Cohomologie des groupes discrets à valeurs dans un Fréchet

AZIZ EL KACIMI ALAOUI

(Novembre 2024)

Ce texte a pour but : i) de recencer quelques questions sur le calcul de la cohomologie d'un groupe discret Γ à valeurs dans un espace de Fréchet, qui sera essentiellement l'espace des fonctions (ou, plus généralement, celui des sections d'un fibré vectoriel) de classe C^k (avec $0 \leq k \leq \infty$) sur une variété différentiable M munie d'une action de Γ ; ii) d'étudier, sur des exemples, le cas où Γ est le groupe $\mathbb{Z}$ engendré par un difféomorphisme γ de M ; celui-ci se ramène à la résolution de l'équation $f - f \circ \gamma = g$ dite *équation cohomologique discrète* associée au système dynamique discret (M, γ) ; iii) préciser les liens de celle-ci avec l'*équation cohomologique continue* $X \cdot f = g$ où X est un champ de vecteurs non singulier sur M. Des questions plus ou moins proches sont aussi soulevées.

0. Préliminaires et notations

On fixera celles qui seront en commun à tous les paragraphes et qu'on rencontrera tout le long de ce texte. Au fur et à mesure des besoins, on précisera leurs propriétés supplémentaires et leurs particularités. Et bien entendu, on en introduira d'autres.

– M est une variété différentiable (avec toutes les bonnes propriétés : paracompacte...) et qu'on supposera toujours connexe.

– Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et $U \subset M$ ouvert, $C^k(U)$ est l'espace des fonctions $U \longrightarrow \mathbb{K}$ (où $\mathbb{K}$ est le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de classe C^k ; $C_0^k(U)$ est le sous-espace de $C^k(U)$ dont les éléments sont à support compact dans U. (Lorsque $U = M$ et M compacte, on a $C_0^k(M) = C^k(M)$.) Pour $k = 0$, les espaces $C^0(U)$ et $C_0^0(U)$ seront notés simplement $C(U)$ et $C_0(U)$.

– Soient $E \longrightarrow M$ un fibré vectoriel (sur le corps $\mathbb{K}$), U un ouvert de M et $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Alors $C^k(U, E)$ sera l'espace des sections de E au-dessus de U ; si $U = M$, on le notera simplement $C^\infty(E)$.

– On munit $C^k(U)$ (plus généralement $C^k(U, E)$) de la C^k-topologie $\mathcal{T}_k$ de la convergence uniforme sur les compacts des dérivées d'ordre s (avec $0 \leq s \leq k$). (Sur un ouvert d'un espace euclidien, on voit clairement comment ça se passe pour $s \geq 1$; sur une variété quelconque, on utilise les cartes locales.) Elle fait de $C^k(U)$ et de $C^k(U, E)$ des espaces de Fréchet ; ce sont des Banach si $k < +\infty$ et $U = M$ compacte : $\mathcal{T}_k$ peut être définie à l'aide d'une norme complète.

– Γ est un groupe (dénombrable) discret. Sauf mention du contraire, une action de Γ sur M sera toujours donnée par un morphisme-représentation $\rho : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Diff}(M)$ (qu'on supposera injectif) où $\mathrm{Diff}(M)$ est le groupe des difféomorphismes C^∞ de M. Celle-ci donne une action de Γ sur A (où A est l'un des espaces $C(M)$, $C^k(M)$ ou $C^\infty(M)$) : $(\gamma, f) \in \Gamma \times A \longmapsto f \circ \gamma^{-1} \in A$. Une fonction $f \in A$ est dite Γ-*invariante* si elle vérifie $f \circ \gamma = f$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. (Il suffit en fait qu'elle soit invariante par les éléments d'un système générateurs de Γ.) Les fonctions invariantes forment un sous-espace fermé de A qu'on notera A_Γ (ainsi, ce sera $C_\Gamma(M)$, $C_\Gamma^k(M)$ ou $C_\Gamma^\infty(M)$ pour les espaces considérés).

MSC 2020 : 53C30, 55N30, 58A12, 20J06

– Un fibré vectoriel $\pi : E \longrightarrow M$ est dit Γ-*fibré* s'il existe une représentation de Γ dans le groupe $\mathrm{Aut}(E)$ des automorphiqmes de E. Cela signifie que, pour chaque $\gamma \in \Gamma$, on a un difféomorphisme $\gamma : E \longrightarrow E$ induisant un difféomorphisme (qu'on notera encore) $\gamma : M \longrightarrow M$, tels que : i) pour chaque $x \in M$, γ_x est un isomorphisme de la fibre E_x sur la fibre $E_{\gamma x}$; ii) le diagramme qui suit est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\gamma} & E \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{\gamma} & M \end{array}$$

On a alors une action de Γ sur l'espace $C^k(E)$ des sections de E : $(\gamma \cdot \alpha)(x) = \gamma(\alpha(\gamma^{-1}x))$. Une section α est Γ-*invariante* si elle vérifie $\gamma \cdot \alpha = \alpha$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Et comme pour les fonctions, on a les espaces respectis $C_\Gamma(E)$, $C_\Gamma^k(E)$ ou $C_\Gamma^\infty(E)$... des sections invariantes.

1. Deux types de cohomologie

Pour pouvoir énoncer les problèmes de façon explicite, il est indispensable d'introduire quelques ingrédients essentiels à cet effet. C'est l'objet de ce premier paragraphe.

1.1. Cohomologie d'un groupe discret

Soit A un espace vetoriel sur le corps $\mathbb{K}$ sur lequel Γ agit par automorphismes, et en fait donc un Γ-*module*. L'action d'un élément $\gamma \in \Gamma$ sur $a \in A$ sera notée $\gamma \cdot a$.

Pour tout entier $p \geq 1$ soit $C^p(\Gamma, A)$ l'espace vectoriel des applications de $\Gamma^p = \Gamma \times \cdots \times \Gamma$ dans A ; un élément de $C^p(\Gamma, A)$ est appelé p-*cochaîne* sur Γ à valeurs dans A. Par convention $C^0(\Gamma, A) = A$. On définit une application linéaire $d : C^p(\Gamma, A) \longrightarrow C^{p+1}(\Gamma, A)$ par :

$$\begin{aligned} dc(\gamma_1, \ldots, \gamma_{p+1}) = \gamma_1 \cdot c(\gamma_2, \ldots, \gamma_{p+1}) \\ + \sum_{i=1}^{p} (-1)^i c(\gamma_1, \ldots, \gamma_{i-1}, \gamma_i\gamma_{i+1}, \gamma_{i+2}, \ldots, \gamma_{p+1}) \\ + (-1)^{p+1} c(\gamma_1, \ldots, \gamma_p). \end{aligned} \tag{1}$$

Un élément du noyau $Z^p(\Gamma, A)$ de $d : C^p(\Gamma, A) \longrightarrow C^{p+1}(\Gamma, A)$ est appelé *cocycle* et un élément de l'image $B^r(\Gamma, A)$ de $d : C^{p-1}(\Gamma, A) \longrightarrow C^p(\Gamma, A)$ *cobord*. Il n'est pas difficile de montrer que l'opérateur d vérifie $d^2 = 0$; il en découle donc que $B^p(\Gamma, A)$ est un sous-espace de $Z^p(\Gamma, A)$. Les quotients $H^p(\Gamma, A) = Z^p(\Gamma, A)/B^p(\Gamma, A)$ pour $p \in \mathbb{N}$ sont les espaces vectoriels de *cohomologie* de Γ à valeurs dans le Γ-module A.

1. Pour un élément c de $C^0(\Gamma, A)$ (qui est juste un vecteur a de A), on a $dc(\gamma) = \gamma \cdot a - a$. Donc $H^0(\Gamma, A)$ est le sous-espace A_Γ.

2. Si Γ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ et est engendré par un automorphisme γ de A, on montre que :

$$H^p(\Gamma, A) = \begin{cases} A_\Gamma & \text{pour } p = 0 \\ A/\langle a - \gamma \cdot a\rangle & \text{if } p = 1 \\ 0 & \text{pour } p \geq 2 \end{cases} \tag{2}$$

où $\langle a - \gamma \cdot a\rangle$ est le sous-espace vectoriel de A engendré par les éléments de la forme $a - \gamma \cdot a$ avec a variant dans A.

3. Supposons Γ fini. Pour $p \geq 1$, définissons l'application $C^p(\Gamma, A) \xrightarrow{h^p} C^{p-1}(\Gamma, A)$ par :

$$h^p(c)(\gamma_1, \cdots, \gamma_{p-1}) = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma \cdot c(\gamma^{-1}, \gamma_1, \cdots, \gamma_{p-1}).$$

(Bien entendu h^0 est l'application nulle.) Par un calcul facile mais un peu lourd et long, on montre que :

$$\begin{cases} h^1 \circ d = \text{identité de } C^0(\Gamma, A) \\ \\ d \circ h^p + h^{p+1} \circ d = \text{identité de } C^p(\Gamma, A) \text{ pour } p \geq 1 \end{cases}$$

autrement dit, la famille d'applications $\{h^p\}_p$ est une *homotopie* entre le complexe différentiel $(C^*(\Gamma, A), d)$ et le complexe différentiel trivial. Il en résulte que $H^p(\Gamma, A) = 0$ pour $p \geq 1$.

1.2. Cohomologie de Čech

Rappelons qu'un *préfaisceau* $\mathcal{A}$ d'espaces vectoriels sur sur M est la donnée, pour chaque ouvert $U \subset M$, d'un espace vectoriel $\mathcal{A}(U)$ et, pour chaque paire d'ouverts $U \subset V$, d'une application linéaire $r_U^V : \mathcal{A}(V) \longrightarrow \mathcal{A}(U)$, dite *restriction*, de telle sorte que r_U^U = identité de $\mathcal{A}(U)$ et, pour $U \subset V \subset W$ on ait $r_U^W = r_U^V \circ r_V^W$. Un élément de $\mathcal{A}(U)$ est appelé *section* de $\mathcal{A}$ au-dessus de U ; c'est une *section globale* pour $U = M$.

Un préfaisceau $\mathcal{A}$ est un *faisceau* si, pour tout recouvrement $\{U_i\}$ de M et toute famille de sections $s_i \in \mathcal{A}(U_i)$ telle que $s_i = s_j$ sur $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, il existe une (unique) section globale $s \in \mathcal{A}(M)$ dont la restriction à U_i soit s_i.

