Math. Z. 225, 453–465 (1997)

Mathematische Zeitschrift

Actions sans points fixes sur les surfaces compactes

M. Belliart

URA au CNRS 751, Université de Valenciennes, Le Mont Houy, F-59326 Valenciennes Cedex, France

Received 28 November 1994; in final form 20 July 1995

0. Introduction

Soit une action continue d'un groupe de Lie connexe G sur une variété connexe M ; on dit que $m \in M$ est un *point fixe* s'il est invariant sous l'action de G. Les points fixes étant les singularités les plus élémentaires des actions de G, il est naturel d'étudier leurs conditions d'existence. Nous nous restreignons ici au cas où M est une surface compacte. Ce cas est à la fois intéressant et pratique :

— Intéressant, par exemple parce qu'il est peut-être possible d'étendre la formule de l'indice de Poincaré aux actions de certains groupes de Lie, ce qui constitue un enjeu utile pour la compréhension de ces actions (voir à ce sujet [Pl3]) ; les surfaces constituent à cet égard un "terrain d'expériences" favorable.

— Pratique, parce qu'on peut utiliser le manque de dimension pour des preuves de nature topologique : ainsi, une orbite a la dimension 0,1 ou 2. Si c'est 0, l'orbite est un point fixe, et nous sommes renseignés ; si c'est 1, elle sépare localement l'espace ; si c'est 2, elle est ouverte. Ce type de raisonnement n'est plus possible en dimension supérieure.

Dans le cas le plus simple où $G = \mathbb{R}$, Un résultat classique dû à Poincaré ([Po]) affirme que si la caractéristique d'Euler $\chi(M)$ de M est non nulle, il existe toujours un point fixe. Plus généralement, Plante a montré dans [Pl1] que si $\chi(M) \neq 0$ et G est nilpotent, toute action de G sur M a un point fixe (voir aussi [Pl2], [Pl3] pour d'autres résultats).

Etant donnés une action du groupe G_0 et un morphisme surjectif π de G sur G_0, on peut construire l'action induite de G, qui est donnée par la formule $g.m := \pi(g).m$. Il est clair qu'en tant qu'action de G, celle-ci est sans intérêt (c'est une action du groupe G_0 de dimension inférieure). Pour écarter ce genre de construction, on a recours à une définition : on dit que G agit *effectivement* sur M si le seul élément de G qui stabilise tout point de M est 1. Ceci ramène le problème précédent à l'étude des actions effectives de G sur M. Selon [Pl2], si G agit effectivement sur une surface compacte M telle que $\chi(M) < 0$, G est résoluble et la longueur de sa suite dérivée est au plus 3. Par ailleurs, le groupe affine réel $G_{\mathbb{R}}$ agit effectivement et sans point fixe sur toute surface compacte selon [Pl1].

Soient G un groupe de Lie connexe, M une surface connexe et compacte. Nous allons répondre complètement au problème suivant :

Existe-t-il une action continue de G sur M sans point fixe ?

Pour cela, à toute surface M nous associerons une liste finie (et très courte) de groupes de Lie $G_1, \dots, G_k$ et nous montrerons que G agit sans point fixe sur M si et seulement si G a l'un des G_i pour quotient. Attention : ceci veut simplement dire qu'il existe un morphisme surjectif de G sur (par exemple) G_1, ce qui n'implique pas que l'action soit induite ; celle-ci peut au contraire être globalement très compliquée.

Nous notons $\mathbb{S}^1$ le cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Nous décrirons au paragraphe suivant des groupes de Lie résolubles de petite dimension $G_{\mathbb{R}}, G_{\mathbb{C}}$ et G_α ($\alpha \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$). Notre résultat est le suivant :

Théorème Principal. *Le groupe de Lie G possède une action continue et sans point fixe sur la surface compacte M dont la caractéristique d'Euler-Poincaré est $\chi(M)$ si et seulement si G possède pour quotient l'un des groupes suivants:*

1. *Cas où $\chi < 0$: $G_{\mathbb{R}}$.*
2. *Cas où $\chi = 0$: $\mathbb{S}^1$ ou $PSL(2, \mathbb{R})$.*
3. *Cas où $\chi > 0$: $G_{\mathbb{R}}, G_{\mathbb{C}}, G_\alpha$ ou $PSL(2, \mathbb{R})$;*
   également $PSO(3)$, $PSL(3, \mathbb{R})$ et $PSL(2, \mathbb{C})$ si M est sans bord.

