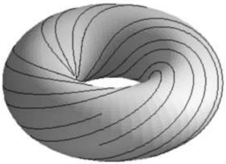
Courbes, surfaces, leur beauté géométrique !

Aziz El Kacimi
Université de Valenciennes



Exposé au séminaire **Lettres - Mathématiques**
MESH de Lille le 20 mars 2012

Les heures pendant lesquelles nous sommes absorbés par la beauté sont les seules où nous sommes vivants... Là est la vie réelle et tout le reste n'est qu'illusion ou simple résignation.

R. Jefferies

Le mathématicien n'étudie pas les mathématiques pures parce qu'elles sont utiles ; il les étudie parce qu'il y prend plaisir, et il y prend plaisir parce qu'elles sont belles.

H. Poincaré

Nul mathématicien ne peut être un mathématicien accompli s'il n'est aussi poète.

K. Weierstrass

Qu'y a-t-il de beau en mathématiques ?

- *Les objets ?*
- *les formules ?*
- *les théorèmes ?*
- *ou les démonstrations ?*

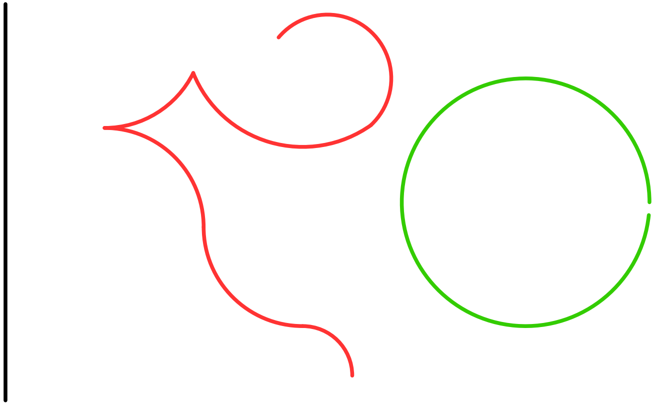
Sans doute un peu de tout ! Cela dépend :

- *de la nature des objets,*
- *de la manière dont on les relie,*
- *celle dont on démontre un théorème !*

Les exemples ne manquent pas !

Le but de notre exposé est d'en donner quelques-uns tirés de la géométrie.

1. Courbes

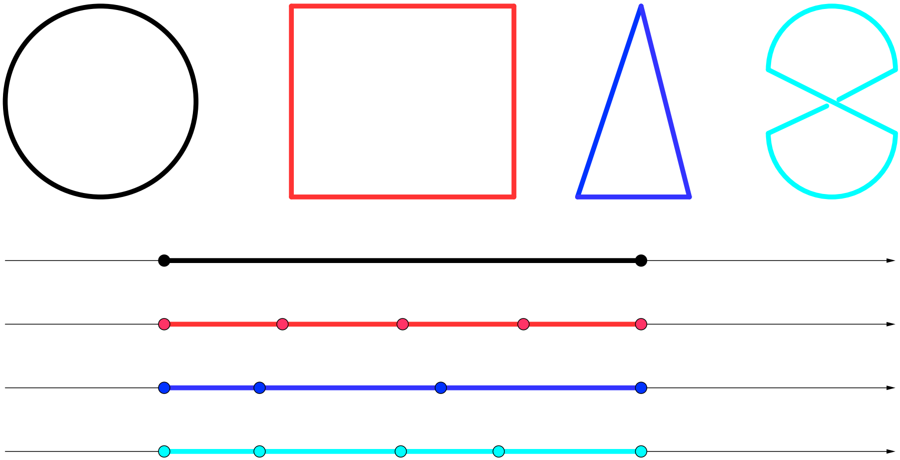


Série I

– Pour n'importe quel observateur, ces trois courbes sont différentes les unes des autres !

– C'est ce que voit l'œil de chacun de nous. Et pourtant... elles sont toutes les mêmes en un certain sens !

– En effet, si on ferme les yeux et qu'on se déplace sur chacune d'elles à vitesse constante, on ne sentira pas de différence : on les assimilera toutes à la première qui est un morceau de droite !



Série II

– *Là encore notre observateur verra des différences entre toutes ces courbes.*

– *Mais s'il répète l'expérience précédente, il se rendra compte aussi qu'il ne pourra pas les sentir.*

– *Toutefois, il y a quelque chose qui distingue les courbes de la série I de celles de la série II : les premières sont ouvertes et les secondes sont fermées. C'est la seule distinction mais elle donne la classification topologique complète des courbes :*

Une courbe connexe simple est topologiquement équivalente à un cercle si elle est fermée et à une droite si elle est ouverte.

C'est la classification la plus simple possible : comme on vient de le dire, celle du topologue !