Pour tout $x \in M$, la limite inductive $\mathcal{A}_x$ des espaces vectoriels $\mathcal{A}(U)$, prise sur une famille filtrante d'ouverts U contenant x, est un espace vectoriel appelée *fibre* de $\mathcal{A}$ en x.

Un *morphisme de faisceaux* $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ est la donnée, pour chaque ouvert U, d'une application linéaire $\Phi_U : \mathcal{A}(U) \longrightarrow \mathcal{B}(U)$ telle que, pour $U \subset V$, le diagramme qui suit est commutatif.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(V) & \xrightarrow{\Phi_V} & \mathcal{B}(V) \\ r_U^V \downarrow & & \downarrow r_U^V \\ \mathcal{A}(U) & \xrightarrow{\Phi_U} & \mathcal{B}(U). \end{array}$$

On a alors la notion de noyau $\ker\Phi$, d'image $\mathrm{Im}\Phi$ et de conoyau $\mathrm{coker}\Phi$ comme usuellement. On dira qu'une suite de faisceaux et de morphismes :

$$\cdots \mathcal{A}_{n-1} \xrightarrow{\Phi_{n-1}} \mathcal{A}_n \xrightarrow{\Phi_n} {}_{n+1} \cdots$$

est *exacte* si, pour tout n, on a $\ker\Phi_n = \mathrm{Im}\Phi_{n-1}$. Toutes les opérations algébriques connues sur les espaces vectoriels (passage au dual, somme directe, produit tensoriel, quotient...) s'étendent naturellement aux faisceaux : $\mathcal{A}^*$, $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, $\mathcal{A}/\mathcal{B}$...

Soient $f : M \longrightarrow M'$ une application continue (entre variétés) et $\mathcal{A}$ un faisceau d'espaces vectoriels sur M. On définit sur M' un faisceau $\mathcal{A}'$ en posant, pour tout ouvert $U' \subset M'$, $\mathcal{A}'(U') = \mathcal{A}(U)$ où $U = f^{-1}(U')$. On dira que $\mathcal{A}'$ est l'*image* du faisceau $\mathcal{A}$ par f.

Soient $\mathcal{A}$ un faisceau d'espaces vectoriels sur M et $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert localement fini de M. Pour tout multi-indice $(i_0, \cdots, i_q)$ dans I, on note $U_{i_0 \cdots i_q}$ l'intersection $U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_q}$ et Σ_q l'ensemble des multi-indices pour lesquels $U_{i_0 \cdots i_q} \neq \emptyset$. Soit $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{A})$

l'ensemble des collections $(f_{i_0\cdots i_q})_{(i_0,\cdots,i_q)\in\Sigma_q}$ où $f_{i_0\cdots i_q}$ est un élément de $\mathcal{A}(U_{i_0\cdots i_q})$ (espace des sections de $\mathcal{A}$ au-dessus de $U_{i_0\cdots i_q}$) ; c'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Un élément f de $C^q(\mathcal{U},\mathcal{A})$ est appelé *q-cochaîne* sur $\mathcal{U}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$. On définit l'opérateur $\delta : C^q(\mathcal{U},\mathcal{A}) \longrightarrow C^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{A})$ par :

$$(\delta f)_{i_0\cdots i_{q+1}} = \sum_{j=0}^{q+1}(-1)^j f_{i_0\cdots\hat{i}_j\cdots i_{q+1}} \tag{3}$$

où $f_{i_0\cdots\hat{i}_j\cdots i_{q+1}}$ est la section $f_{i_0\cdots\hat{i}_j\cdots i_{q+1}}$ restreinte à l'ouvert $U_{i_0\cdots i_{q+1}}$. Par exemple, pour une 0-cochaîne $f=(f_i)$, la 1-cochaîne $\delta f=(f_{ij})$ est donnée par $f_{ij}=f_j-f_i$; si $q=1$ et $f=(f_{ij})$, alors $\delta f=(f_{ijk})$ avec $f_{ijk}=f_{jk}-f_{ik}+f_{ij}$. On peut vérifier que :

$$\delta\circ\delta : C^{q-1}(\mathcal{U},\mathcal{A}) \longrightarrow C^q(\mathcal{U},\mathcal{A}) \longrightarrow C^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{A})$$

est nul. Donc le noyau $Z^q(\mathcal{U},\mathcal{A})$ de $\delta : C^q(\mathcal{U},\mathcal{A}) \longrightarrow C^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{A})$ contient l'image $B^q(\mathcal{U},\mathcal{A})$ de $\delta : C^{q-1}(\mathcal{U},\mathcal{A}) \longrightarrow C^q(\mathcal{U},\mathcal{A})$; le quotient $H^q(\mathcal{U},\mathcal{A}) = Z^q(\mathcal{U},\mathcal{A})/B^q(\mathcal{U},\mathcal{A})$ est le $q^{\text{ème}}$ espace de *cohomologie* du recouvrement $\mathcal{U}$ à coefficients dans le faisceau $\mathcal{A}$.

Si $\mathcal{U}'=\{U'_j\}_{j\in J}$ est un recouvrement ouvert plus *fin* que $\mathcal{U}$, c'est-à-dire, pour tout $j\in J$, il existe $i\in I$ tel que $U'_j\subset U_i$, on a un morphisme restriction $\rho_q : C^q(\mathcal{U},\mathcal{A}) \longrightarrow C^{q+1}(\mathcal{U}',\mathcal{A})$ pour lequel le diagramme qui suit est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} C^q(\mathcal{U},\mathcal{A}) & \stackrel{\delta}{\longrightarrow} & C^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{A}) \\ \rho_q\downarrow & & \downarrow\rho_{q+1} \\ C^q(\mathcal{U}',\mathcal{A}) & \stackrel{\delta}{\longrightarrow} & C^{q+1}(\mathcal{U}',\mathcal{A}). \end{array}$$

Il induit alors un morphisme $\rho_q^* : H^q(\mathcal{U},\mathcal{A}) \longrightarrow H^q(\mathcal{U}',\mathcal{A})$. La limite inductive du système $\left\{\rho_q^* : H^q(\mathcal{U},\mathcal{A}) \longrightarrow H^q(\mathcal{U}',\mathcal{A})\right\}_{\mathcal{U}'\prec\mathcal{U}}$ est un espace vectoriel noté $H^q(M,\mathcal{A})$ et appelé $q^{\text{ème}}$ espace de *cohomologie* de M à coefficients dans le faisceau $\mathcal{A}$. On a les propriétés qui suivent.

1. $H^0(M,\mathcal{A})$ est l'espace $A=\mathcal{A}(M)$ des sections globales de $\mathcal{A}$.

2. Soient M et M' deux variétés, $f : M\longrightarrow M'$ une application continue, $\mathcal{A}$ un faisceau sur M et $\mathcal{A}'$ son image directe par f. Alors, pour tout entier $q\geq 0$, f induit un morphisme $f^* : H^q(M',\mathcal{A}') \longrightarrow H^q(M,\mathcal{A})$. Si M'' est une autre variété, $g : M'\longrightarrow M''$ une application continue et $\mathcal{A}''$ l'image directe de $\mathcal{A}'$ par g, alors $(g\circ f)^* = f^*\circ g^*$. De plus, si $M=M'$ et f est l'identité, alors f^* est l'identité de $H^q(M,\mathcal{A})$.

3. Toute suite de morphismes de faisceaux $\mathcal{A}\xrightarrow{\Phi}\mathcal{A}'\xrightarrow{\Phi'}\mathcal{A}''$ au-dessus de M induit, pour chaque q, une suite de morphismes $H^q(M,\mathcal{A})\xrightarrow{\Phi_*}H^q(M,\mathcal{A}')\xrightarrow{\Phi_*'}H^q(M,\mathcal{A}'')$ telle que $(\Phi'\circ\Phi)_* = \Phi'_*\circ\Phi_*$. Si Φ est un isomorphisme, il en est de même pour Φ_*.

4. On dit qu'un faisceau $\mathcal{A}$ est *fin* si, pour tout recouvrement ouvert localement fini $\{U_i\}$ de M, il existe des endomorphismes $h_i : \mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}$ tels que le support de h_i soit contenu dans U_i et $\sum_{i\in I}h_i$ est l'identité de $\mathcal{A}$. (Rappelons que le *support* d'un morphisme $h : \mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}$ est l'ensemble $\mathrm{supp}(h) = \overline{\{x\in M : h_i(A_x)\neq 0\}}$ où A_x est la fibre de $\mathcal{A}$ en x.) Par exemple, le faisceau $\mathcal{C}^k$ des germes de fonctions de classe C^k ($k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$) est fin.

Nous avons l'assertion qui suit (voir [Go] pour la preuve) : *Si $\mathcal{A}$ est un faisceau fin alors $H^q(M,\mathcal{A})=0$ pour tout $q\geq 1$.*

5. Un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_i\}$ de M est dit *acyclique* si, pour toute intersection finie $U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_q}$, l'espace vectoriel $H^q(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_q}, \mathcal{A})$ est trivial pour $q \geq 1$. Pour un tel recouvrement, on a $H^q(M, \mathcal{A}) = H^q(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ pour tout $q \geq 0$ (c'est un théorème de Leray). Dans beaucoup de situations, ce théorème permet de calculer les espaces $H^q(M, \mathcal{A})$.