On obtient ce théorème essentiellement en mettant bout à bout les résultats suivants :

Théorème A. *Si G est résoluble et $\chi(M) > 0$, il existe une action continue et sans point fixe de G sur M si et seulement si G a pour quotient $G_{\mathbb{R}}, G_{\mathbb{C}}$ ou G_α (ce qui est possible si et seulement si G n'est pas nilpotent).*

Théorème B. *Si $\chi(M) < 0$, il existe une action continue et sans point fixe de G sur M si et seulement si G admet $G_{\mathbb{R}}$ pour quotient.*

Théorème C. *Si G est semi-simple, il existe une action sans point fixe de G sur M si et seulement si $\chi(M) \geq 0$ et*

1. *G a $PSL(2, \mathbb{R})$ pour quotient, ou*
2. *$\chi(M) > 0$, M est sans bord et G a $PSL(3, \mathbb{R})$, $PSL(2, \mathbb{C})$ ou $PSO(3)$ pour quotient.*

Ces résultats améliorent et complètent ceux de l'article [Be], dont le but était de répondre aux trois questions suivantes, posées par Plante dans [Pl1] :

(1) Si G est à croissance exponentielle, agit-il sans point fixe sur toute surface compacte M telle que $\chi(M) \geq 0$? Que se passe-t-il dans le cas particulier où G est résoluble ?
(2) Si G est résoluble et si $\mathrm{ad}(X)$ a une valeur propre réelle non nulle pour un certain X dans l'algèbre de Lie de G, est-ce que G peut agir sans point fixe sur toute surface compacte ?
(3) Si G est à croissance polynomiale, est-ce que toute action de G sur une surface compacte telle que $\chi(M) < 0$ a un point fixe ?

Aux §§ 1, 2 et 3, nous prouvons les théorèmes A, B et C. Ceci nous permet d'obtenir le théorème principal et une réponse aux questions de Plante dans un quatrième paragraphe. Nous utiliserons beaucoup la classification donnée dans [Mo], §10 des actions transitives de groupes de Lie sur les surfaces, ce qui nous épargnera les preuves – élémentaires mais fastidieuses – utilisées dans [Be]. En fait, les résultats non classiques utilisés ici proviennent presque exclusivement des deux articles [Pl1] et [Mo].

1. G résoluble, $\chi > 0$.

Nous décrivons d'abord quelques groupes de Lie résolubles non nilpotents qui joueront un rôle essentiel dans la preuve du théorème A.

(*) Le groupe affine réel $G_{\mathbb{R}}$ est le groupe des transformations de $\mathbb{R}$ ayant la forme :

$$x \to ax + b \quad / \quad (a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$$

Son algèbre de Lie est l'algèbre engendrée par deux vecteurs X, Y et le crochet $[X, Y] = X$; nous la noterons $\mathscr{G}_{\mathbb{R}}$.

(*) Le groupe affine complexe $G_{\mathbb{C}}$ est le groupe des transformations de $\mathbb{C}$ ayant la forme :

$$z \to uz + v \quad / \quad (u, v) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$$

Quand on le voit comme un groupe réel, son algèbre est engendrée par quatre vecteurs X_1, X_2, Y_1, Y_2 et les crochets

$$[X_1, Y_1] = X_1 \quad [X_2, Y_1] = X_2 \quad [X_1, Y_2] = X_2 \quad [X_2, Y_2] = -X_1$$

$$[X_1, X_2] = 0 \qquad [Y_1, Y_2] = 0.$$

Nous noterons cette algèbre $\mathscr{G}_{\mathbb{C}}$.

(*) Soit $\alpha \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$; notons $\Re(\alpha)$ et $\Im(\alpha)$ ses parties réelle et imaginaire. Soit $\mathscr{G}_\alpha$ l'algèbre de dimension 3 dont une base X_1, X_2, Y vérifie :

$$[X_1, Y] = \Re(\alpha)X_1 + \Im(\alpha)X_2 \qquad [X_2, Y] = -\Im(\alpha)X_1 + \Re(\alpha)X_2$$

$$[X_1, X_2] = 0.$$

Puisque $\mathscr{G}_\alpha$ a un centre trivial, il existe un unique groupe de Lie G_α à centre trivial dont l'algèbre est $\mathscr{G}_\alpha$. Bien que ceci ne nous soit d'aucune utilité dans la suite, nous remarquons que deux groupes G_α et G_β sont isomorphes si et seulement si l'un des nombres $\alpha/\beta, \alpha\beta$ est réel. De plus, G_α est simplement connexe si et seulement si α n'est pas imaginaire pur. Le revêtement universel de G_α est le produit semi-direct $\mathbb{C} \rtimes \mathbb{R}$ où $\mathbb{R}$ agit sur $\mathbb{C}$ par :

$$(z, t) \to e^{t\alpha} z.$$

Remarque. Comme les groupes $G_{\mathbb{R}}, G_{\mathbb{C}}$ et G_α sont à centre trivial, si G est l'un de ces groupes et si H est un groupe connexe ayant la même algèbre que G, H est un revêtement de G. Une première preuve de l'utilité de ces groupes (ou plutôt de leurs algèbres) est le

Lemme 1. *Soit $\mathscr{G}$ une algèbre résoluble. Les énoncés suivants sont équivalents:*

1. *$\mathscr{G}$ est non nilpotente.*
2. *$\mathscr{G}$ a pour quotient l'une des algèbres $\mathscr{G}_{\mathbb{R}}, \mathscr{G}_{\mathbb{C}}$ ou $\mathscr{G}_\alpha$.*

Preuve. Il est clair que le second point implique le premier. Nous montrons la réciproque. Nous admettrons de nombreux faits classiques sur les algèbres de Lie résolubles et leurs représentations ; ceux-ci se trouvent par exemple dans [Bo].