Des classification plus fines peuvent être faites. Elles sont assez nombreuses et dépendent de l'œil du mathématicien, celui :

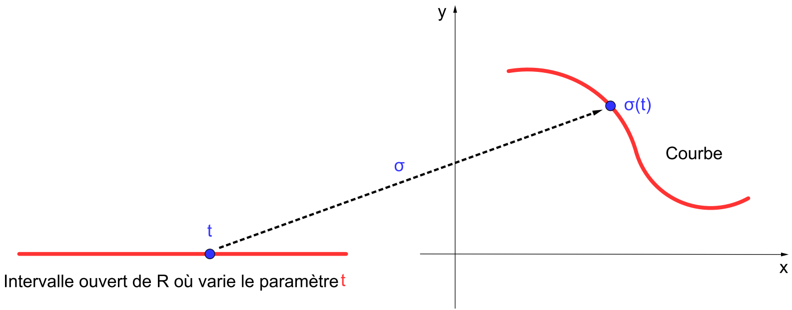
- *d'un géomètre différentiel,*
- *d'un géomètre algébriste,*
- *d'un analyste (réel ou complexe)*
- *ou...*

Ces différentes façons de voir une courbe sont liées à la manière dont elle est définie ; en termes mathématiques, cela se voit sur son paramétrage.

Une courbe dans le plan euclidien $\mathcal{P}$ est une application continue :

$$\sigma : t \in J \longrightarrow \sigma(t) = (x(t), y(t)) \in \mathcal{P}$$

où J est un intervalle de la droite réelle.



Dire que cette courbe est simple, c'est dire que, pour tous $t, t' \in J$:

$$(*) \qquad t \neq t' \Longrightarrow \sigma(t) \neq \sigma(t').$$

Généralement, on choisit de paramétrer une courbe fermée simple par l'intervalle fermé $J = [0,1]$ en imposant $\sigma(0) = \sigma(1)$ et, pour tous $t, t' \in]0,1[$, la condition $(*)$.

On peut aussi définir une courbe par une expression implicite du type $F(x,y) = 0$ où :

$$F : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$$

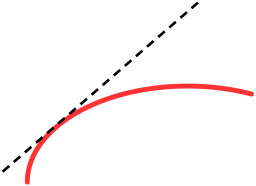
est une fonction vérifiant certaines propriétés (un peu techniques à énoncer).

L'intervalle J *peut être symbolisé par un fil de longueur* 1 *mais qu'on peut rallonger, raccourcir et déformer comme on veut !*

On interprète alors l'application σ *comme un procédé virtuel qui rallonge ou raccourcit ce fil, le déforme et ensuite le pose sur le plan* $\mathcal{P}$.

La régularité de la courbe est liée à celle de l'application σ. *Cela dépend de la différentiabilité de* σ, *c'est-à-dire de celle des fonctions* $x(t)$ *et* $y(t)$ *qui la composent : si on peut les dériver ou non !*

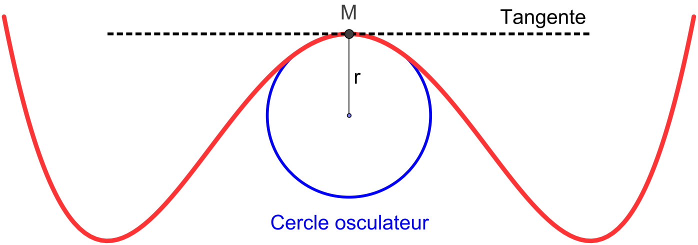
La courbe σ *sera dite régulière si les fonction* x *et* y *sont dérivables et les dérivées ne s'annulent simultanément en aucun point.*



