TROISIÈME COLLOQUE MAGHRÉBIN DE GÉOMÉTRIE, TOPOLOGIE ET SYSTÈMES DYNAMIQUES

Marrakech du 28 mai au 2 juin 2007

www.fstg-marrakech.ac.ma/colloque/ggtm.html

Organisé par

GGTM

Équipe GTA de l'Université Cadi Ayyad

Cité des Géométries de Maubeuge

COMPTE RENDU

par

A. El Kacimi

(Coordinateur du GGTM)

Comité d'organisation :

H. Abchir, A. Abouqateb, M. Boucetta, A. El Kacimi, A. Ikemakhen

Comité scientifique :

M. Boucetta, A. El Kacimi, E. Salhi, A. Zeghib

Le GGTM (Groupement pour le développement de la Géométrie et la Topologie au Maghreb) a tenu son Troisième Colloque de Géométrie, Topologie et Systèmes dynamiques du 28 mai au 1er juin 2007 à la Faculté des Sciences et Techniques de Marrakech. Il a été suivi le 2 juin d'une Journée Pédagogique de Géométrie à l'Institut Français de Marrakech. Les deux autres organismes qui ont coorganisé ces activités sont l'Équipe GTA de l'Université Cadi Ayyad et la Cité des Géométries de Maubeuge. Les activités scientifiques ont consisté en des conférences sur des sujets avancés, des communications (en grande majorité par des doctorants et postdoctorants), une conférence pédagogique en géométrie projective par Valerio Vassallo et la présentation d'un film en cours d'élaboration par Etienne Ghys.

Remerciements

Ce colloque a vu le jour grâce au soutien financier des organismes listés ci-après. À des titres et niveaux divers, ils nous ont apporté une aide substantielle. Nous leur exprimons nos sincères remerciements et toute notre gratitude.

– L'Université Cadi Ayyad de Marrakech ainsi que la Faculté des Sciences et Techniques de Guéliz qui, en plus de son aide, a hébergé le colloque.

– La Cité des Géométries de Maubeuge, la ville de Maubeuge, la Communauté d'Agglomération de Maubeuge et du Val de Sambre (AMVS), le Conseil Régional du Nord - Pas de Calais et le Conseil Général du Nord.

– Le CNRST (Centre National de la Recherche Scientifique et Technique) dans le cadre du PROTARS III (Programme Thématique d'Appui à la Recherche Scientifique).

– ICTP (International Centre for Theoretical Physics) à Trieste.

– Le CIMPA (Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées) à Nice (France).

– L'AUF (Agence Française pour la Francophonie) à Paris.

– Le Service Culturel de l'Ambassade de France à Rabat.

Merci à l'Institut Français de Marrakech qui nous a accueillis dans ses locaux pour la Journée Pédagogique du colloque.

Conférences avancées

M. Boileau (Université P. Sabatier, Toulouse)
Sur les applications de degré non nul entre variétés de dimension 3

A. Bouarich (Université de Marrakech)
Suite spectrale de Hochschild-Serre en cohomologie bornée réelle

M. Deffaf (USTBH, Alger)
Rigidité des actions de groupes de Lie semi-simples sur une variété lorentzienne

M. El Hamdadi (USF, Etats-Unis)
Self-distributivity, cohomology and knot invariants

E. Ghys (CNRS, ENS de Lyon. Membre de l'Académie des Sciences)
Les nœuds de Lorenz

H. Marzougui (Faculté des Sciences de Bizerte)
Homéomorphismes de classe P conjugués à des rotations et mesures invariantes

S. Matsumoto (Nihon University, Tokyo)
Parameter rigid flows on 3*-manifolds*

A. Médina (Université de Montpellier II)
Structure des groupes de Lie symplectiques et application moment

G. Meigniez (Université de Bretagne Sud, Vannes)
Le théorème de Novikov généralisé

M. Nicolau (Universitat Autònoma de Barcelona)
Variétés complexes et espaces d'orbites

P. Pang (National University of Singapore)
Stationary Patterns of Predator-Prey Models

R. Parthasarathy (Tata Institute of Fundamental Research, Bombay)
Unitary representations, Dirac operator inequality and cohomology

C. Petronio (Università di Pisa)
Le problème d'existence de Hurwitz

A. Sebbar (Université d'Ottawa)
Introduction au Moonshine

R. Souam (CNRS, Université de Paris VII)
Surfaces ombiliques dans les variétés de dimension 3

A. Verjovsky (UNAM, Cuernavaca (Mexique))
On the moduli space of certain smooth foliations of the 5-sphere by complex surfaces

P. Vogel (Université de Paris VII)
Catégorie de Temperley-Lieb coloriée

S. Zarati (Université de Tunis)
Actions de groupes, cohomologies équivariantes et profondeurs

Communications

E. Bekkara (Université d'Oran)
Rigidité des métriques riemanniennes dégénérées

H. Belbachir (USTHB, Alger)
Sur l'hyperdéterminant de Gramm

B. Dali (Faculté des Sciences de Bizerte)
Paramétrisation des orbites coadjointes de $\mathbb{R}^n \rtimes \mathbb{R}$

F. El Wassouli (Université Ibn Tofail, Kénitra)
Théorème de type Fatou

M.I. Mamouni (Université Hassan II, Casablanca)
Une minoration de la dimension cohomologique

S. Otmani (Université de Vannes)
Raffinement du calcul de Kirby pour les sphèrs d'homologie entière paires

N. Rahmani (Université d'Oran)
Géométrie lorentzienne des groupes de Lie unimodulaires

S. Rahmani (Université d'Oran)
Classification des variétés naturellement réductives de dimension 3

C. Rousseau (Université de Valenciennes)
Déformations de réseaux : un exemple dans les groupes de Lie résolubles

J. Slimène (Faculté des Sciences de Monastir)
Le problème du $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}$ *sur le tore hyperbolique* $\mathbb{T}_A^{n+1}$

Z. Souici (Université Mokhtar, Annaba)
Connexions et feuilletages legendriens

Conférences pédagogiques

E. Ghys (CNRS, ENS de Lyon. Membre de l'Académie des Sciences)
Représenter la terre sur une feuille de papier, le problème de la cartographie

V. Vassallo (Université de Lille I et Cité des Géométries)
De quel endroit la photo a-t-elle été prise ?

Les autres participants (chercheurs, enseignants-chercheurs, étudiants ou autres) étaient très nombreux et venaient de pays divers comme l'atteste la liste complète qui suit.

Participants

Nom et prénom	Institution	Adresse électronique
ABCHIR Hamid	Univ. Hassan II, Casablanca	h_abchir@menara.ma
ABOUQATEB Abdelhak	FSTG, Marrakech	abouqateb@fstg-marrakech.ac.ma
BADDOU Jamal	Ministère, Rabat	jbaddou@hotmail.com
BAHAYOU Amine	Université de Ouargla	amine_bahayou@yahoo.fr
BARRE Raymond	Université de Valenciennes	raymond.barre@univ-valenciennes.fr
BEKKARA Esmaà	Université d'Oran	bekkara.esmaa@gmail.com
BELBACHIR Hacène	USTHB, Alger	hacenebel@yahoo.fr
BENAISSA Hicham	FSTG, Marrakech	memoire_hicham@yahoo.fr
BENAYADI Saïd	Université de Metz	benayadi@univ-metz.fr
BEN CHARRADA Rochdi	Faculté des Sciences, Sfax	rochdi_charrada@yahoo.fr
BENHAMMADI Abdelali	FSTG, Marrakech	
BENMOUHOUB Naïma	USTHB, Alger	benmouhoubn@gmail.com
BENMOULOUD Samira	Université Ibn Tofail, Kénitra	ben.sam@netcourrier.com
BENROUMANNE Abderrazzak	FSTG, Marrakech	benreman@yahoo.fr
BENZEMMOURI Tayeb	USTHB, Alger	benzem1@yahoo.fr
BOILEAU Michel	Université P. Sabatier, Toulouse	boileau@picard.ups-tlse.fr
BOUARICH Abdeslem	Univ. Cadi Ayyad, Marrakech	bouarich1@yahoo.fr
BOUCETTA Mohamed	FSTG, Marrakech	mboucetta2@yahoo.fr
BOURAOUI Radia	USTHB, Alger	bouraoui_radia2002@yahoo.fr
CHAOUCH Mohamed Ali	Faculté des Sciences, Bizerte	MohamedAli.chaouch@fsb.rnu.tn
DALI Béchir	Faculté des Sciences, Bizerte	bechir.dali@yahoo.fr
DEFFAF Mohamed	USTHB, Alger	deffaf1@yahoo.fr
DEGAICHI Nouar	USTHB, Alger	nouar_degaichi@yahoo.fr
DIDA Hamou	Centre Universitaire, Saida	didamohammed@yahoo.fr
DJERFI Kouider	Centre Universitaire, Saida	djorfik@gmail.com
EL BOUAYADI Abderrazzak	FSTG, Marrakech	
EL HAMDADI Mohamed	USF	emohamed@math.usf.edu
EL KACIMI Aziz	Université de Valenciennes	aziz.elkacimi@univ-valenciennes.fr
EL WASSOULI Fouzia	Université Ibn Tofail, Kénitra	f_elwassouli@yahoo.fr
GAMARA Najoua	Faculté des Sciences, Tunis	ngamara7@yahoo.fr
GHYS Étienne	CNRS, ENS de Lyon	etienne.ghys@umpa.ens-lyon.fr
HADDAGI Brahim	FSTG, Marrakech	brahim_gt@yahoo.fr
HATHOUT Fouzi	Centre Universitaire, Saïda	f.hathout@caramail.com
HATTAB Hawète	ISIM, Sfax	thwtwtt@yahoo.fr
HECTOR Gilbert	Université de Lyon 1	gilbert.hector@free.fr