Soient $\mathscr{G}'$ et $\mathscr{G}''$ les deux premières algèbres dérivées de $\mathscr{G}$. Si $\mathscr{G}$ n'est pas nilpotente, $\mathscr{G}/\mathscr{G}''$ n'est pas nilpotente, aussi on peut se ramener à $\mathscr{G}'' = \{0\}$.

Notons τ la représentation adjointe de $\mathscr{G}/\mathscr{G}'$ dans l'algèbre $\mathrm{Der}(\mathscr{G}')$ des dérivations de $\mathscr{G}'$. Nous remarquons que tout sous-espace vectoriel de $\mathscr{G}'$ stable par τ est un idéal de $\mathscr{G}$, ce qui résulte trivialement de la définition de τ. Par ailleurs, comme τ n'est pas nilpotente, il existe un sous-espace stable (peut-être nul) $\mathscr{T}$ tel que τ soit irréductible sur $\mathscr{G}'/\mathscr{T}$. En quotientant par l'idéal $\mathscr{T}$, on s'est ramené à τ irréductible.

Nous notons qu'il existe $\widetilde{Y} \in \mathscr{G}/\mathscr{G}'$ tel que $\tau(\widetilde{Y})$ soit un automorphisme *inversible* de l'espace vectoriel $\mathscr{G}'$. Ceci résulte de la classification des représentations irréductibles des algèbres abéliennes dans les espaces réels ; selon cette classification, τ a la forme $\tau_0 \circ \pi$ où π est une projection de $\mathscr{G}/\mathscr{G}'$ sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et τ_0 est l'une des trois représentations

$$\tau_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathrm{Der}(\mathbb{R}), (x, y) \to xy$$

ou

$$\tau_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathrm{Der}\,(\mathbb{C}), (u, v) \to uv$$

ou

$$\tau_\alpha(\alpha \in \mathbb{C} - \mathbb{R}) : \mathbb{R} \to \mathrm{Der}\,(\mathbb{C}), (x, z) \to x\alpha z.$$

Pour obtenir $\widetilde{Y}$, il suffit de le prendre hors de $\mathrm{Ker}(\pi)$.

Soit $\widetilde{Z_1}, \ldots, \widetilde{Z_n}$ une base du noyau de π ; soient $Y, Z_1, \ldots, Z_n$ des éléments de $\mathscr{G}$ se projetant sur $\widetilde{Y}, \widetilde{Z_1}, \ldots, \widetilde{Z_n}$ dans $\mathscr{G}/\mathscr{G}'$. Par définition de $\mathscr{G}'$, on a pour tout indice i

$$[Y, Z_i] \overset{\text{déf}}{=} X_i \in \mathscr{G}'.$$

Par construction de Y, il existe $T_i \in \mathscr{G}'$ tel que $[Y, T_i] = X_i$, et en remplaçant Z_i par $Z_i - T_i$ (qui est également un représentant de $\widetilde{Z_i}$) on se ramène à $[Y, Z_i] = 0$. L'identité de Jacobi implique alors pour tout $U \in \mathscr{G}$:

$$[[U, Z_i], Y] = \underbrace{[[U, Y], Z_i]}_{\in[\mathscr{G}', Z_i]} + \underbrace{[U, [Z_i, Y]]}_{=[U,0]} = 0.$$

Comme $\mathrm{ad}(Y)$ est inversible sur $\mathscr{G}'$, ceci implique que $[U, Z_i] = 0$, ce qui prouve que les Z_i engendrent un idéal de $\mathscr{G}$. En quotientant, on s'est ramené à τ *fidèle* (= sans noyau). La classification précédemment citée implique que τ est l'une des représentations $\tau_{\mathbb{R}}, \tau_{\mathbb{C}}$ ou τ_α, et la construction des algèbres correspondantes termine la preuve. □

Du lemme précédent découle la

Proposition 2. *Si G est résoluble non nilpotent, il a un quotient $G_{\mathbb{R}}, G_{\mathbb{C}}$ ou G_α.*

Preuve. Nous nous ramenons au lemme 1 par un raisonnement en trois points. Soient H l'un des groupes $G_{\mathbb{R}}, G_{\mathbb{C}}$ ou G_α, $\mathscr{H}$ son algèbre, $\widetilde{G}$ le revêtement universel de G :

1. Si G a H pour quotient, $\mathscr{G}$ a $\mathscr{H}$ pour quotient.
2. Si $\mathscr{G}$ a $\mathscr{H}$ pour quotient, $\widetilde{G}$ a H pour quotient.
3. Si $\widetilde{G}$ a H pour quotient, G a H pour quotient.