1.3. Suite spectrale d'un revêtement

Supposons maintenant que Γ agit librement et proprement par diffeomorphismes sur $\widetilde{M}$. Le quotient $M = \widetilde{M}/\Gamma$ est une variété et la projection canonique $\pi : \widetilde{M} \longrightarrow M$ est un revêtement. Soient $\mathcal{A}$ un faisceau d'espaces vectoriels sur M et $\pi^*(\mathcal{A}) = \widetilde{\mathcal{E}}$ son image réciproque par π à $\widetilde{M}$ (*cf.* [Go] pour voir comment est construit $\pi^*(\mathcal{A}) = \widetilde{\mathcal{E}}$). Il existe alors une suite spectrale E_r de terme :

$$E_2^{pq} = H^p(\Gamma, H^q(\widetilde{M}, \widetilde{\mathcal{A}})) \tag{4}$$

et convergeant vers $H^*(M, \mathcal{A})$. Les espaces vectoriels $H^q(\widetilde{M}, \widetilde{\mathcal{A}})$ sont vus comme Γ-modules via l'action induite par celles de Γ respectivement sur $\widetilde{M}$ et $\widetilde{\mathcal{A}}$. Cette suite spectrale resulte de la théorie de Grothendieck sur les foncteurs dérivés [Gr] (voir par exemple [Br]). Si $(\widetilde{M}, \widetilde{\mathcal{A}})$ est acyclique, c'est-à-dire $H^q(\widetilde{M}, \widetilde{\mathcal{A}}) = 0$ pour $q \geq 1$, E_r converge au terme E_2 et donc :

$$H^p(M, \mathcal{A}) = H^p(\Gamma, H^0(\widetilde{M}, \widetilde{\mathcal{A}})) = H^p(\Gamma, C^\infty(\widetilde{\mathcal{A}})). \tag{5}$$

Dans pas mal de situations, cette suite spectrale permet (on le verra dans la suite) de procéder au calcul de la cohomologie, aussi bien celle d'un groupe que celle d'une variété à valeurs dans un faisceau. Par exemple le :

1.4. Théorème. *Supposons que Γ agit librement et proprement par difféomorphismes sur M et notons W le quotient M/Γ. Alors $H^0(\Gamma, C^k(M)) = C^k(W)$ et $H^p(\Gamma, C^k(M)) = 0$ pour $p \geq 1$. (Ici Γ agit par $\gamma \cdot f = f \circ \gamma^{-1}$ sur $C^k(M)$.)*

Preuve. Elle est presque immédiate. Désignons par $\mathcal{C}^k$ le faisceau des germes de fonctions de classe C^k sur M et $\overline{\mathcal{C}}^k$ celui sur W. Ce sont des faisceaux fins. Et donc $H^q(M, \mathcal{C}^k) = 0$ pour $q \geq 1$ et $H^p(W, \overline{\mathcal{C}}^k) = 0$ pour $p \geq 1$. Par suite, en appliquant (5), on a $H^p(\Gamma, C^k(M)) = 0$ pour $p \geq 1$. Pour $p = 0$, $H^0(\Gamma, C^k(M))$ est l'espace des fonctions de classe C^k sur M invariantes par Γ, c'est-à-dire $C^k(W)$. $\square$

Ce théorème reste vrai dans un cadre plus général : on remplace les fonctions par les sections C^∞ d'un Γ-fibré vectoriel $E \longrightarrow M$.

Faisons maintenant un clin d'œil du côté des formes différentielles. On reprend les mêmes objets : la variété M et le groupe discret Γ qui agit dessus. On note $\Omega^r(M)$ l'espace des r-formes différentielles (de classe C^∞) sur M et Ω^r le faisceau des germes dont elles sont les sections globales. C'est un faisceau fin (en raison de l'existence d'une partition de l'unité de classe C^∞ sur M). L'action de Γ sur M en induit une sur l'espace $\Omega^*(M)$: $\gamma \in \Gamma$ agit sur la forme $\alpha \in \Omega^r(M)$ par $\gamma \cdot \alpha = (\gamma^{-1})^*(\alpha)$. On dira que $\alpha \in \Omega^r(M)$ est Γ-*invariante* si $\gamma \cdot \alpha = \alpha$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Le défaut d'invariance des formes est mesuré par la collection de formes $\{\beta - \gamma \cdot \beta : \gamma \in \Gamma \text{ et } \beta \in \Omega^r(M)\}$ dites *coinvariantes* (apparues par exemple dans [Ha] dans le cadre plus général des pseudo-groupes associés aux feuilletages). Elles engendrent un complexe différentiel $(\Omega(M)_\Gamma, d)$ dont l'homologie, notée $H^*(\Omega(M)_\Gamma)$, est appelée *cohomologie coinvariante* du système dynamique (M, Γ) (voir [ABN] pour un peu plus).

1.5. Proposition. *L'action de* Γ *est cette fois-ci quelconque mais on suppose qu'il existe un élément* $\gamma \in \Gamma$ *tel que le groupe* $\Gamma_0 = \langle \gamma \rangle$ *qu'il engendre agisse librement et proprement. Alors, pour tout entier* $r \geq 0$*, l'opérateur cobord* $\delta : \beta \in \Omega^r(M) \longmapsto (\beta - \gamma \cdot \beta) \in \Omega^r(M)$ *est surjectif.*

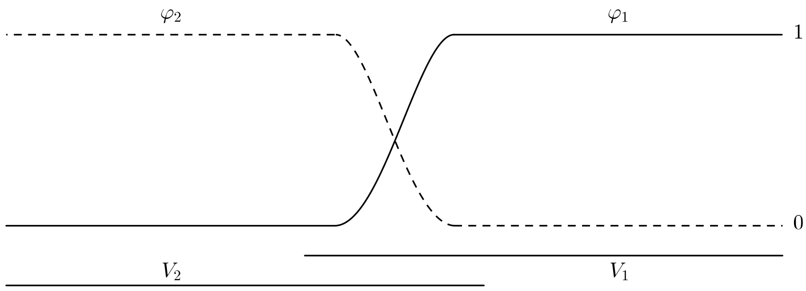
Preuve. Comme Γ_0 agit librement et proprement sur M, le quotient $W_0 = M/\Gamma_0$ est une variété et la projection canonique $p : M \longrightarrow W_0$ est un revêtement. En plus, le faisceau $\overline{\Omega}^r$ sur W_0, projeté du faiseau Ω^r, est fin. En raisonnant exactement comme dans la preuve du théorème 1.4, on montre que l'espace vectoriel $H^1(\Gamma_0, \Omega^r(M))$ est réduit à $\{0\}$. Mais comme $H^1(\Gamma_0, \Omega^r(M)) = \Omega^r(M)/\mathrm{Im}(\delta)$, on a $\Omega^r(M) = \mathrm{Im}(\delta)$ *i.e.* l'opérateur δ est surjectif. $\square$

1.6. Corollaire. *Les hypothèses sont les mêmes que dans la proposition 1.5. Alors le complexe* $(\Omega(M)_\Gamma, d)$ *des formes coinvariantes coïncide avec le complexe de de Rham tout entier, et donc* $H^*(\Omega(M)_\Gamma) = H^*(M)$.

On peut démontrer la proposition 1.5. sans passer ni par les faisceaux ni par les suites spectrales. Voici comment on peut le faire.

Supposons que M admet un recouvrement par deux ouverts V_1 et V_2 tels que $\gamma^n(V_1) \subset V_1$ et $\gamma^{-n}(V_2) \subset V_2$ pour tout $n \geq 0$.

Soit $\varphi_1 : M \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction C^∞, ayant son support dans V_1 et valant 1 en dehors de V_2. Posons $\varphi_2 = 1 - \varphi_1$ (*cf.* dessin ci-dessous). La paire $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ est une partition de l'unité subordonnée au recouvrement oouvert $\{U_1, U_2\}$.



On pose $\alpha_1 = \varphi_1 \alpha$ et $\alpha_2 = \varphi_2 \alpha$. Alors α_1 est à support dans V_2, α_2 à support dans V_2 et $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$. Il n'est pas difficile de voir que, sur chaque compact, la série :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n \cdot \alpha_1$$

se réduit en fait à une somme finie, donc converge pour la topologie C^∞ et définit une forme différentielle β_1. Cette forme vérifie :

$$\beta_1 - \gamma \cdot \beta_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n \cdot \alpha_1 - \gamma.\left(\sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n \cdot \alpha_1\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n \cdot \alpha_1 - \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^n \cdot \alpha_1 = \alpha_1.$$

De la même manière, on montre que la série :

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \gamma^{-n} \cdot \alpha_2$$

définit une forme différentielle β_2 vérifiant l'équation $\beta_2 - \gamma \cdot \beta_2 = \alpha_2$. La forme $\beta = \beta_1 + \beta_2$ est alors une solution à notre problème. En effet :

$$\beta - \gamma \cdot \beta = \beta_1 + \beta_2 - \gamma \cdot (\beta_1 + \beta_2) = (\beta_1 - \gamma \cdot \beta_1) + (\beta_2 - \gamma \cdot \beta_2) = \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha.$$

En disant autrement, nous avons montré que la suite d'espaces vectoriels topologiques et de morphismes continus :

$$0 \longrightarrow \Omega_\Gamma(M) \hookrightarrow \Omega(M) \xrightarrow{\delta} \Omega(M) \longrightarrow 0$$

est exacte (où $\Omega_\Gamma(M)$ est l'espace des formes Γ-invariantes).

Question : *Comment trouver les ouverts V_1 et V_2 ?*

Première méthode. Soit Δ un domaine fondamental de l'action de Γ_0 sur M (qui existe toujours pour une action propre et libre d'un groupe discret) ; c'est-à-dire Δ est un ouvert vérifiant les propriétés suivantes :

i) L'intérieur de l'adhérence $\overline{\Delta}$ est égal à Δ.

ii) La réunion de tous les $\gamma^n(\overline{\Delta})$ (pour n parcourant $\mathbb{Z}$) est égale à M.

iii) $\gamma^n(\Delta) \cap \Delta = \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$.

iv) La famille $\{\gamma^n(\overline{\Delta}) : n \in \mathbb{Z}\}$ est localement finie : un compact ne rencontre qu'un nombre fini de cette famille.

En utilisant ces propriétés et le fait que Γ_0 agit librement et proprement, on montre que les parties suivantes :

$$F_1 = \bigcup_{n \geq 0} \gamma^n(\overline{\Delta}) \quad \text{et} \quad F_2 = \bigcup_{n \leq 0} \gamma^n(\overline{\Delta})$$

sont fermées. On prend alors pour ouverts V_1 et V_2 les complémentaires respectifs de F_1 et F_2.

Deuxième méthode. Elle m'a été communiquée par Mehdi Nabil. Je l'en remercie.