Hilali Rachid	Univ. Hassan II, Casablanca	rhilali@hotmail.com
Hmili Hadda	Faculté des Sciences, Bizerte	hajermido@yahoo.fr
Hmimina Bouchta	Université d'Agadir	bhmimina@hotmail.com
Ikemakhen Aziz	FSTG, Marrakech	ikemakhen@fstg-marrakech.ac.ma
Jmel Abdelrazak	Faculté des Sciences, Sfax	jmel_abdelrazak@yahoo.fr
Kaabi Nizar	ISET, Kef	coriolon@yahoo.fr
Kassi M'hamed	Université Ibn Tofail, Kénitra	mhamedkassi@yahoo.fr
Liousse Isabelle	Université de Lille I	isabelle.liousse@math.univ-lille1.fr
Mamouni My Ismaïl	Faculté des Sciences, Casa	myismail1@menara.ma
Marzougui Habib	Faculté des Sciences, Bizerte	habib.marzouki@fsb.rnu.tn
Matsumoto Shigenori	Nihon University, Tokyo	matsumo@math.cst.nihon-u.ac.jp
Medina Alberto	Université de Montpellier 2	medina@math.univ-montp2.fr
Meigniez Gaël	UBS, Vannes	gael.meigniez@univ-ubs.fr
Meziani Rafik	Université Ibn Tofail, Kénitra	rmeziani@yahoo.fr
Morvan Jean-Marie	Université de Lyon I	morvan@math.univ-lyon1.fr
Mostefai Fatima-Zohra	USTHB, Alger	fatymath@gmail.com
Nasri Rafik	Centre Universitaire, Saida	rmag1math@yahoo.fr
Nicolau Marcel	UA, Barcelona	nicolau@mat.uab.es
Otmani Souad	UBS, Vannes	souadotmani@yahoo.fr
Pang Peter	NU of Singapore	usppyh@nus.edu.sg
Parthasarathy Rajagopalan	Tata Institute, Bombay	sarathy@math.tifr.res.in
Petronio Carlo	Università di Pisa	petronio@dm.unipi.it
Rahmani S.	Université d'Oran	ramses161616@yahoo.fr
Rahmani Noureddine	Université d'Oran	ramses161616@yahoo.fr
Rami Youssef	Université My Ismail, Meknès	yrami@fs-umi.ac.ma
Raouyane Mohamed	ENS Takaddoum, Rabat	mraouyane@gmail.com
Rezig Zouhour	Faculté des Sciences de Bizerte	zouhourezig@yahoo.fr
Rousseau Cédric	Université de Valenciennes	cedric.rousseau@univ-valenciennes.fr
Salhi Ezzeddine	Faculté des Sciences, Sfax	ezzeddine.salhi@fss.rnu.tn
Sbaï Mohamed	Université Ibn Tofail, Kénitra	sbaisimo@netcourrier.com
Sebbar Abdellah	Université de Ottawa	asebbar@uottawa.ca
Slimène Jihène	Faculté des Sciences, Monastir	jihene.slimene@yahoo.fr
Smai Djamel	USTHB, Alger	djamel_smai@yahoo.fr
Souam Rabah	CNRS, Université de Paris VII	souam@math.jussieu.fr
Souici Zobida	Université Mokhtar, Annaba	zbenhamadi2000@yahoo.fr
Terfasse Leila	USTHB, Alger	lila_sebaa@yahoo.fr
Trincaretto Francis	Cité des Géométries, Maubeuge	cite-des-geometries@wanadoo.fr
Vassallo Valerio	Université de Lille I	valerio.vassallo@math.univ-lille1.fr
Verjovsky Alberto	UNAM, Cuernavaca	alberto@matcuer.unam.mx
Vogel Pierre	Université de Paris VII	vogel@math.jussieu.fr
Zarati Saïd	Faculté des Sciences, Tunis	said.zarati@fst.rnu.tn
zeghib Abdelghani	CNRS, ENS de Lyon	abdelghani.zeghib@umpa.ens-lyon.fr

Résumés des conférences

Sur les applications de degré non nul entre variétés de dimension 3

Michel Boileau

M. Gromov a introduit une relation naturelle entre variétés fermées orientables de dimension $n > 1$. Une variété domine une autre s'il existe une application de degré non nul de la première sur la seconde. Cette relation est bien comprise dans le cas des surfaces, mais devient mystérieuse déjà en dimension 3. Le but de cet exposé est d'étudier quelques propriétés de cette relation. En particulier, on montrera qu'une variété fermée, orientable, de dimension 3 domine au plus un nombre fini de sphères d'homologie entière. Ce résultat va dans le sens d'une réponse positive à la conjecture qu'une variété fermée, orientable, de dimension 3 domine au plus un nombre fini de variétés asphériques.

Expression de la différentielle d_3 de la suite spectrale de Hochschild-Serre en cohomologie bornée réelle

Abdeslem Bouarich

Dans cet exposé, on construit deux classes de cohomologie pour un groupe discret G. La première est une 2-classe de cohomologie bornée de G notée $\mathbf{g}_2$ et dont on montre qu'elle est une obstruction à la nullité du deuxième groupe de cohomologie bornée de G. La deuxième est associée à un morphisme $\theta : \Pi \longrightarrow \mathrm{Out}(G)$ et est une 3-classe de cohomologie bornée notée $[\theta]$. On montre que, si $\theta : \Pi \longrightarrow \mathrm{Out}(G)$ est induit par une extension de groupes discrets $1 \longrightarrow G \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{\sigma} \Pi \longrightarrow 1$, alors la différentielle d_3 de la suite spectrale de Hochschild-Serre de cette extension envoie la classe $\mathbf{g}_2$ sur la classe $[\theta]$. On donne aussi une formule explicite pour la différentielle $d_3 : E_3^{n,2} \longrightarrow E_3^{n+3,0}$ pour tout $n \geq 0$ en termes de cup-produit par la classe $[\theta]$.