Courbe régulière : elle admet une tangente en tout point

Ici J est tout R et x(t) et y(t) sont données par $x(t)=t^2$ et $y(t)=t^3$

σ est différentiable mais les deux dérivées x'(0) et y'(0) sont nulles



r = rayon de courbure en M

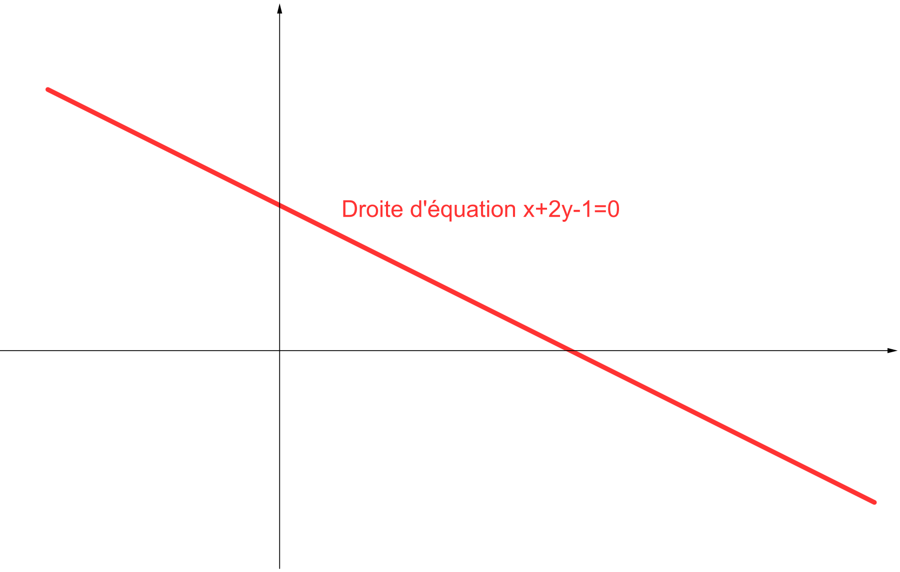
Tangente = approximation à l'ordre 1

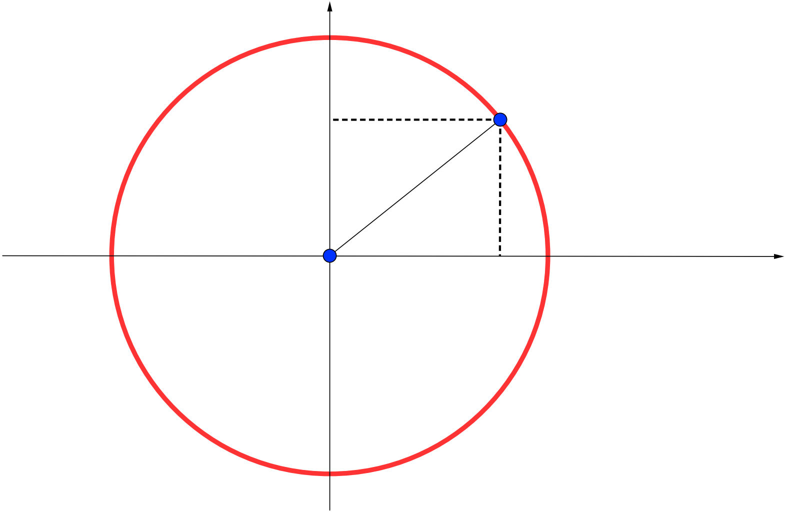
Cercle osculateur = approximation à l'ordre 2

Courbure au point M = 1/r

Courbes ; courbure : les courbes sont de la beauté.

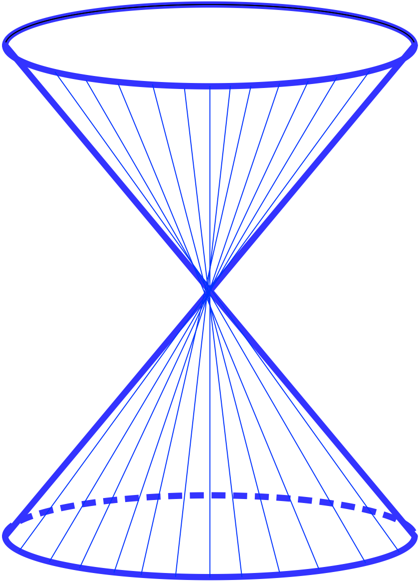
James Joyce (***Ulysse***)