Le groupe Γ_0 agit librement et proprement sur M. Le quotient $W = M/\Gamma_0$ est donc une variété et la projection canonique $p : M \longrightarrow W$ est un revêtement de groupe $\mathbb{Z}$. Il existe alors une application $f : W \longrightarrow \mathbb{S}^1$ dite *application classifiante* telle que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} M & \stackrel{\widetilde{f}}{\longrightarrow} & \mathbb{R} \\ p \downarrow & & \downarrow \tau \\ W & \stackrel{f}{\longrightarrow} & \mathbb{S}^1 \end{array}$$

commute (*cf.* [Bo] page 447). Ici $\widetilde{f}$ est un *relèvement* de f et τ est la projection de revêtement de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{S}^1$, par exemple $\tau(t) = e^{2i\pi t}$. En plus, l'application $\widetilde{f}$ est Γ_0-équivariante *i.e.* elle verifie $\widetilde{f}(\gamma^n(x)) = \widetilde{f}(x) + n$ pour tout $x \in M$ et tout $n \in \mathbb{Z}$. Par suite $\widetilde{f}(\gamma^n(x))$ tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$ et $\widetilde{f}(\gamma^n(x))$ tend vers $-\infty$ quand $n \to -\infty$. On pose alors $V_1 = \widetilde{f}^{-1}(]0, +\infty[)$ et $V_2 = \widetilde{f}^{-1}(]-\infty, 1[)$. Il est alors facile de voir que ces deux ouverts conviennent à notre propos.

On voit donc que pour une action libre et propre, prendre toutes les formes coinvariantes ne donne pas “plus” que la cohomologie de de Rham $H^*(M)$. Il faudrait, par exemple, se restreindre à celles qui ont un support compact comme dans [ABN]. Mais voyons plutôt un autre aspect de ces formes coinvariantes.

Notons $\Omega_c^r(M)$ l'espace des r-formes différentielles à support compact. On le munit de la même topologie que celle qu'on introduira dans les deux premiers paragraphes de la sous-section 2.1. Un *courant* de *degré* r sur M est une forme linéaire continue sur $\Omega_c^r(M)$. Les courants de degré r sur M forment un espace vectoriel noté $\mathcal{C}^r(M)$; usuellement, il est équipé de la topologie faible. Évidemment, l'espace $\mathcal{C}^0(M)$ n'est rien d'autre que celui des distributions (qu'on verra un peu plus dans la sous-section 2.1). L'évaluation d'un courant c sur une r-forme α sera notée $\langle c, \alpha\rangle$.

On se donne maintenant une action quelconque de Γ sur M et on note $\Omega_c^r(M)_\Gamma$ l'espace des r-formes coinvariantes à support compact. L'action d'un élément $\gamma \in \Gamma$ sur un courant c est donnée par $\langle \gamma \cdot c, \alpha\rangle = \langle c, \gamma \cdot \alpha\rangle$. On dira que c est Γ-*invariant* si $\gamma \cdot c = c$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, autrement dit, c est nul sur les formes coinvariantes. Les courants invariants forment un complexe différentiel $(\mathcal{C}_\Gamma^*(M), d)$ dont l'homologie est notée $H^*\left(\mathcal{C}_\Gamma^*(M)\right)$ et appelée *cohomologie des courants invariants* du système dynamique (M, Γ).

1.7. Problème. *Calculer* $H^*\left(\mathcal{C}_\Gamma^*(M)\right)$ *dans des situations intéressantes d'actions de groupes. Quelle interprétation peut-on en donner ? Par exemple, que se passe-t-il pour les actions isométriques sur des variétés riemanniennes compactes ?*

Des résultats substantiels reliant cette cohomologie et les formes automorphes pour un groupe kleinéen élémentaire ont été obtenus dans [Dc].

Dans le même ordre d'idées, voici l'un des problèmes qui nous intéresseront par la suite. On se donne une action de Γ sur M et on note A l'espace $C^k(M)$ (avec $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$).

1.8. Problème. *Calculer la cohomologie* $H^*(\Gamma, A)$ *du groupe discret* Γ *à valeurs dans le* Γ-*module vectoriel* A.

Plus particulièrement, l'espace $H^1(\Gamma, A)$ est important. Il intervient (explicitement ou implicitement) dans pas mal de branches des mathématiques. On verra à cet effet que d'autres objets géométriques lui sont rattachés et sont aussi à déterminer.

Si Γ et Γ' sont deux sous-groupes (dénombrables) conjugués de $\mathrm{Diff}(M)$, alors les espaces vectoriels topologiques $H^1(\Gamma, A)$ et $H^1(\Gamma', A)$ sont isomorphes. Pour le calcul de $H^1(\Gamma, A)$, on choisira donc le plus simple de ses représentants dans sa classe de conjugaison.

On a déjà vu que lorsque Γ est fini, l'espace vectoriel $H^p(\Gamma, A)$ est trivial pour $p \geq 1$. C'est aussi le cas si Γ agit librement et proprement sur M. On supposera donc, dans toute la suite, que Γ est infini et que son action sur M n'est pas libre ou n'est pas propre.

Tel qu'il est posé, le problème du calcul de $H^*(\Gamma, A)$ n'est pas toujours facile si le groupe Γ est "compliqué". Nous ne regarderons que quelques exemples et nous concentrerons notre attention beaucoup plus sur le cas où $\Gamma \simeq \mathbb{Z}$ et l'action $\Gamma \times M \longrightarrow M$ est fidèle *i.e.* le morphisme représentation associé $\rho : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Diff}(M)$ est injectif ; Γ est alors engendré par un difféomorphisme γ (image de 1 par la représentation ρ) d'ordre infini.

2. Équations cohomologiques

Elles sont de deux types : i) *discret*, sur lequel on débouche de façon naturelle lorsqu'on calcule le groupe de cohomologie $H^1(\Gamma, A)$ où A est un espace de Fréchet (constitué par exemple des sections d'un fibré vectoriel au-dessus de M) ; ii) *continu*, provenant d'un problème (à peu près du même type) associé à un champ de vecteurs sur M.

Les deux cas - discret et continu - amènent à considérer d'autres objets géométriques liés aux actions tels que les *mesures invariantes* ou, de façon générale, les *distributions invariantes.*

2.1. Distributions invariantes

On note $C_0^k(M)$ l'espace des fonctions sur M, de classe C^k et à support compact. On le munit de la topologie dont le mode de convergence est le suivant : une suite (φ_p) converge vers 0 si tous les supports des φ_p sont contenus dans un compact fixe $K \subset M$ et si, pour tout $s \in \{0, 1, \cdots, k\}$, la suite $\varphi_p^{(s)}$ des dérivées $s^{\text{èmes}}$ converge uniformément sur K vers 0. Si M est compacte, $C_0^k(M)$ est exactement l'espace $C^k(M)$ muni de la topologie $\mathcal{T}_k$ (*cf.* section 0).

Une *distribution* sur M est une forme linéaire continue $T : C_0^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{K}$ (donc sur $C^\infty(M)$ si M est compacte). Une *mesure* sur M est une forme linéaire continue $C_0(M) \xrightarrow{\mu} \mathbb{K}$. L'ensemble des distributions et celui des mesures sur M sont des espaces vectoriels notés respectivement $\mathcal{D}(M)$ et $\mathcal{M}(M)$.

- Comme l'injection canonique $C_0^\infty(M) \hookrightarrow C_0(M)$ est continue, la restriction d'une mesure au sous-espace $C_0^\infty(M))$ est une distribution.

On notera $\langle T, f\rangle$ et $\langle \mu, f\rangle$ les évaluations sur une fonction f (C^∞ ou seulement continue) respectivement de T et μ.

- On dira qu'une distribution T (resp. une mesure μ) est *positive* si, pour toute fonction réelle $f \in C_0^\infty(M)$ positive on a $\langle T, f\rangle \geq 0$ (resp. $\langle \mu, f\rangle \geq 0$). Une mesure positive est appelée *mesure de Radon.* Toute distribution positive est une mesure de Radon (*cf.* page 29 de [Sc] pour la preuve).

- On appelle *support* d'une distribution T (resp. d'une mesure μ) le plus petit fermé $\mathrm{supp}(T)$ (resp. $\mathrm{supp}(\mu)$) tel que $\langle T, f\rangle = 0$ (resp. $\langle \mu, f\rangle = 0$) pour toute fonction $f \in C_0^\infty(M)$ (resp. $f \in C_0(M)$) ayant son support dans le complémentaire de $\mathrm{supp}(T)$ (resp. de $\mathrm{supp}(\mu)$).

- Toute distribution (resp. mesure) à support compact sur M se prolonge en une forme linéaire continue sur $C^\infty(M)$ (resp. $C(M)$). Inversement, toute forme linéaire continue sur $C^\infty(M)$ (resp. sur $C(M)$) est une distribution (resp. une mesure) à support compact (*cf.* [Sc] page 89 pour la preuve). L'espace des distributions (resp. mesures) à support compact sera noté $\mathcal{D}_0(M)$ (resp. $\mathcal{M}_0(M)$). Donc $\mathcal{D}_0(M)$ est le dual topologique de $C^\infty(M)$ et $\mathcal{M}_0(M)$ celui de $C(M)$.

Supposons maintenant que Γ agit sur M (toujours par difféomorphismes). On dira qu'une distribution $T \in \mathcal{D}(M)$ (resp. une mesure $\mu \in \mathcal{M}(M)$) est *invariante* par $\gamma \in \Gamma$, si, pour toute fonction $f \in C_0^\infty(M)$ (resp. $f \in C_0(M)$) on a $\langle T, f \circ \gamma\rangle = \langle T, f\rangle$ (resp. $\langle \mu, f \circ \gamma\rangle = \langle T, f\rangle$) ; on dira que T (resp. μ) est *invariante* par Γ (ou simplement Γ-invariante) si elle est invariante par tout $\gamma \in \Gamma$. En fait, aussi bien pour une distribution (à support compact ou non) que pour une mesure (à support compact ou non), il suffit que la propriété d'invariance soit vérifiée sur les éléments d'un système générateur de Γ. L'espace $\mathcal{D}_\Gamma(M)$ (resp. $\mathcal{M}_\Gamma(M)$) des distribuions (resp. mesures) Γ-invariantes est fermé pour la topologie faible dans $\mathcal{D}(M)$ (resp. $\mathcal{M}(M)$).