Rigidité géométrique des actions de groupes de Lie semi-simples sur une variété lorentzienne

Mohamed Deffaf

Notre exposé rentre dans le cadre de la classication des couples (G, M) où G est un groupe de Lie agissant isométriquement sur une variété lorentzienne M. Dans un premier temps, ce problème a été considéré dans le cas compact (*i.e.* M compacte) par Zimmer (1986), Gromov (1988), Adams (1997) et Zeghib (1998). Dans le cas général, un nouvel aspect a été introduit par Kowalsky (1994, 1995, 1997) qui compense la compacité par une condition dynamique (la non propreté de l'action), ainsi elle arrive à énoncer un ensemble de huit théorèmes, mais elle n'a prouvé que la moitié. Parmi ces résultats, elle a montré que parmi les groupes simples de centre fini, seuls les groupes localement isomorphes à $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, $\mathrm{O}(1n)$ ou $\mathrm{O}(2, n)$ peuvent agir isométriquement sur une variété lorentzienne. Une question naturelle se pose alors sur la nature de la variété. Dans ce travail, on s'intéresse à donner une caractérisation partielle de la variété M. D'abord, on montre que dans l'action isométrique d'un groupe de Lie G sur une variété lorentzienne, l'existence d'une orbite de type Lorentzien N, avec une action irréductible de son sous-groupe d'isotropie sur TN, entraîne que N est à courbure sectionnelle constante, que le groupe G est un produit d'un groupe K par la composante connexe du groupe d'isométries de N et que N admet un voisinage qui est un produit tordu de N par une variété riemannienne L. On montre aussi que l'irréductibilité de l'action du sous-groupe d'isotropie de N sur TN est intrinsèque dans le cas où G est semi-simple. Ensuite, on montre un théorème qui reduit l'étude des actions isométriques, non propres des groupes de Lie sem-simple de centre fini sur les variétés lorentziennes, l'étude des espaces homogènes. Plus précisément, on montre qu'une action isométrique non propre d'un groupe de Lie semi-simple de centre fini G sur une variété lorentzienne entraîne l'existence d'une orbite non propre.

Self-distributivity, cohomology and knot invariants

Mohamed El Hamdadi

Quandle cohomology was introduced in 2000 by Carter et al. as a variation of rack cohomology of Fenn-Rourke-Sanderson. The theory was developed to define invariants of classical knots and knotted surfaces in state sum form called quandle cocycle invariants. In this talk, we will review the cohomology theory, cocycle invariants and show some examples. We will then show some recent development by presenting a cohomology theory that encompasses both Lie algebra and quandle cohomologies. If time permits, we will mention a relation to the cohomoloy of the adjoint of Hopf algebras. The talk will be based on a joint work with S. Carter, A. Crans and M. Saito.

Les nœuds de Lorenz

Étienne Ghys

L'attracteur de Lorenz est un exemple classique de système dynamique dans l'espace usuel, à l'origine de la fameuse image de l'"effet papillon". Les trajectoires périodiques définissent des "nœuds de Lorenz". Je voudrais faire le point sur ce qui est connu sur ces nœuds mais surtout sur ce qui n'est pas connu...

Homéomorphismes de classe P, C^r par morceaux ($r \geq 1$) conjugués à des rotations et mesures invariantes

Habib Marzougui

On donne une caractérisation des homéomorphismes f de classe P, C^r par morceaux ($r \geq 1$) du cercle de nombre de rotation irrationnel qui sont C^r par morceaux conjuguées à des C^r- difféomorphismes et par conséquent, sous conditions diophantiennes, à des rotations d'après [4]. Cette caractérisation étend celles obtenues par I. Liousse pour les homéomorphismes affines par morceaux du cercle ([5]) et par Dzhalilov pour les homéomorphismes de classe P de nombre de rotation de type constant [2]. En particulier, si f est un homéomorphisme de classe P, C^1 par morceaux dont le produit des sauts aux points de coupure situés sur la même orbite est égal à 1 alors f est conjugué à un C^r-difféomorphisme par un homéomorphisme C^r par morceaux pour tout $r \geq 1$. Comme conséquence, nous montrons que si f est de classe P, $C^{2+\varepsilon}$ par morceaux de nombre de rotation irrationnel et si les points de coupure de f sont sur une même orbite dont le produit des sauts de f en ces points n'est pas égal à 1, alors la mesure invariante μ_f est singulière par rapport à la mesure de Haar ; ceci généralise un théorème de Dzhalilov et Khanin([1]). Nous montrons aussi que tout sous-groupe du groupe $\mathcal{P}^r(\mathbb{S}^1)$ d'homéomorphismes de classe P, C^r par morceaux du cercle, engendré par un nombre fini d'éléments commutant deux à deux et de nombres de rotation irrationnels et rationnellement indépendants est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{Diff}^r_+(\mathbb{S}^1)$, et par conséquent, tout sous-groupe de $\mathcal{P}^\infty(\mathbb{S}^1)$ (resp. $\mathcal{P}^\omega(\mathbb{S}^1)$), est conjugué, sous condition diophantienne simultannée, à un sous-groupe de rotations ; c'est lanalogue du théorème de Fayad-Khanin [3] obtenu pour le groupe $\mathrm{Diff}^1_+(\mathbb{S}^1)$ (resp. $\mathrm{Diff}^\infty_+(\mathbb{S}^1)$).

Références

[1] Dzhalilov, A. & Khanin, K. M. *On invariant measure for homeomorphisms of a circle with a break point.* Functional Analysis and its Applications, Vol. 32 N. 3, (1998), 153-161.

[2] Dzhalilov, A. *Piecewise smoothness of conjugate homeomorphisms of a circle with corners.* Theoretical and Mathematical Physics, Vol.120, N. 2, (1999), 961972.

[3] Fayad, B. & Khanin, K. *Smooth linearization of commuting circle diffeomorphisms.* ArXiv: math. DS/0605214 v1 (2006).

[4] Katznelson,& Y. Ornstein, D. *The absolute continuity of the conjugation of certain diffeomorphisms of the circle.* Ergod. Th. & Dynam. Syst. 9 N. 4, (1989),681690.

[5] Liousse, I. *PL Homeomorphisms of the circle which are piecewise C^1-conjugate to irrational rotations.* Bull. Braz. Math. Soc. New Series 35(2) (2005), 269280.

Parameter rigid flows on 3-manifolds

Shigenori Matsumoto

A smooth flow on a closed manifold M generated by a nonsingular vector field X is called *parameter rigid* if for any smooth function f the flow of $e^f X$ is smoothly conjugate to the flow of $e^c X$ for some constant c, through a conjugacy which preserves the orbits. Examples are linear flows on the n-torus with badly approximable (Diophantine) slopes. A question raised by Anatole Katok is to prove or disprove that they are the only ones. Here we get some partial answers to this problem in dimension three.

Theorem 1. *If the closed 3-manifold is not a rational homology sphere, then a parameter rigid flow on it is smoothly conjugate to the above linear flow.*

We also consider the case of rational homology sphere M. If there is a parameter rigid flow on it, then it is shown to be the Reeb flow of some contact form. But we cannot go forwads from this point, and we are just waiting for the solution of the Weinstein conjecture. In higher dimensions we have:

Theorem 2. *If the manifold M has cup length equal to the dimension, then the parameter rigid flow on it is smoothly conjugate to the above linear flow.*

Structure des groupes de Lie symplectiques et application moment

Alberto Médina

Un groupe de Lie muni d'une forme symplectique invariante à gauche est appelé *groupe de Lie symplectique*. Si de plus, l'action naturelle à gauche du groupe sur lui-même est hamiltonienne, le groupe est dit *hamiltonien*. Nous décrivons l'architecture des groupes symplectiques connexes à l'aide de sous-groupes fermés distingués connexes non triviaux (et de leurs orthogonaux symplectiques) dont nous prouvons l'existence. Si le groupe est hamiltonien, l'application moment permet de montrer que le groupe est une double extension symplectique, au sens de Médina-Revoy, d'un groupe de Lie symplectique. Un outil essentiel dans notre étude est la structure affine invariante à gauche déduite de la forme symplectique. Nous préciserons nos résultats dans les cas des groupes nilpotents ou Frobeniusiens.

On the moduli space of certain smooth codimension-one foliations of the 5-sphere by complex surfaces

Laurent Meersseman and Alberto Verjovsky

In this talk we describe how to determine the set of all possible integrable almost CR-structures on the smooth codimension one foliation, by complex surfaces, of $\mathbb{S}^5$ constructed in [MV]. We give a specific concrete model of each of these structures. We show that this set can be naturally identified with $\mathbb{C}^3$. We then adapt the classical notions of coarse and fine moduli space to the case of a foliation by complex manifolds. We prove that the previous set, identified with $\mathbb{C}^3$, defines a coarse moduli space for the foliation of [MV], but that it does not have a fine moduli space. Finally, using the same ideas we prove that the standard Lawson foliation on the 5-sphere [La] can be endowed with almost CR-structures but none of these is integrable. This is a foliated analogue to the examples of almost complex manifolds without complex structure.

This is joint work with Laurent Meersseman (Université de Bourgogne)

References

[La] Lawson, H.-B. *Codimension-one foliations of spheres.* Annals of Math. Vol. 94 (1971), 494–503.

[MV] Meersseman, L. & Verjovsky, A. *A smooth foliation of the* 5*-sphere by complex surfaces.* Annals of Math. Vol. 156 (2002), 915–930.