Le point (1) est trivial. Nous montrons le point (2). Il n'est pas trivial à cause d'un problème technique : à un quotient $\mathscr{G}/\mathscr{N}$ ne correspond un quotient G/N que *si le groupe N tangent à $\mathscr{N}$ est fermé dans G*. Toutefois, dans notre situation, G est simplement connexe et on peut utiliser un résultat de [Mo] :

Proposition. *Soient A un groupe de Lie simplement connexe, B un sous-groupe normal connexe. Alors, B est un sous-groupe fermé de A.*

Ceci prouve le point (2). Nous montrons le point (3). Comme H a un centre trivial, H est un quotient de $\widetilde{G}/Z$ où Z est le centre de $\widetilde{G}$; comme $\widetilde{G}$ est un revêtement de G, G admet $\widetilde{G}/Z$ pour quotient : ceci prouve le point (3). □

Ce qui précède suffit déjà pour obtenir le

Théorème A. *Si G est résoluble et $\chi(M) > 0$, il existe une action continue et sans point fixe de G sur M si et seulement si G a pour quotient $G_{\mathbb{R}}, G_{\mathbb{C}}$ ou G_α.*

Démonstration. Selon la proposition 2, ou bien G a pour quotient $G_{\mathbb{R}}, G_{\mathbb{C}}$ ou G_α, ou bien G est nilpotent. Si G est nilpotent, son action a un point fixe par le théorème de Plante. Si G a pour quotient G_0 l'un des groupes considérés, toute action sans point fixe de G_0 induit une action sans point fixe de G. Plante a construit des actions sans point fixe de $G_{\mathbb{R}}$ et G_α sur les trois surfaces de caractéristique > 0 ; nous construisons des actions de $G_{\mathbb{C}}$ sans point fixe sur ces surfaces, ce qui achève la preuve.

La surface M peut être le disque à bord, la sphère ou le plan projectif réel. Nous commençons par faire agir $G_{\mathbb{C}}$ sur le disque à bord. Pour cela, nous le voyons comme le produit semi-direct $\mathbb{C} \rtimes \mathbb{C}^*$ avec la loi

$$(u, v).(u', v') \to (u + vu', vv').$$

Il existe une action naturelle de G sur $\mathbb{C}$:

$$((u, v), z) \to u + vz.$$

Cette action peut être transportée à l'intérieur d' un disque ouvert D par le difféomorphisme

$$\mathbb{C} \to D, \quad z \to \frac{\arctan(|z|)}{|z|} z.$$

L'action ainsi définie sur l'intérieur de D n'a pas de point fixe et se prolonge au bord de D en une action par rotations :

$$((u, v), z) \to \frac{v}{|v|} z.$$

Soient D_1 et D_2 deux copies de D muni de cette action ; pour tout complexe θ de module 1, l'application

$$\phi_\theta : \quad \partial D_1 \to \partial D_2, \quad z \to \theta z$$

commute avec l'action de G sur ∂D_1 et ∂D_2, et en recollant D_1 à D_2 par ϕ_θ on obtient donc une action de G sur $\mathbb{S}^2$. De plus, dans le cas particulier où $\theta = -1$, on vérifie sans peine que l'action obtenue passe au quotient sur $P\mathbb{R}^2$. □

Nous passons à l'étude du théorème B.

2. $\chi < 0$, G Quelconque.

Dans cette partie, nous supposons que M est l'une des surfaces à caractéristique négative. Celles-ci ont fait l'objet d'une étude poussée, et nous bénéficions des résultats suivants ([Pl1], [Pl2], [ET]) :

1. (Plante). Il existe une action sans point fixe de $G_{\mathbb{R}}$ sur M.
2. (Epstein-Thurston). Si G est résoluble et agit effectivement sur M, son troisième groupe dérivé est nul.
3. (Plante). Si G agit sans point fixe sur M, G est résoluble (ceci découle en fait de la preuve du théorème C de [Pl2]).

Grâce à ces résultats, le théorème B se ramène à l'énoncé suivant :

Théorème B'. *Soit G un groupe de Lie résoluble dont le troisième groupe dérivé est nul. Si G agit sans point fixe sur M, G a $G_{\mathbb{R}}$ pour quotient.*

Nous nous plaçons dans ce cadre, et nous montrons d'abord que si le deuxième groupe dérivé de G est non nul, G a $G_{\mathbb{R}}$ pour quotient. En effet, comme l'action est effective, si le deuxième groupe dérivé de G est non nul il existe une orbite sur laquelle ce deuxième groupe dérivé agit non trivialement. Cette orbite a la dimension 1 ou 2. Le cas de dimension 1 est exclu en raison d'un résultat de S. Lie (voir [Pl1]) :

Théorème. *Les seuls groupes de Lie pouvant agir effectivement sur la droite réelle sont* $\mathbb{R}, G_{\mathbb{R}}$ *et le revêtement universel de* $PSL(2,\mathbb{R})$ *; les seuls groupes de Lie pouvant agir effectivement sur le cercle sont* $\mathbb{R}$ *et les revêtements finis de* $PSL(2,\mathbb{R})$.