Par exemple, si Γ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ engendré par un élément γ, une distribution T sur M est Γ-invariante si, et seulement si, elle est invariante par γ. Dans ce cas elle est nulle sur toutes les fonctions de la forme $f - f \circ \gamma$, et par suite sur le sous-espace $\mathcal{B} = \langle f - f \circ \gamma\rangle$ qu'elles engendrent lorsque f varie dans $C_0^\infty(M)$. Elle induit donc une forme linéaire continue sur l'espace quotien $C_0^\infty(M)/\mathcal{B}$. De la même manière, une mesure γ-invariante μ induit une forme linéaire continue sur l'espace quotient $C_0(M)/\{f - f\circ\gamma : f \in C_0(M)\}$.

2.2. Cas discret

L'espace $H^1(\Gamma, A)$ est alors le conoyau de l'opérateur $\delta : f \in A \longmapsto (f - f\circ\gamma) \in A$. Le noyau de δ est, comme on l'a déjà signalé, l'espace vectoriel $H^0(\Gamma, A) = A_\Gamma$ des éléments de A invariants par l'action de Γ.

Le calcul du conoyau de δ revient à résoudre le problème suivant : *étant donnée une fonction $g \in A$, existe-t-il une fonction $f \in A$ telle que* :

$$\text{(EC)} \qquad f(x) - f(\gamma x) = g(x) \quad ?$$

L'équation (EC) est appelée *équation cohomologique* du difféomorphisme γ. Sa résolution est un problème hautement non trivial. Mais toute situation particulière et concrète a de l'intérêt. Nous allons en exposer quelques-unes connues ou pas. Dans toute la suite γ^n désignera le composé n fois de γ si $n \geq 1$ et $|n|$ fois de γ^{-1} si $n \leq -1$; et bien sûr on a $\gamma^0 =$ identité.

Si T est une forme linéaire continue sur l'espace vectoriel topologique A (on dira tout simplement *fonctionnelle*, par exemple une distribution ou une mesure) invariante par γ, alors son évaluation sur les deux membres de l'égalité (EC) donne :

$$\langle T, g\rangle = \langle T, f\rangle - \langle T, f\circ\gamma\rangle = 0.$$

Donc une condition nécessaire pour que l'équation (EC) ait une solution f est que g annule toute fonctionnelle γ-invariante sur E. Le tout est de savoir si cette condition est suffisante. La réponse est non en général. Les espaces $\mathcal{M}_\Gamma(M)$ (mesures Γ-invariantes) et $\mathcal{D}_\Gamma(M)$ (celui des distributions Γ-invariantes) sont donc importants et leur détermination est liée à l'équation (EC).

On voit presque immédiatement que l'espace A'_Γ des fonctionnelles invariantes sur A est le dual topologique de $\overline{H}^1(\Gamma, A)$, quotient de l'espace A par l'adhérence de son sous-espace vectoriel $\{f - f\circ\gamma : f \in A\}$ (non fermé en général).

Essentiellement et sauf précision supplémentaire, dans la suite, M sera compacte et A désignera soit $C(M)$ soit $C^\infty(M)$ munis de leurs topologies respectives $\mathcal{T}_0$ et $\mathcal{T}_\infty$. Nous serons intéressés par l'équation (EC) et les espaces $H^1(\Gamma, A)$, $\overline{H}^1(\Gamma, A)$, $\mathcal{M}_\Gamma(M)$ et $\mathcal{D}_\Gamma(M)$.

2.3. Le cas continu

1. Rappelons qu'une forme volume ω sur M définit une mesure (et donc une distribution) par $\langle \omega, f\rangle = \int_M f\omega$; elle permet aussi d'associer à toute fonction φ localement intégrable une mesure μ_φ (et donc aussi une distribution T_φ) donnée par $\langle \mu_\varphi, f\rangle = \int_M f\varphi\omega$. Si φ est C^∞, on dira que la mesure μ_φ (et la distribution T_φ) est *régulière* et on la confond avec φ ; on écrira alors $\mu_\varphi, T_\varphi \in C^\infty(M)$.

2. Un champ de vecteurs X sur M définit un opérateur différentiel D d'ordre 1 sur $C^\infty(M)$ par $(Df)(x) = (Xf)(x) = (d_x f)(X_x)$. L'équation $Df = g$ (g donnée et f inconnue) est l'*équation cohomologique* du système dynamique (M, X). (Elle peut aussi s'écrire $L_X f = g$ où L_X est la dérivée de Lie dans la direction du champ X.)

3. L'opérateur D s'étend à l'espace $\mathcal{D}(M)$: à $T \in \mathcal{D}(M)$ on associe la distribution DT définie par $\langle DT, f\rangle = -\langle T, Df\rangle$. On peut donc parler de l'équation cohomologique au niveau des distributions : $DT = S$ (S donnée et T inconnue). Une distribution T est dite *invariante* par X si $DT = 0$, c'est-à-dire T est nulle sur l'image de D. (L'espace des distributions invariantes par X sera noté $\mathcal{D}_X(M)$.) Une condition nécessaire pour que l'équation $Df = g$ admette une solution est donc $\langle T, g\rangle = 0$ pour toute distribution invariante T.

On dira que l'opérateur D est *globalement hypoelliptique* si, pour toute distribtion T on a l'implication :

$$DT \in C^\infty(M) \Longrightarrow T \in C^\infty(M).$$

Dans toute la suite on supposera que le champ X est non singulier. Il définit alors un feuilletage $\mathcal{F}$ de dimension 1 sur M.

4. La cohomologie feuilletée $H^*_{\mathcal{F}}(M)$ de $(M, \mathcal{F})$ est celle du complexe différentiel d'espaces vectoriels topologiques (evt en abrégé) :

$$0 \longrightarrow C^\infty(M) \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} C^\infty(M) \otimes \chi \longrightarrow 0$$

où χ est une 1-forme valant 1 sur X et $d_{\mathcal{F}}$ est l'opérateur défini par $d_{\mathcal{F}} f = Df \otimes \chi$. L'espace $H^0_{\mathcal{F}}(M)$ est celui des *fonctions basiques* (constantes sur les feuilles), $H^1_{\mathcal{F}}(M)$ est le conoyau de l'opérateur $d_{\mathcal{F}}$ et $H^r_{\mathcal{F}}(M) = 0$ pour $r \geq 2$ (pour raison de dimension). Calculer $H^1_{\mathcal{F}}(M)$ revient donc à résoudre l'équation cohomologique $Df = g$.

5. Comme un flot sur une variété compacte possède au moins une mesure invariante μ (donc une distribution invariante), la dimension de $H^1_{\mathcal{F}}(M)$ est au moins 1. Soit N le noyau de la forme linéaire continue : $g \in C^\infty(M) \longmapsto \langle \mu, g\rangle = \int_M g d\mu \in \mathbb{C}$. Si l'image de $d_{\mathcal{F}}$ est exactement N on dira que X est *rigide*. Dans ce cas l'evt $H^1_{\mathcal{F}}(M)$ est séparé de dimension 1.

6. L'image de l'opérateur $d_{\mathcal{F}}$ n'est pas fermée en général, et donc l'evt $H^1_{\mathcal{F}}(M)$ n'est pas toujours séparé (*cf.* l'exemple traité dans [DE] page 1113 ou celui de [Ek2]). Ce qui amène à définir la *cohomologie feuilletée réduite* $\overline{H}^1_{\mathcal{F}}(M)$ en prenant le quotient de $C^\infty(M) \otimes \chi$ par l'adhérence de l'image de $d_{\mathcal{F}}$. Le dual topologique de $\overline{H}^1_{\mathcal{F}}(M)$ est l'espace des distributions à support compact sur M invariantes par X.

Avant de continuer à exposer le reste de ce que nous avons envisagé, regardons ce qui se passe dans le cas d'un difféomorphisme du cerle $\mathbb{S}^1$ et celui d'un flot linéaire sur le tore $\mathbb{T}^n$.

3. Difféomorphismes du cercle $M = \mathbb{S}^1$

Le cercle $\mathbb{S}^1$ peut être vu sous plusieurs angles mais on ne s'intéressera qu'à deux : il est quotient de $\mathbb{R}$ par le sous-groupe $2\pi\mathbb{Z}$ ou il est l'espace homogène $P^1(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^2 \backslash \{0\})/\mathbb{R}^*$ (espace projectif réel de dimension 1).

Soit γ un difféomorphisme de $M = \mathbb{S}^1$ (qu'on suppose préserver l'orientation). Alors, dans le cas $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, γ se relève en un difféomorphisme strictement croissant $\widetilde{\gamma}$ de $\mathbb{R}$ vérifiant la relation $\widetilde{\gamma}(x+1) = \widetilde{\gamma}(x) + 1$. On a le :

3.1. Théorème de Poincaré. *Soit $x \in \mathbb{S}^1$. Alors la limite de la quantité $\frac{\widetilde{\gamma}^n(x) - x}{2\pi n}$ (quand n tend vers $+\infty$) existe et sa classe modulo $\mathbb{Z}$ est indépendante du choix de x. On note α le représentant de cette classe dans $]0, 1[$ et on l'appelle* ***nombre de rotation*** *de γ.*

Il est clair que si γ est la rotation d'angle $2\pi\theta$, son nombre de rotation est θ. Si γ a un point périodique *i.e.* il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\gamma^q(x) = x$, alors α est rationnel. Si γ n'a pas de point périodique, α est irrationnel.

3.2. Théorème de Denjoy. *Si α est irrationnel, γ est topologiquement conjugué à la rotation $R_{2\pi\alpha}$ d'angle $2\pi\alpha$. Cela signifie qu'il existe un homéomorphisme $h : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ tel que $\gamma = h^{-1} \circ R_{2\pi\alpha} \circ h$.*

La régularité de la conjugaison (c'est-à-dire la différentiabilité ou l'analyticité de h) dépend de la nature arithmétique de α que nous précisons dans la définition qui suit.

3.3. Définition. *On dira qu'un nombre irrationnel $\alpha > 0$ est :*

i) ***de Liouville*** *s'il existe une constante $A > 0$ telle que, pour tout $s \in \mathbb{N}$, il existe des entiers $p_s \in \mathbb{Z}$ et $q_s \in \mathbb{N}^*$ vérifiant : $\left|\alpha - \frac{p_s}{q_s}\right| \leq \frac{A}{|q_s|^s}$;*

ii) ***diophantien*** *s'il existe des constantes $A > 0$ et $\delta \geq 2$ telles que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et tout $q \in \mathbb{N}^*$, on ait : $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{A}{|q|^\delta}$.*

3.4. Théorème. *Supposons que le nombre de rotation α de γ est diophantien. Alors γ est C^∞-conjugué à la rotation $R_{2\pi\alpha}$: il existe $h \in \mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)$ tel que $\gamma = h^{-1} \circ R_{2\pi\alpha} \circ h$. Le difféomorphisme h est analytique si γ l'est.*

Plusieurs mathématiciens ont contribué à la preuve de ce théorème : de façon directe Denjoy, Arnold, Moser, Herman, Yoccoz et indirectement Kolmogorov, Nash, Hamilton.