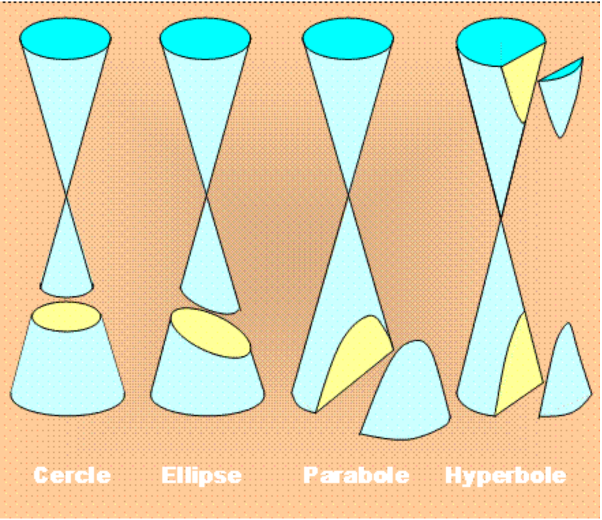

Droite d'équation x+2y-1=0

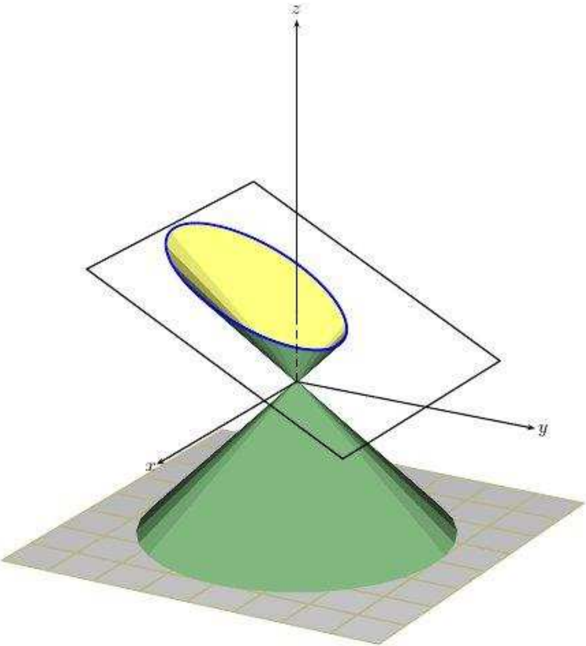


Cercle d'équation $x^2+y^2=\rho^2$

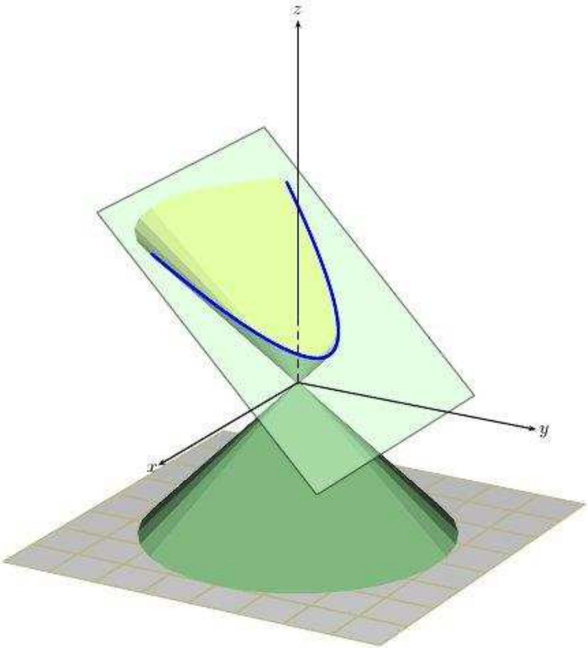
ρ = rayon du cercle



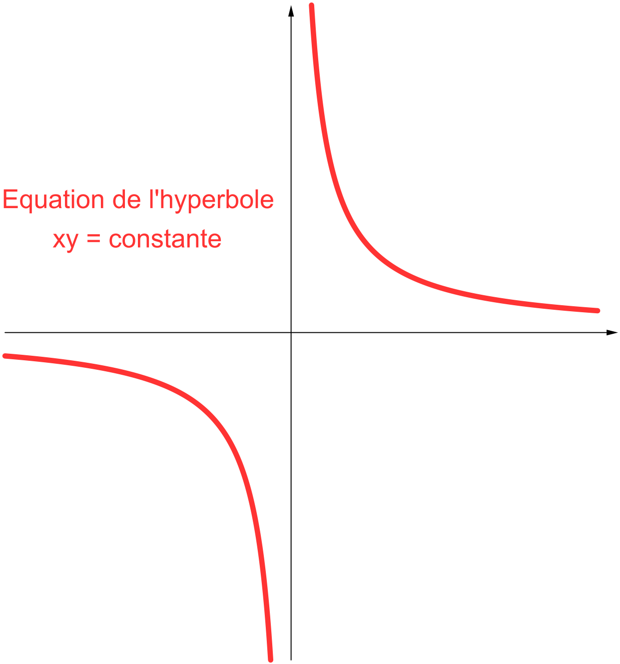

Cercle
Ellipse
Parabole