Il se trouve que Mostow a classifié dans sa thèse toutes les orbites de dimension 2 de tous les groupes de Lie. En parcourant la liste[1] des cas possibles, nous voyons que l'action est forcément de type II.5, III.3, III.4 ou III.7. Les groupes correspondant à ces quatre situations ont tous $G_{\mathbb{R}}$ pour quotient.

Nous pouvons donc considérer que le deuxième groupe dérivé de G est nul. Nous pouvons enfin passer au revêtement universel de G ; on a alors le

Lemme 3. *Si G est simplement connexe, résoluble et a un second groupe dérivé nul, il existe des sous-groupes A et N de G ayant les propriétés suivantes :*

1. *A est abélien, N est nilpotent, G est un produit semi-direct $A \rtimes N$.*
2. *Pour tout quotient nilpotent G/H de G, A est inclus dans H.*

Preuve. L'idée est voisine de celle employée au lemme 1. Nous décomposons $\mathscr{G}'$ en deux idéaux $\mathscr{T}$ et $\mathscr{J}$, sur lesquels la représentation τ adjointe de $\mathscr{G}/\mathscr{G}'$ est respectivement nilpotente et sans partie nilpotente. Il existe un $\widetilde{Y} \in \mathscr{G}/\mathscr{G}'$ tel que $\tau(\widetilde{Y})$ soit inversible sur $\mathscr{J}$. Soient $\widetilde{Z}_1, \ldots, \widetilde{Z}_k$ des champs qui complètent $\widetilde{Y}$ en une base de $\mathscr{G}/\mathscr{G}'$ et $Y, Z_1, \ldots, Z_k$ des éléments de $\mathscr{G}$ se projetant sur $\widetilde{Y}, \widetilde{Z}_1, \ldots, \widetilde{Z}_k$. Posons $[Y, Z_i] = A_i + B_i$ où $A_i \in \mathscr{T}$ et $B_i \in \mathscr{J}$. Comme au lemme 1, on peut trouver $T_i \in \mathscr{J}$ tel que $[Y, T_i] = B_i$, et en remplaçant Z_i par $Z_i - T_i$, on se ramène à $[Y, Z_i] = A_i \in \mathscr{T}$, ce qui implique que $[Z_i, Z_j] \in \mathscr{T}$ par l'identité de Jacobi. On peut alors prendre pour A et N les sous-groupes tangents respectivement à $\mathscr{J}$ et à l'algèbre engendrée par $\mathscr{T}$, Y et les Z_i. La propriété (1) résulte de ce que A est normal dans G, et la propriété (2) de la définition de J comme le “lieu” de la partie non nilpotente de $\mathrm{ad}(\mathscr{G})$. □

Nous pouvons maintenant démontrer le

Théorème B. *Quand $\chi(M) < 0$, le groupe de Lie connexe G peut agir sans point fixe sur M si et seulement si G admet $G_{\mathbb{R}}$ comme quotient.*

Démonstration. Avec les notations du lemme 3, nous pouvons supposer que G a la forme $A \rtimes N$, les autres cas ayant déjà été traités. Selon le théorème de Plante, l'action de N sur M a au moins un point fixe car N est nilpotent. Soit m un tel point et soit A_0 le stabilisateur de m dans A. Comme l'action n'a pas de point fixe global, A_0 est de codimension au moins 1 dans A. Par ailleurs, cette codimension est au plus $2 = \dim(M)$. Nous montrons que :

[1] Pour faciliter le travail du lecteur, nous avons joint cette liste en appendice.

1. S'il est possible de trouver m tel que A_0 soit de codimension 1 dans A, alors G admet $G_{\mathbb{R}}$ pour quotient.
2. Si pour tout m, A_0 est de codimension 2 dans A, alors $\chi(M) \geq 0$ (ce qui est absurde ; ce cas est donc impossible).

Ceci achève la preuve.

1. Puisque m est stable par A_0 et N, on a pour tout $n \in N$ $nA_0n^{-1}m = m$, ce qui montre que A_0 est un sous-groupe normal de G. Le quotient H est un produit semi-direct $\mathbb{R} \rtimes N$. En explicitant la structure de produit semi-direct, on voit qu'il existe un morphisme ϕ de N dans $\mathbb{R}_+^*$ tel que H ait la loi

$$(t, n)(t', n') = (t + \phi(n)t', nn')$$

et comme H est non nilpotent en vertu du lemme 3, le morphisme ϕ est non nul. En quotientant H par $\mathrm{Ker}(\phi)$, on obtient le groupe $G_{\mathbb{R}}$.
2. Comme précédemment, A_0 est normal dans G et on peut quotienter par A_0 pour obtenir un groupe H de la forme $\mathbb{R}^2 \rtimes N$ qui agit encore transitivement sur la G-orbite θ de m. Dans la liste de [Mo], cette situation correspond aux cas II.12 et II.13, qui décrivent les actions affines de G_α et $G_{\mathbb{C}}$ sur $\mathbb{C}$. Dans une carte globale de θ où x_1, x_2 sont des coordonnées linéaires bien choisies, on peut poser

$$\frac{\partial}{\partial R} = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \text{et} \frac{\partial}{\partial \omega} = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