4. Ce qui se passe sur le tore $M = \mathbb{T}^n$

4.1. La variété M est le tore $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ (avec $n \geq 2$) et γ est la translation par un vecteur $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ de $\mathbb{R}^n$ où les composantes $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$. On note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.

i) *On dira que α est un* **vecteur diophantien** *s'il existe des nombres réels $C > 0$ et $\tau > 0$ tels que $|\langle \mathbf{m}, \alpha\rangle| \geq \frac{C}{|\mathbf{m}|^\tau}$ pour tout $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$ non nul.*

ii) *On dira que α est un* **vecteur de Liouville** *s'il existe un réel $C > 0$ tel que, pour tout $\tau > 0$, il existe $\mathbf{m}_\tau \in \mathbb{Z}^n$ satisfaisant l'inégalité $|\langle \mathbf{m}_\tau, \alpha\rangle| \leq \frac{C}{|\mathbf{m}_\tau|^\tau}$.*

Tout vecteur $\alpha \in \mathbb{R}^n$ dont les composantes $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ sont algébriques et linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$ est diophantien (voir [EH] pour la démonstration).

On définit la fonctionnelle $\mathcal{L} : C^\infty(\mathbb{T}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ par $\mathcal{L}(g) = \int_{\mathbb{T}^n} g(x)dx$. On peut interpréter $\mathcal{L}$ comme un opérateur sur $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ qui associe à chaque g la fonction $\mathcal{L}(g)\mathbf{1}$ où $\mathbf{1}$ est la fonction constante égale à 1 ; c'est un opérateur compact car de rang fini (égal à 1). Son noyau $\mathcal{N}$ est fermé et tel que $C^\infty(\mathbb{T}^n) = \mathcal{N} \oplus (\mathbb{C} \cdot \mathbf{1})$. Notons P la première projection $C^\infty(\mathbb{T}^n) = \mathcal{N} \oplus (\mathbb{C} \cdot \mathbf{1}) \longrightarrow \mathcal{N}$. Elle satisfait $P \oplus \mathcal{L} = I$ (où I est l'opérateur identité sur $C^\infty(\mathbb{T}^n)$). On a le théorème qui suit (voir sa preuve dans [EH]) :

4.2. Théorème. *Soit γ le difféomorphisme du tore $\mathbb{T}^n$ associé à la translation par le vecteur $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ où $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.*

i) *On suppose α diophantien. Alors il existe un opérateur borné $C^\infty(\mathbb{T}^n) \xrightarrow{G} C^\infty(\mathbb{T}^n)$ tel que $\delta G = I - \mathcal{L}$. Conséquence : l'equation $f - f \circ \gamma = g$ a une solution $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ si, et seuement si, $\mathcal{L}(g) = 0$. En plus, l'espace vectoriel $H^1(\mathbb{Z}, C^\infty(\mathbb{T}^n))$ est de dimension 1 engendré par la fonction constante égale à* $\mathbf{1}$.

ii) *On suppose α de Liouville. Alors il existe une famille infinie libre de fonctions g vérifiant $\mathcal{L}(g) = 0$ pour lesquelles l'équation $f - f \circ \gamma = g$ n'a pas de solution. Dans ce cas, $H^1(\mathbb{Z}, C^\infty(\mathbb{T}^n))$ est un evt de dimension infinie non séparé. Mais son séparé associé $\overline{H}^1(\mathbb{Z}, C^\infty(\mathbb{T}^n))$ est de dimension 1 engendré par la fonction $\mathbf{1}$.*

Dans les deux cas, l'espace $\mathcal{D}_\gamma(\mathbb{T}^n)$ des distributions γ-invariantes est de dimension 1 engendré par la mesure de Haar $dx = dx_1 \otimes \cdots \otimes dx_n$.

4.3. Lorsque le difféomorphisme γ est induit par une matrice $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$, la situation est un peu plus compliquée. Mais des résultats ont été obtenus :

1. Lorsque A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et a toutes ses valeurs propres positives et différentes de 1 (voir [DE]).

2. Lorsque A a toutes ses valeurs propres (réelles ou complexes) de module différent de 1 (voir [Ze]). Ça généralise ce qui précède.

3. Lorsque A n'a pas de point périodique de période $q \geq 2$ et γ est l'automorphisme affine de $\mathbb{T}^n$ qui à x associe $Ax + b$ avec $b \in \mathbb{T}^n$ (voir [EH]).

Pour un champ de vecteurs linéaire sur $\mathbb{T}^n$, on a un énoncé similaire à celui du théorème 4.2 pour l'équation cohmologique continue $X \cdot f = g$. Nous nous contenterons de le donner de façon concise.

4.4. Théorème. *Soit X un champ linéaire sur $\mathbb{T}^n$. On a les assertions suivantes.*

i) *Supposons X diophantien. Alors l'équation cohomologique $X \cdot f = g$ a une solution $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ si, et seulement si $\int_{\mathbb{T}^n} g(x)dx = 0$. Dans ce cas, l'espace vectoriel $H^1_{\mathcal{F}}(\mathbb{T}^n)$ est de dimension 1 engendré par la 1-forme feuilletée χ.*

ii) *Si X est de Liouville, il existe une famille infinie libre $(g_\delta)_{\delta \in \mathbb{N}}$ telle que l'équation $X \cdot f = g_\delta$ n'ait aucune solution. Dans ce cas, $H^1_{\mathcal{F}}(\mathbb{T}^n)$ est un espace vectoriel topologique de dimension infinie non séparé. Mais $\overline{H}^1_{\mathcal{F}}(\mathbb{T}^n)$ est de dimension 1 engendré par χ.*

iii) *Dans tous les cas, l'espace vectoriel $\mathcal{D}_X(\mathbb{T}^n)$ des distributions invariantes par X est de dimension 1 engendré par la mesure de Haar $dx_1 \otimes \cdots \otimes dx_n$ sur le groupe de Lie $\mathbb{T}^n$.*

5. Des conjectures

Les résultats décrits par les théorèmes 4.2 et 4.4 sont très particuliers et liés au fait que la variété est un tore. Les spécialistes ont cherché à voir s'il y a d'autres exemples similaires mais sans succès. Ceci a amené donc à un certain nombre de conjectures, entre autres celles que nous allons énoncer dans cette section.

Soit X un champ de vecteurs non singulier sur une variété compacte M. Comme son flot possède au moins une mesure invariante μ (donc une distribution invariante), la dimension de $H^1_{\mathcal{F}}(M)$ est au moins 1. Soit N le noyau de la fonctionnelle $g \in C^\infty(M) \longmapsto \int_M g d\mu \in \mathbb{C}$. Si l'image de l'opérateur $d_{\mathcal{F}}$ est exactement N on dira que X est *rigide.* Dans ce cas l'evt $H^1_{\mathcal{F}}(M)$ est séparé de dimension 1.

5.1. Conjecture de Greenfield-Wallach. *Soit X un champ non singulier* ***globalement hypoelliptique*** *sur une variété connexe compacte orientable M de dimension n. Alors M est difféomorphe au tore $\mathbb{T}^n$ et X est conjugué à un champ linéaire diophantien.* (Voir [GW].)

Au départ, Greenfield et Wallach ont formulé cette conjecture dans le cas où M est un espace homogène G/H et X induit par un élément de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G. Ils l'ont alors établie lorsque $\dim(G) = 3$ et H un réseau cocompact de G. En dimension quelconque (et toujours pour un champ homogène), la conjecture a été démontrée récemment par Flaminio, Forni et Rodriguez Hertz [FFR].

5.2. Conjecture de Katok (version continue). *Soit X un champ non singulier **rigide** sur une variété connexe compacte orientable M de dimension n. Alors M est difféomorphe au tore $\mathbb{T}^n$ et X est conjugué à un champ linéaire diophantien.* (Voir [Ka].)

5.3. Conjecture de Katok (version discrète). *Soit γ un difféomorphisme d'une variété connexe compacte orientable M de dimension n. (γ engendre ainsi une action d'un groupe $\Gamma \simeq \mathbb{Z}$.) On suppose l'espace vectoriel topologique $H^1(\Gamma, C^\infty(M))$ séparé, de dimension 1. Alors M est difféomorphe au tore $\mathbb{T}^n$ et γ est conjugué à une translation par un vecteur diophantien.* (Voir [Ka].)

Aussi bien pour X rigide que globalement hypoelliptique, les propriétés suivantes ont été établies (par exemple dans [GW] ou [Fo]) :

(i) Le flot $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ associé à X est uniquement ergodique : à constante multiplicative près, il possède une unique mesure invariante.

(ii) Cette mesure invariante est en fait une forme volume ω (qu'on peut, bien sûr, choisir telle que $\int_M \omega = 1$).

(iii) Le flot $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est minimal *i.e.* ses orbites sont denses.

6. Lien entre le discret et le continu

Nous allons voir qu'en fait les conjectures de Katok sont des cas particuliers de celle de Greenfield-Wallach. Nous aurons besoin à cet effet de la construction qui suit.