Hyperbole

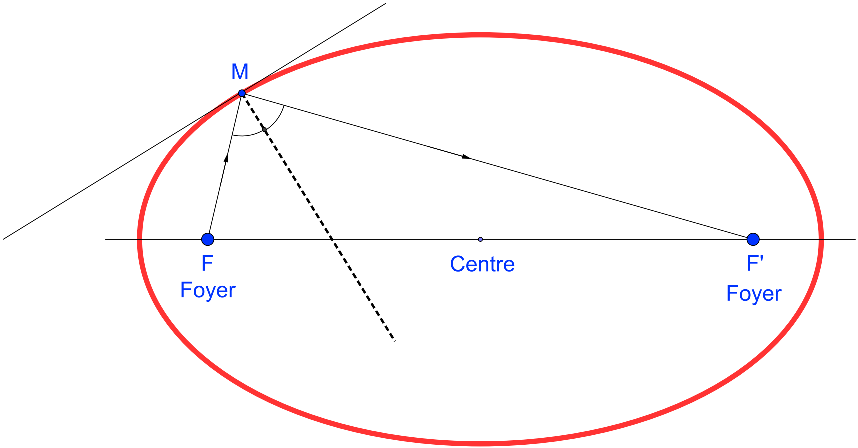


z
y
x

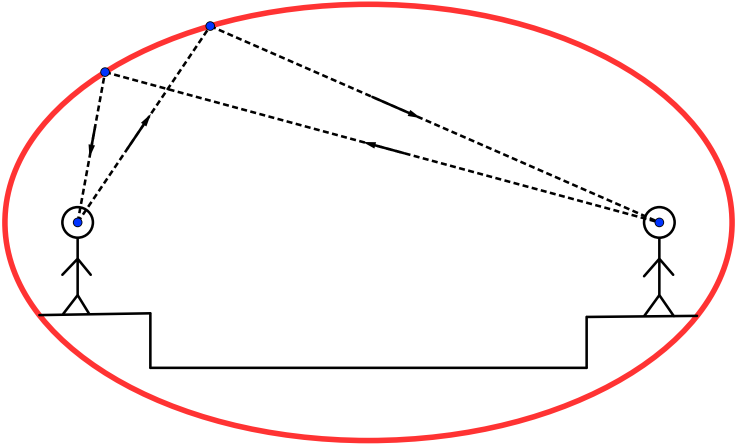


z
y
x

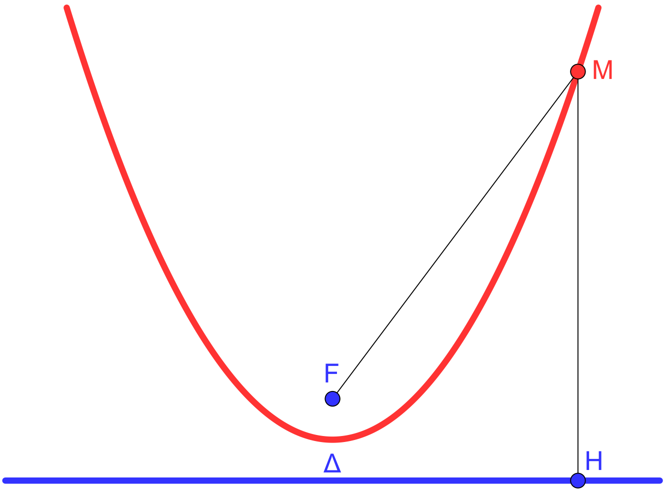

Equation de l'hyperbole
xy = constante



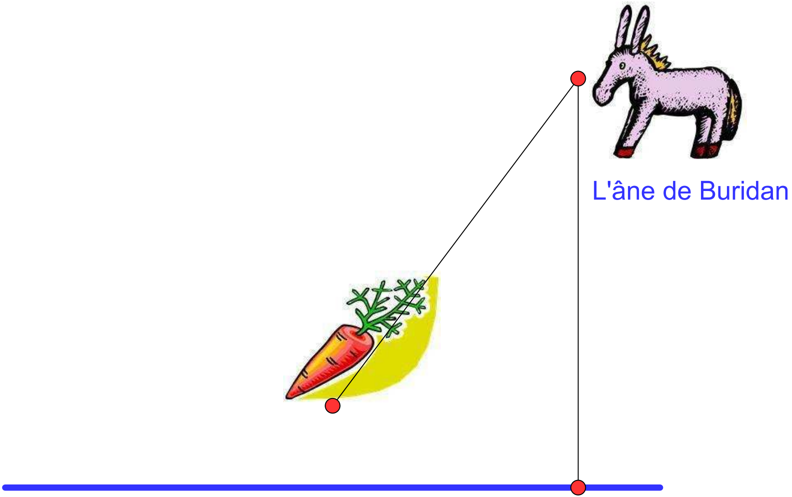
distance (M,F) + distance (M,F') = constante > 0