L'action de N se fait alors *via* les champs fondamentaux suivants :

cas de G_α :

(1) $$Y = \Re(\alpha)\frac{\partial}{\partial R} + \Im(\alpha)\frac{\partial}{\partial \omega}.$$

cas de $G_{\mathbb{C}}$:

(2) $$Y_1 = \frac{\partial}{\partial R} \quad \text{et} \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial \omega}.$$

De ceci, il découle que l'action de N n'a que des points fixes isolés. Par chirurgie, nous allons les enlever en modifiant la surface M et l'action de N. Soient D_1 et D_2, les deux disques de centre m et de rayon respectif 1 et 2 dans le système de coordonnées choisi. Nous privons $\mathbb{C}$ de l'intérieur de D_1, et dans les équations (1) et (2) nous remplaçons $\frac{\partial}{\partial R}$ par $(R-1)\frac{\partial}{\partial R}$ à l'intérieur de D_2. On vérifie sans peine que les nouveaux champs Y, Y_1, Y_2 ainsi obtenus sont encore uniquement intégrables et complets. Par cette modification, on a enlevé le point fixe m de l'action de N.

Finalement, si n était le nombre initial de points fixes, on obtient une action sans point fixe de N sur une variété M_0 égale à M privée de n disques ouverts. Par conséquent, M_0 est connexe, son bord est la réunion du bord de M et des n cercles bordant les disques enlevés, et sa caractéristique est $\chi(M) - n$. Or, comme N agit sans point fixe sur M_0, le théorème de Plante implique $\chi(M_0) = 0$ ce qui prouve que $\chi(M) = n \geq 0$. □

Nous étudions enfin le théorème C.

3. $\chi \geq 0$, G semi-simple

Nous considérons que G est semi-simple et agit effectivement et sans point fixe sur M. En vue du théorème B, nous pouvons supposer $\chi(M) \geq 0$. Nous allons utiliser un argument simple : ou bien l'action de G est transitive, ou bien elle présente des orbites de dimension 1. En effet, une orbite de dimension 2 est ouverte, donc une action sans orbites de dimension 1 et sans point fixe réalise une partition de M en ouverts. Par connexité de M, cette partition est donc constituée d'une seule orbite.

Maintenant, selon un théorème de Lie déjà cité, le seul groupe semi-simple agissant effectivement en dimension 1 est (à revêtement près) $PSL(2, \mathbb{R})$. On a donc deux possibilités : ou bien G a $PSL(2, \mathbb{R})$ pour quotient, ou bien G agit transitivement sur M.

De la liste de [Mo], il découle que les actions transitives sont les actions usuelles de $PSO(3)$, $PSL(3, \mathbb{R})$ et $PSL(2, \mathbb{C})$ sur la sphère et le plan projectif, ainsi que l'action produit des revêtements finis de $PSL(2, \mathbb{R}) \times PSL(2, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Par ailleurs, si l'action de G n'est pas transitive, il existe une orbite de dimension 1 sur laquelle l'action transite par un quotient revêtement de $PSL(2, \mathbb{R})$. Inversement, l'existence d'un tel quotient implique que G peut agir sur M sans point fixe (voir la dernière partie de [Pl1]). Nous avons donc le

Théorème C. *Si G est semi-simple, il existe une action sans point fixe de G sur M si et seulement si $\chi(M) \geq 0$ et*

1. *G a $PSL(2, \mathbb{R})$ pour quotient, ou*
2. *$\chi(M) > 0$, M est sans bord et G a $PSL(2, \mathbb{C})$, $PSL(3, \mathbb{R})$ ou $PSO(3)$ pour quotient.*

Remarque. Si G n'a aucun des quotients mentionnés au théorème précédent, l'action de G sur M est forcément triviale (elle n'a ni orbites de dimension 1, ni orbites de dimension 2). Autrement dit, si on écarte les dynamiques triviales, l'étude des actions sans point fixe de G sur une surface compacte se ramène aux actions de $PSL(2, \mathbb{R})$ et de ses revêtements sur la sphère. Dans le cas lisse ou analytique, Mistumatsu en a donné dans [Mi] une classification très intéressante.

4. Conclusion

Les théorèmes A, B et C ont pour conséquence le

Théorème Principal. *Le groupe de Lie G possède une action continue et sans point fixe sur la surface compacte M dont la caractéristique d'Euler-Poincaré est $\chi(M)$ si et seulement si G possède pour quotient l'un des groupes suivants :*

1. *Cas où $\chi < 0$: $G_{\mathbb{R}}$.*
2. *Cas où $\chi = 0$: $\mathbb{S}^1$ ou $PSL(2,\mathbb{R})$.*
3. *Cas où $\chi > 0$: $G_{\mathbb{R}}, G_{\mathbb{C}}$ ou G_α ;*
   également $PSO(3)$, $PSL(3,\mathbb{R})$ et $PSL(2,\mathbb{C})$ si M est sans bord.

