner ce poisson et de trouver eux-mêmes une manière de plier les morceaux parut toute naturelle. Nous nous répartîmes pour suivre l'un et l'autre dans sa tâche. Hamza était assez curieux et plus demandeur. Valerio lui proposa de regarder comment on ouvre une enveloppe rectangulaire en parallélogramme dont l'aire est double (*cf.* dessin ci-dessous).

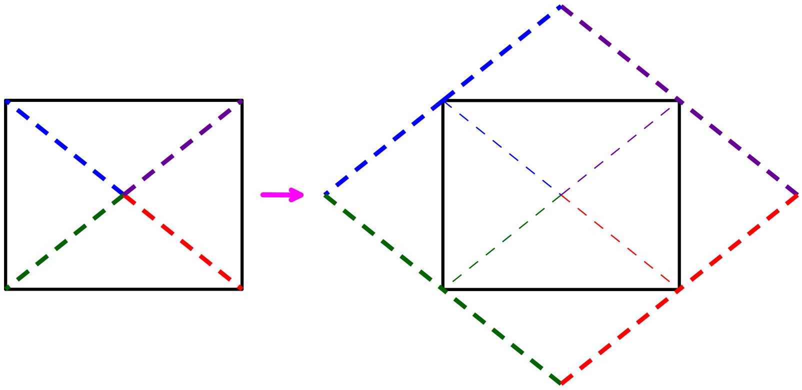


Fig.15

Déclic : Hamza remarqua tout de suite que les sommets de l'enveloppe jouaient bien un rôle. Cela l'amena à chercher les analogues pour le poisson. Il les repéra avec facilité même si ce n'était qu'approximatif. Il avait aussi compris que ces sommets sont des centres de symétrie : A entre une partie de α et une de δ, B entre une partie de α et une de β et ainsi de suite (*cf.* dessin). (Cela laissait penser qu'il suspectait que la composée de deux réflexions d'axes orthogonaux est la symétrie centrale de centre le point d'intersection.) Il alla au tableau et nous expliqua alors de façon surprenante comment on rabat ces contours de telle sorte à faire coïncider le tout à l'intérieur du rectangle $ABCD$ (exactement comme sur le dessin). À l'aide de la règle, il préleva la longueur et la largeur du rectangle, calcula son aire par la formule habituelle et conclut triomphalement :

– L'aire du poisson est deux fois celle du rectangle, et vaut donc tant de cm^2 !

– Formidable ! criâmes-nous tous ensemble.

Cette fois-ci c'était le regard géométrique de jeunes élèves !

La séance toucha à sa fin, juste au moment de la récréation. Nous demandâmes aux élèves si elle leur avait apporté quelque chose. Tous répondirent par un oui bien appuyé, nous remercièrent poliment et s'éclipsèrent en criant chacun de son côté : au revoir ! C'était très touchant ! Mais quelle ne fut notre surprise (celle qui avait motivé cette chronique) quand nous demandâmes à Kaled :

– Hamza est le meilleur de sa classe ?

– Non, non, au contraire ! Paraît-il, c'est un garçon qui a beaucoup de difficultés, et c'est la raison pour laquelle on m'a demandé de l'accueillir au laboratoire. Certains des quatre autres sont dans le même cas.

Nous tombâmes des nues : ces élèves ont des difficultés en classe ? Et pourtant, aujourd'hui, ils se sont bien épanouis pendant cette séance à la fois de travail et de divertissement. Ils sont arrivés à user du ***regard géométrique***.

C'est à cet âge-là qu'il arrive à certains enfants de décrocher. Si on laisse filer les problèmes sans chercher les solutions, ils peuvent devenir complètement insolubles et la situation irréversible. Et c'est extrêmement grave. Il est du devoir de l'enseignant de les repérer et d'essayer de comprendre leurs difficultés. Se mettre à leur place, en somme, suivre le conseil de Kierkegaard.

Pour finir, le collège nous offrit gentiment du café, du thé et des biscuits avec plein d'axes de symétrie : c'était un ***goûter symétrique chez les collégiens !***

Références

[1] Bonnefond G., Daviaud, D. & Revranche, B. *Le nouveau Pythagore, Classe de Sixième.* Édition spéciale pour le professeur, Hatier (1996).

[2] Coxeter, H.S.M. & Greitzer, S.L. *Redécouvrons la géométrie.* Dunod (1971).

[3] El Kacimi, A. *Goûter symétrique chez les collégiens !* http://images.math.cnrs.fr/Gouter-symetrique-chez-les.html

[4] El Kacimi, A. *Chronique d'une matinée en classe* http://images.math.cnrs.fr/Chronique-d-une-matinee-en-classe.html

[5] Quignard, P. *Le sexe et l'effroi.* Collection Folio, numéro 2839, (page 189).

[6] Sartre, J.-P. *L'être et le néant* (*essai d'ontologie phénoménologique*). Collection Tel, Gallimard, (Page 251).

LAMAV, FR du CNRS 2956
ISTV2, Le Mont Houy
Université Polytechnique Hauts-de-France
59313 Valenciennes Cedex 9 – France

aziz.elkacimi@uphf.fr