Le théorème de Novikov généralisé

Gaël Meigniez

Un résultat très classique de S.P. Novikov (1965) énonce que dans tout feuilletage de la sphère par surfaces, il y a une composante de Reeb. La démonstration se décompose en deux parties :

1. La simple connexité implique l'existence d'un "cycle évanouissant". Ce terme désigne un lacet dans une feuille, non homotope à zéro dans celle-ci mais qu'on peut relever dans les feuilles voisines où il devient homotope à zéro.

2. Tout cycle évanouissant est porté par une composante de Reeb.

La seconde partie a donné lieu à divers travaux. D. Sullivan (1976) en a proposé une version homologique et une démonstration par les suites de Plante. Alcalde

Cuesta-Hector-Schweitzer (2002) en ont conjecturé, et démontré dans plusieurs cas particuliers, une généralisation aux variétés de dimension quelconque, feuilletées en codimension un.

Nous donnons une démonstration de la conjecture d'Alcalde Cuesta-Hector-Schweitzer dans le cas général. Les idées sont celles de Sullivan, maintenant classiques; seule la prise en compte des auto-intersections du cycle est un peu délicate.

Variétés complexes et espaces d'orbites

Marcel Nicolau

Dans cet exposé, nous proposons une méthode de construction de structures complexes, ou de Cauchy-Riemann, sur les groupes de Lie et les espaces homogènes compacts à l'aide de certaines actions de groupes.

Une bonne partie des constructions générales de variétés différentiables n'est plus valable dans le domaine complexe. Cela fait que assez peu d'exemples explicites de variétés complexes compactes sont connus, au-delà de ceux des variétés projectives. Ces dernières années de nouveaux exemples de variétés complexes ont été obtenus comme espaces d'orbites de certaines actions holomorphes de groupes de Lie complexes ou par plongement d'une variété réelle transverse à un feuilletage holomorphe.

Dans cette perspective, nous montrons qu'à chaque groupe de Lie compact K on peut associer, de manière naturelle, une variété algébrique affine X, un plongement $K \hookrightarrow X$ et une famille de feuilletages holomorphes $\mathcal{F}$ sur X définis par des actions de $\mathbb{C}^r$ et qui sont transverses K. Chacun de ces feuilletages $\mathcal{F}$ induit alors une structure complexe ou CR sur K selon la parité de sa dimension. Les structures invariantes à gauche, dont l'existence avait été montrée par des méthodes algébriques par Samelson, Wang, Charbonnel et Khalgui, sont des cas particuliers de cette construction. Cette méthode a été étendue après au cas des espaces homogènes compacts.

Stationary Patterns of Predator-Prey Models

Peter Pang

In this talk, we will describe some recently studied predator-prey models with diffusion. These are systems of nonlinear parabolic partial differential equations of reaction-diffusion type.

In particular, we are interested in the existence of non-constant steady state solutions, also called stationary patterns. We will describe how, in some cases, stationary patterns arise only in the presence of diffusion and cross-diffusion.

These results illustrate clearly the role cross-diffusion plays in complex population dynamics, such as when the species adopt defensive strategies or when stage structures are involved.

The proofs make use of topological degree arguments.

Unitary representations, Dirac operator inequality and cohomology

Rajagopalan Parthasarathy

A famous formula of Matsushima and Murakami describes how to compute the cohomology of compact locally symmetric spaces. The right side of this formula involves the intertwining number between the $\mathfrak{k}$-representation on wedge spaces of $\mathfrak{p}$ and irreducible unitary $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$- modules with trivial infinitesimal character. Here, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$

is the complexified Cartan decomposition of a finite dimensional real semisimple lie algebra. Thus, effectively, one has to classify the above mentioned unitary representations and also understand the intertwining number above. The Dirac operator inequality is a powerful tool which serves both the purposes. We will try to explain this inequality and highlight its decisive role in representation theory.

Le problème d'existence de Hurwitz

Carlo Petronio

Si on a un revêtement ramifié $f : \widetilde{\Sigma} \to \Sigma$ entre surfaces fermées, on a des relations, notamment la formule de Riemann-Hurwitz, entre la topologie de $\widetilde{\Sigma}$ et Σ, le degré d de f, le nombre n de points de ramification et les degrés locaux (d_{ij}) au-dessus de ces derniers. Un très ancien problème, qui remonte essentiellement à Hurwitz même, est celui d'établir quelles sont les *données combinatoires* $(\widetilde{\Sigma}, \Sigma, d, n, (d_{ij}))$ *compatibles* (c'est-à-dire, satisfaisant les conditions nécessaires) qui sont *réalisables* (c'est-à-dire qui viennent en effet d'un revêtement ramifié f).

On sait désormais que chaque donnée combinatoire $(\widetilde{\Sigma}, \Sigma, d, n, (d_{ij}))$ compatible est réalisable si $\chi(\Sigma) \leqslant 0$ et, en plus, le cas du plan projectif se réduit aisément au cas de la sphère. Mais dans le cas de la sphère on connaît des données *exceptionelles* (c'est-à-dire compatibles mais non réalisables). Beaucoup de papiers ont été écrits dans le but de comprendre quelles sont exactement les données exceptionnelles et de nombreux résultats ont été obtenus mais la situation reste toujours assez mystérieuse. En particulier, la conjecture suivante est encore ouverte : *si d est un nombre premier, chaque donnée $(\widetilde{\Sigma}, \Sigma, d, n, (d_{ij}))$ compatible est réalisable.*

Dans cet exposé, je vais présenter plusieurs théorèmes établis récemment à propos du problème de Hurwitz. En particulier, je vais montrer que la théorie des orbifolds géometriques de dimension deux donne un moyen très puissant pour étudier la question. Ces résultats soutiennent fortement la conjecture énoncée ci-dessus.

Introduction au Moonshine

Abdellah Sebbar

La théorie du Moonshine comprend toutes les propriétés extraordinaires qui sont apparues suite à la découverte du plus grand groupe simple sporadique, qu'on appelle le *Monstre*. Le but de cet exposé est d'expliquer les liens profonds qu'un seul objet mathématique puisse avoir avec plusieurs théories, plus précisément avec l'algèbre (classification des groupes finis simples), avec la théorie des nombres (formes modulaires), avec la physique (théorie conforme des champs et théorie des cordes) et enfin avec la géométrie et topologie (variétés de Witten, genres elliptiques et cohomologie).

Surfaces ombiliques dans les variétés de dimension 3

Rabah Souam

Une surface dans une variété riemannienne de dimension 3 est dite *totalement ombilique* si en chacun de ses points ses courbures principales sont égales. On exposera la classification de ces surfaces dans les géométries modèles de Thurston. On appliquera ensuite cela à la détermination des difféomorphismes conformes de certaines de ces variétés.

Catégorie de Temperley-Lieb coloriée

Pierre Vogel

Les algèbres de Temperley-Lieb donnent une catégorie TL représentée par les tangles modulo la relation skein de Kauffman. C'est une catégorie linéaire monoidale. Elle a cependant une grosse lacune : les opérations de dédoublement et de satellisation ne passe pas dans cette catégorie. On construit une catégorie CTL qui est au-dessus de TL et qui possède ces opérations. C'est une catégorie linéaire et monoidale qui contient tous les invariants que l'on peut déduire du crochet de Kauffman ainsi que les polynômes de Jones coloriés. Les théorèmes de structures que l'on montre sur CTL donnent des raffinements substantiels sur les résultats de Habiro et de Thang Le concernant les invariants universels des variétés de dimension 3.

Actions de groupes, cohomologies équivariantes et profondeurs

Saïd Zarati

Soient V un 2-groupe abélien élémentaire, cest-à-dire $V \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ où n est un entier non nul. On note EV un espace contractile sur lequel le groupe V opère librement et on pose $BV = EV/V$ (c'est un espace classifiant de V). Soit X un V-CW-complexe ; on note $XhV = EV \times_V X$ le quotient de $EV \times X$ par l'action diagonale de V. La cohomologie modulo 2 de l'espace X_{hV} , notée $H^*_V X$ et appelée *cohomologie équivariante* modulo 2 de X, est naturellement un H^*V-module via l'application induite en cohomologie modulo 2 par la projection $X_{hV} \longrightarrow \{*\}_{hV}$. Lorsque X est un V-CW-complexe fini, $H^*_V X$ est un H^*V-module de type fini ; on désigne par $\mathrm{dth}V H^*_V X$ sa profondeur relativement à l'idéal d'augmentation $\widetilde{H}^*V$ de H^*V. L'objet de cet exposé est de discuter certaines propriétés de cette profondeur $\mathrm{dth}V H^*_V X$ et de donner quelques unes de ses applications.