Démonstration. Le "si" est clair ; nous montrons le "seulement si". Le cas 1 est celui du théorème B. Pour les cas 2 et 3, on peut considérer que G est simplement connexe en le remplaçant au besoin par son revêtement universel, ce qui permet de lui donner la forme $R \rtimes S$ où R est résoluble et S semi-simple (décomposition de Levi). Deux cas se présentent alors :

a. S peut agir sans point fixe sur M : alors, G vérifie l'énoncé du théorème principal en vertu du théorème C.
b. S ne peut pas agir sans point fixe sur M : alors, S agit trivialement sur M, et l'action de G transite par le quotient G/H, avec H le sous-groupe normal fermé engendré par S. Ce quotient est résoluble et tout quotient résoluble de G transite par lui ; il suffit de lui appliquer le théorème A. □

Dans [Pl1], les trois directions de recherche suivantes sont proposées :

(1) Si G est à croissance exponentielle, agit-il sans point fixe sur toute surface compacte M telle que $\chi(M) \geq 0$? Que se passe-t-il dans le cas particulier où G est résoluble ?
(2) Si G est résoluble et si $\mathrm{ad}(X)$ a une valeur propre réelle non nulle pour un certain X dans l'algèbre de Lie de G, est-ce que G peut agir sans point fixe sur toute surface compacte ?
(3) Si G est à croissance polynomiale, est-ce que toute action de G sur une surface compacte telle que $\chi(M) < 0$ a un point fixe ?

La classification complète du théorème principal permet de répondre à ces trois questions. La question (1) reçoit une réponse positive pour les groupes résolubles (notons que la croissance du groupe n'intervient pas : seule compte la "non-nilpotence"). Cependant, la réponse est fausse en général : un contre-exemple est $PSL(3,\mathbb{C})$. Nous allons maintenant répondre négativement à la question (2) ; il faut exhiber un groupe dont l'algèbre contient des vecteurs X, Y tels que $[X, Y] = X$, mais tel que tout choix de tels X, Y présente l'une des deux obstructions suivantes :

(a) X appartient à $\mathscr{G}''$, ou
(b) X est vecteur propre d'un $\mathrm{ad}(Y')$ pour une valeur propre non réelle.

L'exemple le plus simple d'obstruction de type (b) est $G_{\mathbb{C}}$; l'exemple le plus simple de type (a) est le groupe de dimension 4 dont l'algèbre est engendrée par des vecteurs X, Y, Z, T avec les crochets :

$$[X, Y] = Z \qquad [X, T] = X + Y \qquad [Y, T] = -X + Y$$
$$[X, Z] = 0 \qquad [Y, Z] = 0 \qquad [Z, T] = 2Z.$$

Enfin, selon [Je], un groupe à croissance polynomiale ne peut avoir $G_{\mathbb{R}}$ comme quotient ; par conséquent, la question (3) a une réponse positive.

⋄◇♢◇⋄

Crédits. Ce travail est tiré de ma thèse, réalisée sous la direction d'A. El Kacimi. Durant sa rédaction, A. Verjovski et Y. Hantout m'ont prêté une attention précieuse ; E. Ghys m'a suggéré plusieurs améliorations. Je les remercie tous très sincèrement.

⋄◇♢◇⋄

Appendice: la classification de Mostow

Nous donnons ici la classification des actions transitives de groupes de Lie sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{S}^2$, telle qu'elle est écrite dans [Mo]. Nous ne prétendons à aucune originalité pour cet appendice, et nous reprenons la forme exacte de [Mo], §10 à quelques notations près. (Cette forme est d'ailleurs elle-même inspirée d'un travail plus ancien d'un autre auteur : *cf. op. cit.*). $\mathbb{R}^2$ est muni de coordonnées linéaires x, y et on note $X = \frac{\partial}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial}{\partial y}$. Nous décrivons la structure locale de l'action à l'aide d'une base de champs fondamentaux ; il est alors facile de calculer le groupe correspondant : par exemple, pour la référence I.2 une base de champs fondamentaux est $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial x}$, on calcule que $[X_1, X_2] = X_1$ et donc $G = G_{\mathbb{R}}$. Nous indiquons en fin de ligne tous les quotients de G ayant l'une des formes $G_{\mathbb{R}}$, $G_{\mathbb{C}}$, G_α, $PSL(2,\mathbb{R})$, $PSL(2,\mathbb{C})$, $PSL(3,\mathbb{R})$, $PSO(3)$. Les actions ont lieu sur $\mathbb{R}^2$ sauf II.14, II.15 et IV.3 sur $\mathbb{S}^2$.