Ancienne station de Métro à Paris

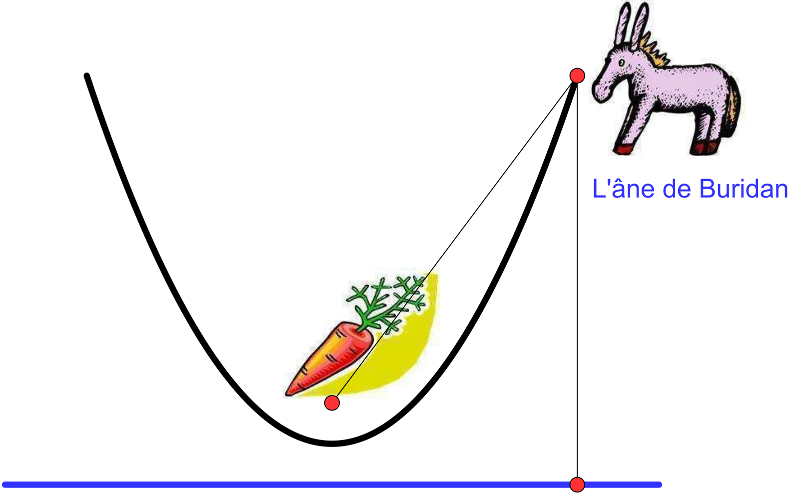


Ensemble des points à égale distance
d'un point F appelé foyer et une
droite Δ appelée directrice

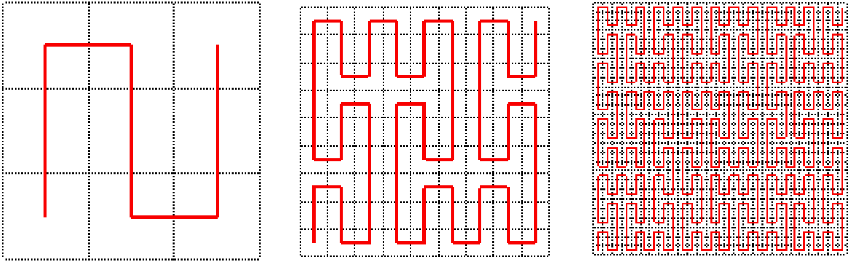


Il est à égale distance de la rivière et de la carotte.

Choisira-t-il de boire ou de manger ?



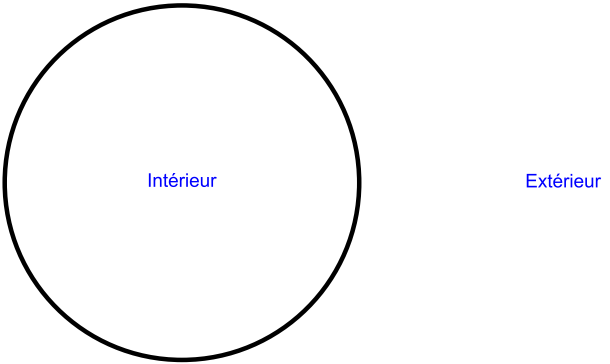
Il a choisi les deux et a été alors obligé
de cheminer sur la parabole. C'est la
courbe d'indécision fatale de ce petit âne !

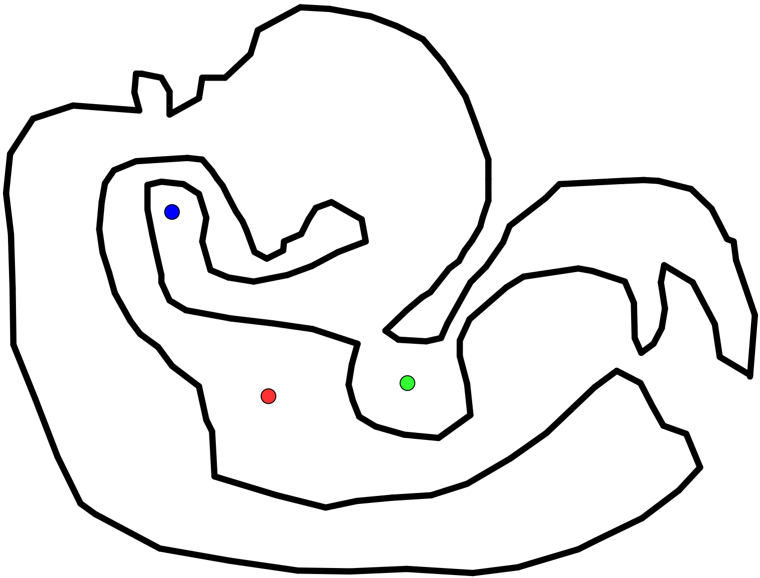


Approximations de la courbe de Péano

Théorème de Jordan

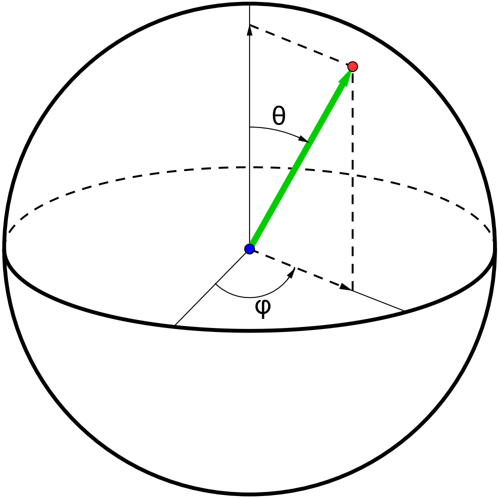
Toute courbe fermée simple partage le plan en deux parties, l'une bornée, appelée intérieur, et l'autre non bornée, appelée extérieur.