Résumés des communications

1. Rigidité des métriques riemanniennes dégénérées

Esmaà Bekkara

On s'intéresse à l'étude de sous-variétés particulières de variétés pseudo-riemanniennes sur lesquelles la métrique ambiante induit une métrique dégénérée. Un exemple de ce phénomène est donné en relativité générale par les horizons des trous noirs qui sont des hypersurfaces sur lesquelles la métrique lorentzienne ambiante dégénère. On appelle *variété de lumière* (lightlike manifold) toute variété lisse munie d'un tenseur symétrique g de type $(0, 2)$ dont la signature est constante induisant sur chaque espace tangent une forme bilinéaire positive de noyau (radical) de dimension 1. Un exemple fondamental est le cône isotrope dans l'espace de Minkowski muni de la métrique induite. Notre résultat principal suivant porte sur la classification des espaces homogènes de lumière:

Théorème. *Soit G un groupe semi-simple de centre fini, n'admettant aucun facteur local isomorphe à $\mathrm{SL}(2, R)$ agissant isométriquement, fidèlement et non proprement sur une variété de lumière M. Si l'action de G sur M est homogène (i.e. transitive), alors, M est (à revêtement fini près) le produit du cône isotrope par une variété riemannienne.*

Dans le cas général, si l'action n'est pas transitive, G admet un facteur G' isomorphe à $\mathrm{O}(1, n)$ agissant non proprement sur M et par conséquent, G' a une orbite isométrique au cône isotrope (à revêtement fini près) et le produit de tous les facteurs qui ne sont pas isomorphes à $\mathrm{O}(1, n)$ agit proprement sur M.

2. Théorème de type Fatou et caractérisation de l'image de fonctions L^p sur le bord de Shilov de la boule de Lie de dimension n

Fouzia El Wassouli

Soient $G/K = \mathrm{SO}(n, 2)/\mathrm{SO}(n) \times \mathrm{SO}(2)$ la boule de Lie de dimension n et P_Ξ un sous-groupe parabolique maximal standard de $\mathrm{SO}(n, 2)$ avec une décomposition de Langlands $P_\Xi = M_\Xi A_\Xi N_\Xi^+$. Soit (χ_l, K_c) un caractère holomorphe de la complexification K_c de K et notons $\widetilde{P}_{l,\lambda}$ la tansformation de Poisson généralisée sur l'espace $A'(K/K \cap M_\Xi)$ des hyperfonctions f sur K telles que $f(km) = f(k)$ pour tout $m \in K \cap M_\Xi$. Le but de cette communication est d'exposer un théoème de type Fatou sur le fibré en droites $E_l = \mathrm{SO}(n, 2) \times_{\chi_l} \mathbb{C}$ au-dessus de la boule de Lie D et de caractériser l'image de $L^p(S)$ par la transformation de Poisson généralisée sur le bord de Shilov $S = K/K \cap M_\Xi$ comme espace de type Hardy. Plus précisément, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{R}e[i\lambda] > \frac{n}{2} - 1$, nous montrons les assertions qui suivent.

i) Soit $f \in A'(K/K \cap M_\Xi)$. Si $F = \widetilde{P}_{l,\lambda} f$ satisfait la condition de coissance

$$||F||_{\lambda,p} = \sup_{t>0} e^{2(\frac{n}{2} - \mathcal{R}e[i\lambda])t} \Big(\int_K |F(ka_t)|^p dk \Big)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

alors f est dans $L^p(K/K \cap M_\Xi)$.

ii) La transformation de Poisson $F = \widetilde{P}_{l,\lambda} f$ d'une fonction $f \in L^p(K/K \cap M_\Xi)$ vérifie la condition précédente *i.e.* $||F||_{\lambda,p} < \infty$.

3. Une minoration de la dimension cohomologique

My Ismail Mamouni

Le but de cet exposé est de présenter une amélioration des conditions suffisantes établies par R. Hilali pour que la somme des nombres de Betti d'un CW-complexe 1-connexe fini et rationnel soit supérieure à la dimension de son $\mathbb{Q}$-espace vectoriel d'homologie. On en présentera les aspects algébrique et géométrique.

R. Hilali s'est posé la question de déterminer des conditions suffisantes pour que la conjecture du rang torique énoncée par S. Halperin en 1985 soit réalisée : si X est un espace nilpotent de rang torique $rk_0(X)$, alors la somme des nombres de Betti de X est supérieure ou égale à $2^{rk_0(X)}$.

Nous utiliserons les outils de l'homotopie rationnelle en se basant sur des résultats classiques.

Références

[1] Allday, C. & Halperin, S. *Lie group actions on spaces of finite rank*, Quar. J. Math Oxford 28 (1978) 69-76.

[2] Friedlander, J.& Halperin, S. *Rational homotopy groups of certain spaces*, Invent. Math. 53, (1979), 117-123.

[3] Halperin, S. *Finitness in the minimal models of Sullivan*, T.A.M.S, 230 (1977), 173-199 (1990).

[4] Halperin & S. Levin, G. *High skeleta of CW-complexes*, Lecture Notes in Math. 1183 (1986) 211-217.

[5] Hilali, M. R. *Action du tore sur les espaces simplement connexes*, Thèse de Doctorat, Université catholique de Louvain (1990).

4. Raffinement du calcul de Kirby pour les sphères d'homologie entière paires

Souad Otmani & Christian Blanchet

Toute 3-variété fermée, connexe et orientable peut être obtenue à partir de la sphère standard $\mathbb{S}^3$ par chirurgie sur un entrelacs parallélisé. D'après le théorème de Kirby, deux entrelacs parallélisés de $\mathbb{S}^3$ représentent la même 3-variété et l'un s'obtient à partir de l'autre par une suite finie de stabilisations et de glissements d'anses. Le calcul de Kirby donne donc une méthode pour étudier les 3-variétés à partir des entrelacs parallélisés de $\mathbb{S}^3$. Habiro a donné une condition suffisante pour qu'une suite de glissements d'anses sur les entrelacs parallélisés puisse être remplacée par une suite de paires algébriquement neutre de glissements d'anses. En utilisant ce résultat, on obtient un raffinement du calcul de Kirby pour les sphères d'homologie entière paires (qui ont un invariant de Rokhlin nul).

5. Géométrie lorentzienne des groupes de Lie unimodulaires

Nourddine Rahmani

Un flot riemannien sur une variété différentiable M est la donnée d'un feuilletage de dimension 1 admettant une métrique quasi-fibrée dont la composante orthogonale aux feuilles est invariante par ce flot.

Dans sa thèse, Yves Carrière (*cf.* [2]) a montré, en utilsant un contre-exemple sur un tore hyperbolique $\mathbb{T}^3_A$ qu'un flot riemannien n'est pas nécessairement isométrique (c'est-à-dire n'est pas nécessairement un flot déterminé par un champ de vecteurs de Killing). De plus, Théodore Hangan dans [1] a montré que les seuls flots riemanniens sur le groupe de Heisenberg H_3 sont les flots isométriques.

Nous introduisons dans ce travail une notion de "flot lorentzien" (*cf.* [3]) et nous montrons qu'il existe une métrique lorentzienne sur H_3 pour laquelle, contrairement au cas riemannien, un flot lorentzien (au sens introduit dans ce travail) n'est pas nécessairement isométrique.

Puis il est fait dans ce travail des commentaires sur un analogue possible du théorème de Molino-Sergiescu concernant les flots lorentziens sur les quotients compacts de $\mathbb{H}_3$ par des sous-groupes discrets uniformes.

Références

[1] HANGAN, T. *Au sujet des flots riemanniens sur le groupe nilpotent de Heisenberg*, Rendiconti Circolo Matematico Palermo,(3) 35, (1986),291-305.

[2] CARRIÈRE, Y. *Flots riemanniens*, Astérisque 116 (1984), 31-52.

[3] RAHMANI, N & RAHMANI, S. *Lorentzian Geometry of the Heisenberg Group*, Geometriae Dedicata Vol. 118, (2006), 133-140.