I.1.	X, Y	
I.2.	$X, xX + Y$	$G_{\mathbb{R}}$
I.3.	$X, Y, xX + yY$	$G_{\mathbb{R}}$
II.1.	$X, Y, xX + (x + y)Y$	$G_{\mathbb{R}}$
II.2.	$X, xX + Y, x^2X + 2xY$	$PSL(2,\mathbb{R})$

II.3. $X, w(y)X, \ldots, w^{s-1}(y)X, Y$ [2]

II.4. $X, Y, xX + yY, x^2X + 2xyY, xY, x^2Y$ — $PSL(2, \mathbb{R})$

II.5. $X, Y, xX + yY, xY, x^2Y, \ldots, x^sY$ — $G_{\mathbb{R}}$

II.6. X, Y, xX, x^2X — $PSL(2, \mathbb{R})$

II.7. $X, Y, (c+1)xX + (c-1)yY$ — $G_{\mathbb{R}}$

II.8. $X + y(xX + yY), Y + x(xX + yY), xX - yY$ — $PSL(2, \mathbb{R})$

II.9. X, xX, x^2X, Y, yY, y^2Y — $PSL(2, \mathbb{R})$

II.10. X, xX, x^2X, Y, yY — $G_{\mathbb{R}}, PSL(2, \mathbb{R})$

II.11. X, xX, y, yY — $G_{\mathbb{R}}$

II.12. $X, Y, yX - xY + \gamma(xX + yY)$ — $G_{\gamma+\sqrt{-1}}$

II.13. $X, Y, xX + yY, xY - yX$ — $G_{\mathbb{C}}$

II.14. $X, Y, xX + yY, xY - yX, (x^2 - y^2)X + 2xyY, 2xyX + (y^2 - x^2)Y$ — $PSL(2, \mathbb{C})$

II.15. $X + x(xX + yY), Y + y(xX + yY), yX - xY$ — $PSO(3)$

II.16. $X - x(xX + yY), Y - y(xX + yY), yX - xY$ — $PSL(2, \mathbb{R})$

III.1. $X, Y, xY, 2xX + yY, x(xX + yY)$ — $PSL(2, \mathbb{R})$

III.2. $X, Y, xY, \ldots, x^sY, 2xX + syY, x(xX + syY)$ — $PSL(2, \mathbb{R})$

III.3. $X, Y, xY, \ldots, x^sY, xX + ryY$ — $G_{\mathbb{R}}$

III.4. $X, Y, xY, \ldots, x^sY, xX + (s+1)yY + x^{s+1}Y$ — $G_{\mathbb{R}}$

III.5. $X, w(x)Y, \ldots, w^{r-1}(x)Y, yY$ [3]

III.6. $X, Y, xX, xY + \frac{1}{2}x^2X$ — $PSL(2, \mathbb{R})$

III.7. $X, Y, xX, yY, xY, \ldots, x^sY$ — $G_{\mathbb{R}}$

III.8. $X, Y, xX, yY, xY, \ldots, x^sY, x(xX + yY)$ — $PSL(2, \mathbb{R})$

IV.1. $X, Y, yX, xY, xX - yY$ — $PSL(2, \mathbb{R})$

IV.2. X, Y, xX, yX, xY, yY — $PSL(2, \mathbb{R})$

IV.3. $X, Y, xX, yY, xY, yX, x(xX + yY), y(xX + yY)$ — $PSL(3, \mathbb{R})$

⋄◇♢◇⋄

Bibliographie

[Be] Belliart, M., Actions sans points fixes sur les surfaces compactes, Pub. IRMA, Lille vol. **34** (1994).

[Bo] Bourbaki, N., Groupes et algèbres de Lie, Masson, éditeur.

[ET] Epstein, D. et Thurston, W., Transformation groups and natural bundles, Proc. London Math. Soc. (3) **38** (1979), 219-236.

[Je] Jenkins, J.W., Growth of connected locally compact groupsm J. Funct. Anal. **12** (1973), 113-127.

[Mi] Mistumatsu, Y., $SL(2, \mathbb{R})$-actions on surfaces, Prépublication de l'E.N.S. Lyon (1994).

[Mo] Mostow, G., The extensibility of local Lie groups of transformations and groups on surfaces, Ann. of Math. **52** (1950), 606-636.

---

[2] w est solution de l'équation différentielle $w^s = a_1 w + \ldots + a^{s-1} w$. Si chaque a_i est nul, G est nilpotent ; sinon, il a un quotient $G_{\mathbb{R}}$ ou G_α.

[3] Même remarque que précédemment ; ici, il y a toujours un quotient $G_{\mathbb{R}}$ à cause du terme en yY.

[Pl1] Plante, J.F., Fixed points of Lie group actions on surfaces, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **6** (1986), 149-161.

[Pl2] Plante, J.F., Lie Algebras of vector fields which vanish at a point, J. London Math. Soc. (2) **38** (1988), 379-384.

[Pl3] Plante, J.F., Elementary zeros of Lie algebras of vector fields, Topology (2) **30** (1991), 215-222.

[Po] Poincaré, H., Sur les courbes définies par une équation différentielle, J. Math. Pures Appl. (4) **1** (1885), 167-244.