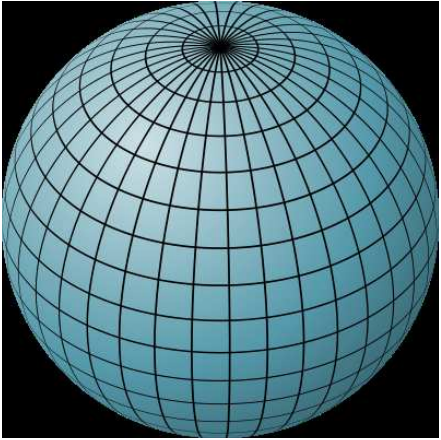


2. Surfaces

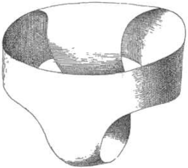
Comme on l'a déjà vu, l'élément de base qui sert à fabriquer les courbes est le segment $[0,1]$ ***; pour les surfaces, c'est le carré*** $[0,1] \times [0,1]$ ***qui jouera ce rôle : il est le modèle local ou la plus élémentaire des surfaces ; toutes les autres s'obtiennent par recollement d'un nombre fini ou infini de tels carrés.***



La sphère

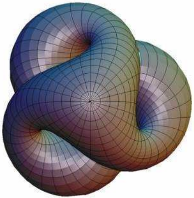


Surfaces non orientables !



Le slip de Möbius
(difficile à porter !)

Bouteille de Klein



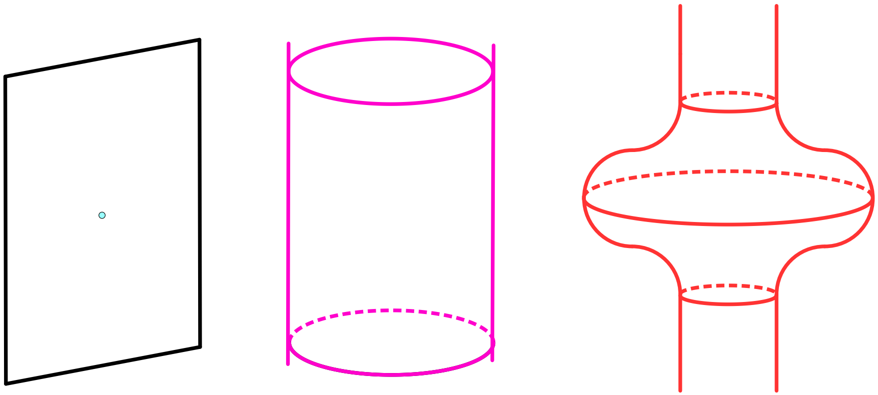
Surface de Boy
(immersion du plan
projectif réel dans
l'espace euclidien)

Dans l'enfer topologique, la bière est contenue dans des bouteilles de Klein !

3. Classification topologique

Comment classifier topologiquement les surfaces ?

Voici par exemple trois surfaces topologiquement équivalentes.



Trois surfaces homéomorphes, c'est-à-dire
ayant la même topologie

Dans le cas général, la question est loin d'être évidente. Mais la classification topologique des surfaces compactes (sans bord) existe. Elle a pris des dizaines d'années et traversé pas mal de domaines des mathématiques pour être établie !

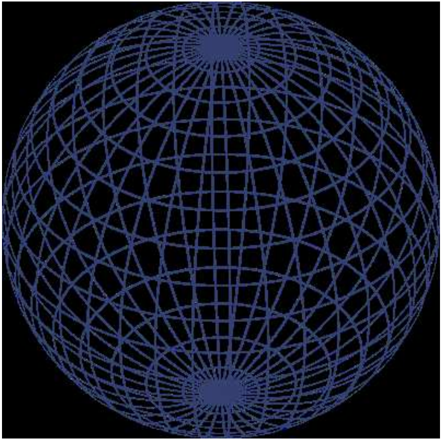
Le type topologique d'une surface compacte Σ (orientable pour simplifier) est codé par un nombre entier noté $\chi(\Sigma)$ et appelé caractéristique d'Euler-Poincaré de Σ :