6. Classification des variétés naturellement réductives de dimension trois

S. RAHMANI

Gadéa et Oubinã ont généralisé (*cf.* [1]) au cas pseudo-riemannien une caractérisation riemannienne due à Vanhecke et Tricerri (*cf.* [2]) des variétés naturellement réductives en introduisant la notion de structure pseudo-riemannienne homogène de type T_3.

En utlisant cette caractérisation, on montre que les seules variétés lorentziennes naturellement réductives de dimension 3, connexes, complètes et simplement connexes sont :

i) L'espace de Minkowski $\mathbb{R}^3_1$, la pseudo-sphère $\mathbb{S}^3_1$, le revêtement universel $\widetilde{\mathbb{H}}^3_1$ de l'espace pseudo-hyperbolique de dimension 3 ou isométriques à l'un des groupes de Lie unimodulaires suivants munis de métriques lorentziennes invariantes à gauche adaptées :

ii) $\mathrm{SU}(2)$, le revêtement universel $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$ de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, le groupe de Heisenberg.

Références

[1] GADÉA, P.M. & OUBINÃ, J.A. *Reductive homogeneous pseudoriemannian manifolds*, Mona. Math. 124 (1997), 17-34.

[2] TRICERRI, F. & VANHECKE, L. *Homogeneous structures on riemannian manifolds*, London Math. Soc. Lecture Notes Volume 83, (1983).

7. Déformations de réseaux : un exemple dans les groupes de Lie résolubles

Cédric ROUSSEAU

L'objet de l'exposé est de montrer l'étude que nous avons faite de la rigidité locale et les déformations du groupe produit semi-direct $\Gamma = \mathbb{Z}^n \rtimes_A \mathbb{Z}$ (où n est un entier tel que $n \geq 2$ et A est une matrice hyperbolique dans $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$), dans un premier temps en tant que réseau dans le groupe de Lie résoluble $G = \mathbb{R}^n \rtimes_A \mathbb{R}$ puis comme sous-groupe du groupe de Lie semi-simple $H = \mathrm{SL}(n+1, \mathbb{R})$. Nous montrerons notamment que, bien que non localement rigide dans G, le groupe Γ est localement $\mathrm{SL}(n+1, \mathbb{R})$-rigide dans G au sens où toute déformation suffisamment petite de Γ dans G est conjuguée à Γ par un élément de $\mathrm{SL}(n+1, \mathbb{R})$.

8. Le problème du $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}$ sur le tore hyperbolique $\mathbb{T}_A^{n+1}$

Jihène SLIMÈNE

Soit M une variété différentiable munie d'un feuilletage de dimension réelle $2m$. On dira que $\mathcal{F}$ est *complexe* si ses feuilles sont munies d'une structure complexe de telle sorte que les changements de coordonnées soient holomorphes (en restriction aux feuilles). On peut donc transposer tout problème de l'analyse complexe classique en son analogue le long des feuilles, en particulier le problème du $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}$ (ou $\overline{\partial}$ feuilleté). On se propose dans cette communication de présenter nos résultats là-dessus sur l'exemple de feuilletage complexe qui suit.

Soit $A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ une matrice diagonalisable ayant toutes ses valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ réelles positives et différentes de 1 (on dit que A est *hyperbolique*). On a une action du groupe $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^n$ $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longmapsto A^t x \in \mathbb{R}^n$ qui permet de construire un groupe de Lie résoluble $G = \mathbb{R}^n \rtimes_A \mathbb{R}$ ayant $\Gamma = \mathbb{Z}^n \rtimes_A \mathbb{Z}$ comme réseau cocompact. Le quotient G/Γ est une variété compacte notée $\mathbb{T}_A^{n+1}$ et appelée *tore hyperbolique* de dimension $n+1$. Soit $\lambda \in]0, 1[$ une valeur propre de A associée à un vecteur propre v. Les champs de vecteurs $X = \lambda^t v$ et $Y = \frac{\partial}{\partial t}$ sont linéairement indépendants et induisent des champs sur la variété $\mathbb{T}_A^{n+1}$ sur laquelle ils définissent un feuilletage $\mathcal{F}$ de dimension 2 réelle. Ce feuilletage est muni d'une structure complexe définie à l'aide de la structure presque complexe intégrable donnée par $J_{\mathcal{F}}(X) = Y$ et $J_{\mathcal{F}}(Y) = -X$.

9. Connexions et feuilletages Legendriens

Z. SOUICI-BENHAMMADI et S. BENABBÈS

Dans son article intitulé "les variétés symplectiques et leurs sous-variétés lagrangiennes" Alain Weinstein a démontré qu'une variété M est feuille d'un feuilletage lagrangien d'une variété symplectique si, et seulement si, M admet une connexion affine de courbure et torsion nulles. Nous proposons dans ce travail une généralisation de ce résultat au cas d'un feuilletage legendrien d'une variété de contact .

Références

[1] KOBAYASHI, S. AND NOMIZU, K. Foundations of differential geometry, vol.I, vol.II, Interscience Publishers(1969).

[2] LIBERMANN, P. *Legendre foliations on contact manifolds.* Differential Geo. and its Appl. 1 (1991), n^0.1,57-76.

[3] TSEMO, A. *Géométrie affine, géométrie symplectique.* Department of mathematics and computer science, Ryerson university 350, Victoria Street, Toronto, ON. Arxiv:math.DG/0406021 v8.

[4] WEINSTEIN, A. *Symplectic manifold and their Lagrangien Submanifolds.* Advances in mathematics 6,329-346(1971).

Journée pédagogique

Représenter la terre sur une feuille de papier, le problème de la cartographie

Étienne Ghys

Depuis longtemps, on essaye de dessiner la terre dans des atlas de géographie... Il y a beaucoup de manières possibles de faire des cartes. Je voudrais présenter quelques projections classiques. J'en profiterai pour expliquer comment ces cartes conduisent à des questions très profondes en mathématiques, qui sont toujours d'actualité aujourd'hui !

De quel endroit la photo a-t-elle été prise ? ou "comment utiliser de beaux théorèmes de géométrie projective pour résoudre un problème de la vie quotidienne ?"

Valerio Vassallo

La géométrie projective n'est plus enseignée au lycée et l'est très peu dans les universités. Et pourtant...elle a été source de développements extraordinaires de tout le reste de la géométrie ! Tout a commencé.... à la Renaissance où des peintres célèbres comme Leonardo da Vinci, Gian Battista Alberti, Piero della Francesca...ont introduit dans leurs tableaux "un point" qui allait jouer un rôle essentiel par la suite. Apparaît ainsi "le point de fuite puis la ligne d'horizon...". Desargues, mathématicien lyonnais "vole" aux artistes ces points pour enrichir la géométrie de son époque où deux droites parallèles ne se rencontraient jamais... Le plan s'enrichit alors des "points à l'infini" et donne naissance à un nouveau plan : le plan projectif. Plusieurs mathématiciens se mirent à travailler pour mieux apprivoiser ce nouveau plan : Poncelet, Chasles,...jusqu'à Klein, Laguerre.... et à la naissance de la géométrie algébrique actuelle... Les découvertes s'enchaînent. On s'intéresse alors aux transformations du plan qui "vivent" naturellement dans ce nouvel environnement. Vu que le point de départ a été la peinture, les projections deviennent les vedettes parmi les autres transformations. Une projection ne conserve pas les distances (c'est une évidence sur la toile !), ni le rapport (simple) des distances faisant intervenir trois points. Par contre, pour quatre points, c'est une autre affaire. Si ces points sont alignés, il existe une quantité qui est conservée, un invariant projectif : le *birapport*, ainsi nommé car il est le rapport de deux rapports. Il existe aussi un birapport pour tout faisceau de droites, c'est-à-dire tout système ordonné de quatre droites concourantes. On peut alors aller encore plus loin : on définit le birapport de quatre points cocycliques. Si A, B, C et D sont quatre points cocycliques fixés et P un point mobile sur ce même cercle alors le birapport du faisceau de droites PA, PB, PC, PD ne dépend pas de P. On va plus loin : un théorème de Chasles dit que, si on choisit quatre points distincts A, B, C, D sur une conique quelconque et P un point arbitraire sur la conique, le birapport des quatre droites PA, PB, PC et PD ne dépend pas du point P. Encore plus beau, la réciproque de ce théorème est aussi vraie : si on fixe quatre points A, B, C et D et si l'on envisage le(s) faisceau(x) de droites de sommet P dont les rayons passent, dans l'ordre, par A, B, C, D et dont le birapport a une valeur fixée, alors P est situé sur une conique passant par A, B, C et D. Autrement dit, il existe une conique pour chaque valeur du birapport. C'est cette version du théorème de Chasles qui nous aidera à déterminer d'où la photo a été prise.