6.1. Suspension d'un difféomorphime

Soient M une variété compacte et $\gamma : M \longrightarrow M$ un difféomorphisme. On note (x,t) les coordonnées d'un point z de $\widetilde{N} = M \times \mathbb{R}$ et $\widetilde{X}$ le champ $\frac{\partial}{\partial t}$; $\widetilde{X}$ est invariant par le difféomorphisme $(x,t) \in M \times \mathbb{R} \longmapsto (\gamma(x), t+1) \in M \times \mathbb{R}$ et induit donc un champ de vecteurs X partout non nul sur la variété quotient $N = M \times \mathbb{R}/(x,t) \simeq (\gamma(x), t+1)$. La deuxième projection $\widetilde{\pi} : \widetilde{N} = M \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est équivariante par rapport aux actions du groupe $\mathbb{Z}$: $\tau_k : t \in \mathbb{R} \longrightarrow t + k \in \mathbb{R}$ et $(\gamma^k, \tau_k) : (x,t) \in \widetilde{N} \longrightarrow (\gamma^k(x), t+k) \in \widetilde{N}$; cela signifie que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{N} & \xrightarrow{(\gamma^k,\tau_k)} & \widetilde{N} \\ \widetilde{\pi}\downarrow & & \downarrow\widetilde{\pi} \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\tau_k} & \mathbb{R} \end{array}$$

Donc $\widetilde{\pi}$ induit une submersion $\pi : N \longrightarrow \mathbb{S}^1$; c'est en fait une fibration plate de monodromie γ. Notons $\mathcal{F}$ le flot défini par X ; on dit que $(N, \mathcal{F})$ est la *suspension* de (M, γ). On a alors les théorèmes qui suivent (démontrés dans [DE]).

6.2. Théorème. *Les espaces vectoriels topologiques de cohomologie $H^1_{\mathcal{F}}(N)$ et $H^1(\mathbb{Z}, C^\infty(M))$ sont canoniquement isomorphes. Par conséquent l'équation cohomologique continue $X \cdot f = g$ a une solution sur N si, et seulement si, l'équation cohomologique discrète $K - K \circ \gamma = \Phi$ a une solution sur M pour $\Phi(x) = \int_0^1 g(x,t)dt$.*

6.2. Théorème. *La transposée p' de l'application linéaire continue et surjective p qui à $g \in C^\infty(N)$ associe $p(g) = \int_0^1 g(.,t)dt \in C^\infty(M)$ est un isomorphisme topologique de $\mathcal{D}_\gamma(M)$ sur $\mathcal{D}_X(N)$.*

Le théorème 6.1. permet de ramener la conjecture de Katok discrète à la conjecture de Katok continue. Le lecteur se débrouillera pour voir comment ça se passe ; nous établirons plutôt la :

6.3. Proposition. *La conjecture de Greenfield-Wallach implique la version continue de la conjecture de Katok.*

Preuve. Reprenons le champ X mais en tant qu'opérateur différentiel D d'ordre 1 sur $C^\infty(M)$ (comme dans la sous-section 2.3). L'équation $Df = g$ (g donnée et f inconnue) est l'*équation cohomologique* du système dynamique (M, X). Supposons le champ X rigide.

1. Le noyau N de D est constitué des fonctions constantes (les orbites de X sont denses).

2. L'équation $Df = g$ a une solution si, et seulement si, $\int_M g\omega = 0$. L'image R de l'opérateur D est donc le noyau de la projection $P : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ qui à g associe $\left(\int_M g\omega\right) \cdot \mathbf{1}$ où $\mathbf{1}$ est la fonction identiquement égale à 1. Le sous-espace R est alors fermé dans $C^\infty(M)$ et donc de Fréchet.

3. Le sous-espace N étant de dimension 1, l'identité $j : N \longrightarrow N$ peut être vue comme une forme linéaire (continue) sur N. Soit ψ un élément de N tel que $j(\psi) = 1$. D'après le théorème de Hahn-Banach, j se prolonge en une forme linéaire continue $\widetilde{j}$ sur $C^\infty(M)$. Soit V le noyau de $\widetilde{j}$; c'est un sous-espace fermé, donc complet de $C^\infty(M)$. C'est un supplémentaire topologique de N : en effet, pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$, on a $f = (f - \widetilde{j}(f)\psi) + \widetilde{j}(f)\psi$ avec $(f - \widetilde{j}(f)\psi) \in V$ et $\widetilde{j}(f)\psi \in N$.

4. De ce qui précède on déduit que la restriction de D à V est un isomorphisme (a priori algébrique) continu sur R. Comme V et R sont des espaces de Fréchet, d'après le théorème de l'application ouverte, $D : V \longrightarrow R$ est un isomorphisme topologique. Il admet donc un inverse continu $G_0 : R \longrightarrow V$. On pose $G = G_0(I - P)$ où I est l'opérateur identité sur $C^\infty(M)$. Alors G est un inverse à droite de D *i.e.* $DG = I - P$. Comme P est compact (car de rang fini), l'opérateur G est une *paramétrix* de D.

5. Montrons maintenant que D est globalement hypoelliptique. Soit T une distribution sur M telle que $DT = u \in C^\infty(M)$. Alors, pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$, on a :

$$\langle u, f\rangle = \langle DT, f\rangle = -\langle T, Df\rangle.$$

En particulier, pour $f \equiv 1$, on a : $0 = -\langle T, D \cdot 1\rangle = \langle DT, 1\rangle = \langle u, 1\rangle = \int_M u\omega = P(u)$, et donc $u \in R$; il existe alors une fonction $h \in V \subset C^\infty(M)$ telle que $Dh = u$. Par suite $D(T - h) = 0$ *i.e.* $T - h$ est une distribution invariante ; et puisque l'espace $H^1_{\mathcal{F}}(M)$ (dont le dual est l'espace des distributions invariantes par X) est de dimension 1, elle est multiple par une constante de ω et par suite régulière *i.e.* $(T - h) \in C^\infty(M)$. Ceci implique $T \in C^\infty(M)$ et montre que D est globalement hypoelliptique. (Comme D est injectif sur V, on a en fait $T = h$.) $\square$

7. Quelques questions ouvertes

Peut-être qu'elles sont plus facilement attaquables que les deux conjectures de Katok et celle de Greenfield-Wallach !

7.1. Rappelons ce qui se passe sur le cercle pour une rotation d'angle $\theta = 2\pi\alpha$ avec $\alpha \in]0,1[$ irrationnel. (On en a déjà un peu parlé à la section 3.)

1. Si α est diophantien, l'evt $H^1(\Gamma, C^\infty(\mathbb{S}^1))$ est séparé et isomorphe à $\mathbb{C}$, engendré par la fonction constante égale à 1. Les deux espaces $\mathcal{M}_\Gamma(\mathbb{S}^1)$ et $\mathcal{D}_\Gamma(\mathbb{S}^1)$ sont aussi isomorphes à $\mathbb{C}$, chacun engendré par la mesure de Lebesgue dx.

2. Si α est de Liouville :

– $H^1(\Gamma, C^\infty(\mathbb{S}^1))$ est un evt de dimension infinie non séparé. Mais $\overline{H}^1(\Gamma, C^\infty(\mathbb{S}^1))$ (qui est bien sûr séparé) est isomorphe à $\mathbb{C}$, engendré par la fonction constante égale à 1.

– Les deux espaces $\mathcal{M}_\Gamma(\mathbb{S}^1)$ et $\mathcal{D}_\Gamma(\mathbb{S}^1)$ sont aussi isomorphes à $\mathbb{C}$ et engendrés par la mesure de Lebesgue dx.

3. Sans hypothèse sur la nature arithmétique de α :

– l'evt $\overline{H}^1(\Gamma, C^0(\mathbb{S}^1))$ est séparé et isomorphe à $\mathbb{C}$ engendré par la fonction constante $\mathbf{1}$. Mais $H^1(\Gamma, C^0(\mathbb{S}^1))$ est un evt de dimension infinie non séparé ; ça découle par exemple du théorème qui suit démontré dans [MS] :

Soit $C^0_{vb}(\mathbb{S}^1)$ l'espace des fonctions $\mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{C}$ continues et à variation bornée muni de la norme de la convergence uniforme. Alors il existe une partie $\mathcal{R} \subset C^0_{vb}(\mathbb{S}^1)$ réunion dénombrable d'ouverts denses telle que, pour toute fonction $g \in \mathcal{R}$, il n'existe aucune fonction continue $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $f - f \circ \gamma = g$.

– L'espace $\mathcal{M}_\Gamma(\mathbb{S}^1)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$, engendré par la mesure de Lebesgue dx.

4. Le calcul de l'espace vectoriel $H^1(\Gamma, C^\infty(\mathbb{S}^1))$ reste complètement ouvert lorsque γ est topologiquement conjugué à une rotation mais ne l'est pas différentiablement. On sait aussi que la dimension de l'espace $\mathcal{M}_\Gamma(\mathbb{S}^1)$ est au moins 1 : existence d'une mesure invariante par un groupe moyennable (c'est le cas de $\mathbb{Z}$) agissant sur un espace compact. Étienne Ghys a posé la question suivante : *Cette mesure invariante est-elle en fait la seule distibution invariante par ce difféomorphisme* ? A. Avila et A. Kocsard y ont répondu positivement [AK].

7.2. Maintenant on regarde le cercle comme $P^1(\mathbb{R})$ et Γ est engendré par le difféomorphisme γ induit par une application linéaire $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

On désigne par A l'un des espaces $C(P^1(\mathbb{R}))$ et $C^\infty(P^1(\mathbb{R}))$.

Déterminer $H^1(\Gamma, A)$, $\overline{H}^1(\Gamma, A)$, $\mathcal{M}_\Gamma(P^1(\mathbb{R}))$ et $\mathcal{D}_\Gamma(P^1(\mathbb{R}))$.

Une approche pour la détermination de l'espaces $H^1(\Gamma, C^\infty(P^1(\mathbb{R})))$ a été entamée dans [Ek1]. Mais le cas qui a posé problème pendant un moment est celui de l'automorphisme *parabolique* donné par la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il vient d'être réglé dans [EDA].

7.3. M **est un groupe de Lie** G

Le cas où G est compact et γ une translation a été déjà étudié dans [EH] avec, une extension à γ affine lorsque G est le tore $\mathbb{T}^n$. Reste quand même à calculer les espaces $H^1(\Gamma, A)$, $\overline{H}^1(\Gamma, A)$, $\mathcal{M}_\Gamma(P^1(\mathbb{R}))$ et $\mathcal{D}_\Gamma(P^1(\mathbb{R}))$ pour :

1. G non compact et γ une transformation "affine" du type $x \longmapsto \tau_b(Ax)$ où A est un automorphisme de G et τ_g est la translation à droite associée à $b \in G$.