Le récit !

Le colloque a commencé le lundi 28 mai à 9 h 30 par les allocutions d'ouverture du Doyen de la FST (Mohamed Aboussalah), le coordinateur du GGTM (Aziz El Kacimi) et le responsable de l'Équipe GTA (Mohamed Boucetta). La première conférence a été donnée par Etienne Ghys, membre de l'Académie des Sciences de Paris ; elle portait sur les *noœuds de Lorenz*, thème qui a fait l'objet de sa conférence plénière au Congrès International des Mathématiques à Madrid en août 2006. En plus de l'intérêt scientifique de haut niveau de l'exposé, la clarté et la rigueur du conférencier ont été bien appréciées par l'auditoire. À la pause, nous avons eu droit au café et au thé à la menthe, divers rafraichissements et de délicieuces et fines patisseries marocaines ! La reprise s'est faite par la conférence de Peter Pang sur un sujet d'*analyse non linéaire* mais usant de méthodes dynamiques. La matinée était riche ! Vers midi et demi, nous nous sommes dirigés vers la maison de El Haj Abed, notre lieu de restauration pour toute la semaine du colloque.

Le déjeuner était copieux : des entrées variées laissant penser qu'il n'y aurait que cela ! Mais surprise ! un gigantesque plat arrive sur chacune des tables disposées dans le salon et le jardin ! Et dedans ? Tanjia, le fameux plat de Marrakech (que seuls les hommes préparent) : viande d'agneau ou de bœuf, divers légumes choisis comme on veut et des épices bien spéciales ; on met le tout dans une amphore en terre cuite, on scelle avec du papier huilé et on l'enfuit dans les cendres bien chaudes ; on laisse cuire toute une nuit tranquilement ! Ne reste plus qu'à aiguiser ses dents et se préparer à l'agréable combat ! Après le dessert, café, thé à la menthe et petits gâteaux. Les participants étaient répartis par petits groupes ; leurs sujets de discussion étaient divers : des choses les plus élémentaires de la vie courante aux mathématiques les plus butantes ! Bref, l'ambiance était conviviale et très agréable ! Saccadée de rires, elle laissait entendre la joie des rencontres et des retrouvailles !

Les conférences ont repris à 15 heures. Il y en avait trois : Habib Marzougui a parlé du *problème de conjugaison des difféomorphismes du cercle*, Alberto Médina des *structures symplectiques invariantes sur les groupes de Lie* et Mohamed Deffaf de la *rigidité des actions de groupes de Lie*. La journée était un peu chargée mais très instructive.

Nous avons veillé (enfin presque) à ce qu'il y ait un équilibre entre les thèmes développés et une répartition assez cohérente. Deux grands axes de la géométrie ont rempli la journée du mardi 29 mai. La géométrie complexe par les exposés de Alberto Verjovsky sur la *construction d'un feuilletage complexe de codimension* 1 *sur la sphère* $\mathbb{S}^5$ et celui de Marcel Nicolau sur la *construction de nouvelles variétés complexes comme espaces d'orbites*. La topologie algébrique par les exposés de Said Zarati sur les *actions de groupes et la cohomologie équivariante associée*, l'exposé de Pierre Vogel sur la *catégorie de Temperley-Lieb coloriée* et enfin celui de Abdeslem Bouarich sur la *suite spectrale en cohomologie bornée*. Le repas du midi était aussi succulent que celui de la veille : cette fois-ci nous avons eu un gros poisson cuit au four accompagné de poivrons, tomates, oignons et aubergines.

Le mercredi a débuté par l'exposé de Rajagopalan Parthasarathy sur l'*opérateur de Dirac et les séries discrètes* (résultat percutant qui a marqué à l'époque un pas décisif dans la réalisation des représentations dans l'espace des spineurs harmoniques).

Shigenori Matsumoto a parlé de la *rigidité avec paramètre de flots sur les variétés compactes*, sujet d'actualité et Carlo Petronio sur le *problème d'existence de Hurwitz.* La matinée s'est terminée par un délicieux déjeuner : "Djaj M'deghmer" (poulet rôti à la poelle accompagné d'une sauce épaisse préparée avec de l'ail, des oignons et de fines épices) ! L'après midi était dédiée aux communications : les doctorants et postdoctorants (en majorité) ont exposé leurs travaux en cours.

Le jeudi 31 mai était une journée libre. Certains irréductibles ont choisi de travailler encore cette journée : c'est une très bonne occasion pour ceux qui collaborent habituellement à distance. Les autres ont en profité pour faire du tourisme et découvrir la ville de Marrakech. Plusieurs choix étaient offerts. Sans doute le meilleur était d'aller vers la Médina découvrir l'ambiance des souks, l'artisanat du Maroc qui offre toute une gamme de produits originaux, écouter les cris des marchands et sentir le parfum enivrant des épices ! La Médina est le lieu le plus représentatif de la joie de vivre ! C'est important et aussi beau que la géométrie et tout le reste des mathématiques ! C'est une poésie de la vie et des rapports humains qui fondent et charpentent la société marocaine !

La matinée du vendredi premier juin a commencé par la topologie algébrique, un excellent exposé de Michel Boileau sur les *applications de degré non nul entre* 3 *variétés.* Il a été suivi par un survol sur le *Moonshine* par Abdellah Sebbar qui a fait un peu le tour de la question et en a relaté l'histoire. Elle s'est terminée par l'exposé de Rabah Souam sur les *surfaces ombiliques dans les* 3*-variétés.* Le vendredi étant le jour de la prière, nous n'avons eu le déjeuner qu'à 13 h 30 mais cette attente était bien récompensée : un bon couscous préparé et présenté à la marocaine. Ce fut un régal ! Les dernières conférences ont été données par Mohamed El Hamdadi sur une *cohomologie en rapport avec la structure des nœuds* et Gaël Meigniez sur le *théorème de Novikov des feuilletages de codiemnsion* 1 *sur la sphère* $\mathbb{S}^5$.

Des allocutions de clôture ont été prononcées par les uns et les autres ; beaucoup ont exprimé des remerciements. La partie *conférences avancées* du colloque a ainsi pris fin.

La journée du samedi 2 juin a été dédiée au volet pédagogique. Elle s'est tenue à l'*Institut Français de Marrakech* et était ouverte au grand public. Dans son exposé, Valerio Vassallo nous a montré comment la géométrie projective pouvait être appliquée pour déterminer l'endroit d'où a été prise une photo. (Bien utile donc, pour localiser le Paparazzi !) À cette même occasion, Etienne Ghys nous a présenté une partie du film qu'il est en train de réaliser sur la géométrie en collaboration avec Jos Leys et Aurélien Alvarez. C'était très instructif du point de vue mathématique. Il introduit le "spectateur" graduellement à la notion de dimension et de variété et y lie de façon naturelle art et géométrie. L'auditoire était très enchanté.

Le dernier repas du colloque a eu lieu comme d'habitude chez El Haj Abed : un tagine à la viande de bœuf et aux prunneaux. Le colloque a ainsi pris fin !

Tous les participants ont porté un jugement extrêmement positif sur le haut niveau du contenu scientifique, la qualité des conférences et les rapports humains de ce troisième colloque du GGTM. Les membres du Comité d'Organisation et ceux du Comité scientifique ont tous exprimé leur pleine satifaction et sont repartis avec l'idée et la conviction qu'ils ont mené à bien leur tâche.

Le plus important sans doute !

Les activités visibles (celles qui sont officiellement annoncées) sont bien évidemment les conférences et les communications. Quelqu'un expose et les autres écoutent plus ou moins attentivement ! On essaie de comprendre ! On ne peut pas dire (sauf vraiment à persister à être hypocrite) qu'on apprend réellement les mathématiques à un colloque. Mais à défaut de suivre les démonstrations, on retient les idées, on découvre un sujet qui sort du cadre de ce que l'on fait habituellement. C'est un point très important certes mais il ne saurait l'être autant que la rencontre avec les autres, les débats qu'on engage ensemble, les différentes discussions et les confrontations, les collaborations qui naissent et s'improvisent *etc.* C'est ce qui s'est effectivement passé. C'est largement positif ! nous le soulignons ! Francis Trincaretto (qui est chirurgien), Président de la Cité des Géométries de Maubeuge a été spectateur de ce colloque et a très bien observé et apprécié cet aspect.

C'est le troisième colloque du GGTM. Nous avons toujours veillé à ce que les trois associent une partie formation par la présence massive d'étudiants. Nous sommes toujours arrivés à faire en sorte à ce que cela se fasse effectivement. Les deux premiers (celui de El Oued et celui de Bizerte) et l'Ecole du CIMPA de Marrakech en juin 2004 ont donné l'occasion à certains étudiants maghrébins de trouver des directeurs de recherche ; ces derniers leur ont proposé des sujets et des directions de thèses officielles ont commencé. Ce colloque a été une occasion de revoir ces étudiants pour discuter avec eux et les aider à faire avancer leurs travaux de manière concrète. (C'était mon cas à titre d'exemple : j'ai revu deux étudiants tunisiens inscrits officiellement sous ma direction et un étudiant algérien que j'aide de façon non officielle.) Rien que sous cet angle, une rencontre scientifique de ce genre est d'un intérêt incontestable ! C'est un point qui nous tient tous à cœur et qui devrait montrer à ceux qui détiennent les décisions que nous encourager dans nos initiatives, ne peut être que bénéfique pour le développement scientifique (en l'occurrence les mathématiques et plus particulièrement, en ce qui nous concerne, la géométrie sous tous ses aspects) au Maghreb et le renforcement de la coopération avec les pays européens ou autres. Nous espérons être entendus !

Présentation du GGTM

Groupement pour le développement de la Géométrie et la Topologie au Maghreb

http://www.ggtm.uh2c.ma/

Beaucoup d'universités dans le monde comptent dans leur rang un nombre non négligeable de chercheurs venus du Maghreb. La France est au premier plan ! Ces chercheurs ont souvent maintenu des liens étroits avec leurs pays d'origine. Un grand nombre d'entre eux collaborent de très près, de façon formelle ou informelle, reconnue ou non (reconnaissance administrative bien sûr) avec leurs compatriotes. Il serait difficile de dresser la liste des personnes qui travaillent dans cette direction et encore moins de recenser les activités de toutes sortes qui ont été organisées : colloques, conférences, activités pédagogiques, codirection de recherche, collaboration effective *etc.* Décidons de ne pas trop remonter dans le temps en ce qui nous concerne. C'est au cours d'une École de Géométrie et Topologie organisée par l'Équipe de Géométrie de la FST de l'Université Cadi Ayyad à Marrakech qu'est apparue l'idée de structurer toutes ces activités pour les rendre plus efficaces et être en position de les faire reconnaître par les instances officielles des pays du Maghreb.

Le GGTM a donc pris naissance le 5 juin 2003 à Marrakech. Il a été fondé par un ensemble de géomètres et topologues maghrébins et français. Son objectif est de participer à la promotion de la recherche mathématique en géométrie et en topologie dans les pays du Maghreb. Il entend stimuler et encourager la coopération scientifique visant à réaliser cet objectif. Il offre un espace de rencontre et d'échange du savoir mathématique. Il se donne comme but:

- de regrouper des géomètres et topologues maghrébins ;
- de concevoir et réaliser des projets de recherche dans l'espace maghrébin ;
- d'organiser les échanges entre les équipes de recherche maghrébines ;
- d'encourager la mobilité des chercheurs et des étudiants dans le Maghreb ;
- d'organiser des formations communes ;
- de lancer des projets de recherche communs ;
- de créer un réseau d'équipes de recherche en géométrie et topologie ;
- d'associer les géomètres et topologues à la réalisation des objectifs du GGTM;

• de développer les échanges entre les chercheurs maghébins et les chercheurs d'autres pays (Europe, Amérique, Asie...) ;

• d'organiser des colloques périodiques au Maghreb et des rencontres régionales.

Outre les activités ponctuelles et isolées qu'il a eues depuis sa création, le GGTM a déjà organisé deux grands colloques :

1. Premier Colloque Maghrébin de Géométrie et Topologie à El-Oued (Algérie) du 26 février au 2 mars 2005 (en marge de l'École du CIMPA).
Conférenciers : H. Abchir, A. Adlène, M. Belkhalfa, A. Benbernou, C. Blanchet, A. El Soufi, H. Hattab

2. Deuxième Colloque Maghrébin de Géométrie, Systèmes dynamiques et Topologie à Bizerte (Tunisie) du 08 au 11 mai 2006.
Conférenciers : H. Abchir, A. Abouqateb, R. Barre, M. Belkhalfa, C. Bonatti, M. Boucetta, O. Echi, A. El Kacimi, G. Hector, A. Ikemakhen, I. Liousse, E. Salhi, G. Soler Lopez, A. Zeghib

Cela montre à quel point notre volonté a été mise en pratique. Nous aimerions ainsi arriver à une reconnaissance de notre travail de recherche et l'insérer dans les nombreux projets officiels. L'inclure aussi dans les divers programmes d'échanges entre la communauté européenne et le Maghreb serait pour nous capital. Nous tous, œuvrons avec beaucoup de volonté, et peu de moyens actuellement, pour mener à bien notre tâche.

Aziz El Kacimi
Coordinateur du GGTM

Correspondants du GGTM

Abchir Hamid (Maroc)
Gamara Najoua (Tunisie)
Smaï Djamel (Algérie)

Présentation de

ÉQUIPE GÉOMÉTRIE, TOPOLOGIE ET APPLICATIONS

Depuis sa création, l'*Equipe Géométrie, Topologie et Applications* de l'Université Cadi Ayyad, consciente de l'incidence de la recherche sur la formation, a œuvré pour la mise en place d'une recherche performante dans les domaines de la géométrie et la topologie. La formation doctorale, le travail de recherche organisé et la coopération avec d'autres équipes et chercheurs internationaux ont été les bases de cette mise en place. Actuellement, tous les membres de l'équipe ont des thèmes de recherche précis qu'ils développent dans un esprit d'équipe et/ou dans le cadre de projets financés. Dans les prochaines années l'équipe compte poursuivre et réaliser les objectifs suivants :

(i) Poursuivre la formation doctorale et proposer de nouvelles formations incluant les applications de la géométrie dans le cadre de la Licence et du Mastère.

(ii) Continuer à développer les axes de recherche actuels de ses membres et s'ouvrir à d'autres thèmes de recherche dans un esprit favorisant la production scientifique de qualité dans des revues internationales de haut niveau.

(iii) Participer activement à la mise en place et l'expansion du "Groupement pour le Développement de la Géométrie et la Topologie au Maghreb" (GGTM) dont l'équipe est membre fondateur.

(iv) Participer au rayonnement scientifique de l'université Cadi-Ayyad par l'organisation de congrès, Ecoles et autres.

Présentation de la
CITÉ DES GÉOMÉTRIES DE MAUBEUGE

La Cité des Géométries, issue de la rencontre en 1993 entre son fondateur Francis Trincaretto et les plasticiens du mouvement MADI, a pour objectif de favoriser le partage des connaissances et le dialogue entre les hommes et les savoirs.

Omniprésente dans la nature et dans les productions humaines, matérielles et immatérielles, la géométrie, évidente ou cachée, est une clef d'entrée dans la connaissance.

La compréhension et l'assimilation de celle-ci exigent désormais une vision complexe facilitée par l'inter/transdisciplinarité.

Après cinq ans d'expérimentations dans les domaines qu'elle traverse, la Cité des Géométries, projet d'essence culturelle à vocation de développement économique, a dégagé des objectifs déclinés en deux domaines :

1. un domaine "monde économique" comportant deux volets :
   - Intelligence économique et développement territorial,
   - Visualisation mathématique ; Systèmes complexes,
2. un domaine "créativité" comme le premier comportant deux volets : Éducation et Arts.

Outre son implication importante dans l'organisation de ce collogue, La Cité des Géométries de Maubeuge a aussi pris part aux activités scientifiques et pédagogiques du GGTM (on peut citer par exemple la Journée pédagogique qui a eu lieu à Marrakech le 19 avril 2006).

Président de la CdG : F. Trincaretto
Mathématiciens en résidence à la CdG : A. El Kacimi, F. Recher, V. Vassallo