2. G non abélien quelconque et γ est un automorphisme intérieur $x \longmapsto g^{-1}xg$ associé à $g \in G \backslash Z(G)$ où $Z(G)$ est le centre de G. Comme toujours, il s'agit de résoudre l'équation cohomologique $\varphi - \varphi \circ \gamma = \psi$ avec $\psi \in C^\infty(G)$ donnée. Le difféomorphisme γ fixe tous les éléments du centralisateur C_g (sous-groupe, forcément fermé, dont les éléments commutent à g) et donc, pour que cette équation cohomologique admette une solution, il est nécessaire que ψ s'annule sur C_g. Dans quelle situation cette condition est-elle suffisante ?

7.4. M est l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

Là on considère un difféomorphisme $\gamma : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ qui fixe l'origine et on s'intéresse au calcul des espaces $H^1(\Gamma, C^\infty(M))$, $H^1(\Gamma, C^0(M))$, $\overline{H}^1(\Gamma, C^\infty(M))$, $\overline{H}^1(\Gamma, C^0(M))$.

On sait calculer les espaces $H^1(\Gamma, C^\infty(M))$, $\overline{H}^1(\Gamma, C^\infty(M))$ et $\overline{H}^1(\Gamma, C^0(M))$ lorsque γ est un automorphisme linéaire de matrice A telle que $|||A||| < 1$ (*cf.* [LZ]).

De façon générale, ces questions restent encore ouvertes pour γ quelconque ou γ linéaire de matrice A avec $|||A||| = 1$.

7.5. Déformations des feuilletages de Lie

On se donne un groupe de Lie connexe G et un sous-groupe dénombrable Γ. Ce dernier agit (par translations à gauche) sur G, et donc, comme d'habitude, sur l'espace de Fréchet $C^\infty(G)$ des fonctions C^∞ (réelles ou complexes) sur G.

Problème : *Calculer l'espace vectoriel* $H^1(\Gamma, C^\infty(G))$.

L'algèbre des champs de vecteurs invariants à gauche sur G s'identifie naturellement à l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G. Celle $\mathfrak{X}(G)$ de tous les champs est le produit tensoriel $C^\infty(G) \otimes \mathcal{G}$. Comme l'action de Γ sur $\mathcal{G}$ est triviale, elle s'étend à $\mathfrak{X}(G) = C^\infty(G) \otimes \mathcal{G}$ qui devient ainsi un Γ-module.

Dans le cas où la paire (G, Γ) provient d'un G-feuilletage de Lie $\mathcal{F}$ de groupe d'holonomie Γ sur une variété compacte M, l'espace $H^1(\Gamma, C^\infty(G)) \otimes \mathcal{G}$ s'identifie à l'espace $H^1_{\mathcal{F}}(M, \mathcal{V})$ (où $\mathcal{V} = TM/T\mathcal{F}$ est le fibré normal de $\mathcal{F}$) des déformations infinitésimales de la variété feuilletée $(M, \mathcal{F})$ (*cf.* [Ek3]). D'où l'intérêt géométrique du problème qu'on vient de poser !

7.6. Hahn-Banach équivariant

Soient E un espace de Fréchet complexe (qui peut être bien sûr un espace de Banach) sur lequel un groupe topologique Γ agit par automorphsimes, c'est-à-dire il existe un morphisme continu ρ (qu'on supposera injectif) du groupe Γ dans le groupe $\mathrm{Aut}(E)$ des bijections linéaires bicontinues $E \longrightarrow E$.

On suppose aussi que Γ agit linéairement sur le corps $\mathbb{C}$ *i.e.*, on a une repésentation χ de Γ (qui, souvent, n'est pas injective) de Γ dans le groupe multiplicatif $\mathbb{C}$.

On dira qu'une fonctionnelle (une forme linéaire continue) $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ est Γ-*équivariante* si, pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $x \in E$ on a $f(\rho(\gamma)(x)) = \chi(\gamma)(f(x))$, qu'on écrira simplement $f(\gamma x) = \gamma f(x)$.

Question : *Soient V un sous-espace fermé de E invariant par Γ (vérifiant $\gamma(V) = V$ pour tout $\gamma \in \Gamma$) et $f_0 : V \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonctionnelle Γ-invariante. Existe-t-il une fonctionnelle Γ-invariante $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $f_{|V} = f_0$?*

Ce serait recommandable de commencer par $\Gamma = \mathbb{Z}$. Dans ce cas la représentation ρ est donnée par l'image de $1 \in \mathbb{Z}$ qui est un opérateur D sur E, inversible et bicontinu. Celle de χ

est un scalaire complexe non nul a. Il s'agit donc de montrer l'existence du prolongement f de f_0 vérifiant encore la condition $f(Dx) = af(x)$.

7.7. Prolongement des distributions invariantes

Soient M une variété (différentiable, connexe...) sur laquelle agit un groupe topologique Γ et $F \subset M$ un fermé Γ-invariant. Le complémentaire $\Omega = M \setminus F$ est un ouvert Γ-invariant. On a une injection naturelle $C_0^\infty(\Omega) \hookrightarrow C_0^\infty(M)$; d'où une application de *localisation* au niveau des distributions $\mathcal{L} : \mathcal{D}(M) \longrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$: si T est une distribution sur M, $\mathcal{L}(T)$ sera simplement sa restriction à l'ouvert Ω. Le noyau de $\mathcal{L}$ est l'espace $\mathcal{D}(M, F)$ des distributions sur M dont le support est contenu dans le fermé F. On a donc une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}(M, F) \hookrightarrow \mathcal{D}(M) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{D}(\Omega).$$

Comme l'ouvert Ω et le fermé F sont invariants par l'action de Γ cette suite exacte en induit une au niveau des espaces de distribtions invariantes :

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}_\Gamma(M, F) \hookrightarrow \mathcal{D}_\Gamma(M) \xrightarrow{\mathcal{L}_\Gamma} \mathcal{D}_\Gamma(\Omega).$$

Question : *Sous quelles conditions les localisation $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}_\Gamma$ sont-elles surjectives ?*

Ce type de problème a été étudié pour les courants (voir [EMM]) dans le cas de la sphère $M = \mathbb{S}^n$ sur laquelle agit un groupe kleinéen Γ de transformations conformes de $\mathbb{S}^n$; le fermé F est l'ensemble limite $\Lambda(\Gamma)$ du groupe Γ.

Références

[ABN] Abouqateb, A., Boucetta, M. & Nabil, M. *Cohomology of coinvariant differential forms.* Journal of Lie Theory 28, no. 3 (2018), 829-841.

[AK] Avila, A. & Kocsard, A. *Cohomological equations and invariant distributions for minimal circle diffeomorphisms.* Duke Math. J. Volume 158, Number 3 (2011), 501-536.

[Bo] Bourbaki, N. *Éléments de mathématique. Topologie algébrique. Chapitres 1 à 4.* Springer (2016).

[Br] Brown, K.S. *Cohomology of Groups.* GTM Vol. 87, Springer-Verlag (1982).

[DE] Dehghan-Nezhad, A. & El Kacimi Alaoui, A. *Équations cohomologiques de flots riemanniens et de difféomorphismes d'Anosov.* Journal of the Math. Society of Japan, Vol. 59 No 4 (2007), 1105-1134.

[Dc] Delacroix, F. *Invariant currents and automorphic forms of an elementary Kleinin group.* Hokkaido Math. J. Vol. XXX No 2 (2001), 405-430.

[EDA] Edo, S.N., Diallo, H. et Adou, T.É. *Équations cohomologiques d'une homographie de la droite projective réelle.* Annales Mathématiques Africaines, Vol. 8, (2020), 27-46.

[Ek1] El Kacimi Alaoui, A. *Aspects analytiques et cohomologiques des variétés feuilletées.* Thèse de Doctorat d'État, Université de Lille (1986).

[Ek2] El Kacimi Alaoui, A. *Cohomologie feuilletée du flot affine de Reeb sur* $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1$. Grad. J. Math. 4 (2019), No 2, 85-95.

[Ek3] El Kacimi Alaoui, A. *Foliated cohomology and infinitesimal deformations of developable foliations.* (December 2024). To appear in Journal of Topology and Analysis.

[EMM] El Kacimi Alaoui, A., Matsumoto, S. & Moussa, T. *Currents invariant by a Kleinian group.* Hokkaido Math. J. Vol. 26 (1997), 177-202.

[EH] El Kacimi, A. & Hmili, H. *Cohomological equations and invariant distributions on a compact Lie group.* Hokkaido Math. J. Vol. 43 (2014), 151-173.

[FFR] Flaminio, L., Forni, G. & Rodriguez Hertz, F. *Invariant distributions for homogeneous flow and affine transformations.* arXiv:1303.7074v2 [math.DS] 22 Jul 2015.

[Fo] Forni, G. *On the Greenfield-Wallach and Katok conjectures in dimension three.* In Contemp. Math. 469 (2008), 197213, in Geometric and Probabilistic Structures in Dynamics.

[Gr] Grothendieck, A. *Sur quelques points d'algèbre homologique.* Tohoku Math. J. Vol. 9 (1957) 119-221.

[GW] Greenfield, S. & Wallach, N. *Globally hypoelliptic vector fields.* Topology 12, (1973), 247-253.

[Ha] Hafliger, A. *Some remarks on foliations with minimal leaves.* J. Diff. Geom. 15, (1980), 269-284.

[Ka] Katok, A. (in collaboration with E.A. Robinson.) *Cohomology and combinatorial constructions in ergodig theory.* Proc. Sympo. Pure Math. 69 '*Smooth ergodic theory and its applications*' (Seattle, WA, 1999), 107-173, AMS 2001.

[LZ] Leclercq, R. & Zeggar, A. *On the cohomological equation of a linear contraction.* Prépublication LMI, UPHF (March 2020).

[MS] Matsumoto, S. & Shishikura, M. *Minimal sets of certain annular homeomorphisms.* Hiroshima Mathematical Journal 32 (2002), 207-215.

[Yo] Schwartz, L. *Théorie des distributions.* Hermann (1966).

[Yo] Yoccoz, J.C. *Petits diviseurs en dimension un.* Astérisque 231 (1995).

[Ze] Zeggar, A. *Équation cohomologique pour un automorphisme hyperbolique du tore* $\mathbb{T}^n$. Prépublication LMI, UPHF (2020).

Université Polytechnique Hauts-de-France
DMATHS-CERAMATHS
F-59313 Valenciennes Cedex 9, France
http://perso.numericable.fr/azizelkacimi/