Théorème

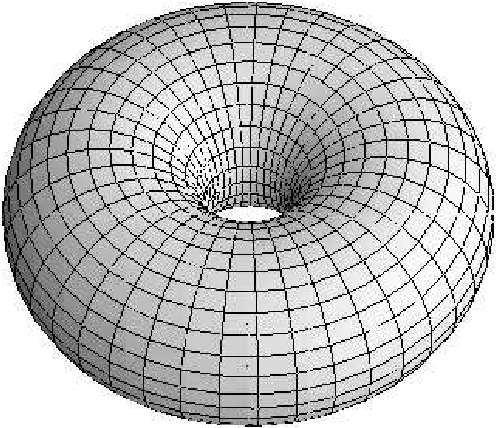
Deux surfaces compactes orientables Σ et Σ' sont topologiquement équivalentes si, et seulement si, on a $\chi(\Sigma) = \chi(\Sigma')$.

Le genre g d'une surface compacte orientable est son nombre de trous. On la note alors Σ_g.

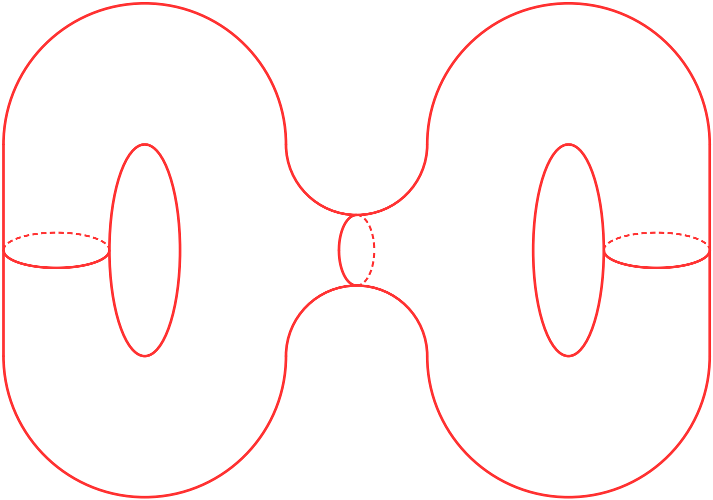
La sphère Σ_0 est de genre 0



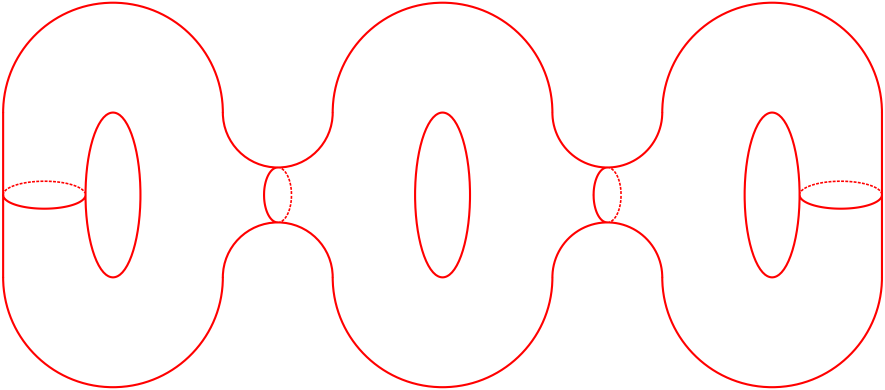
Le tore Σ_1 *est de genre* 1



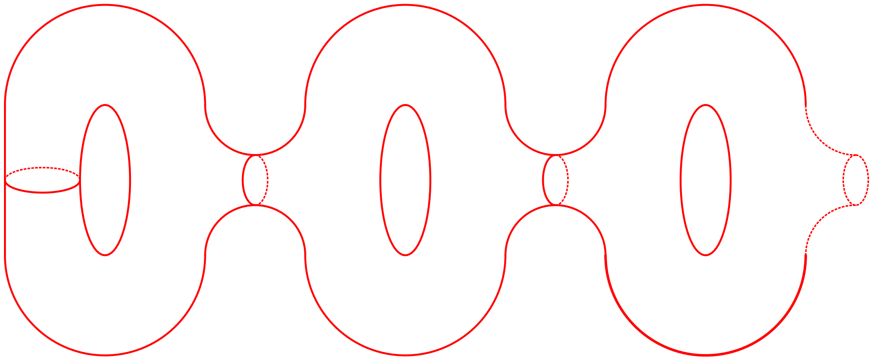
La surface Σ_2 *de genre* 2



La surface Σ_3 *de genre* 3



Et ainsi de suite : Σ_g *avec* $g \geq 4$ *!*



Les 5 solides de Platon

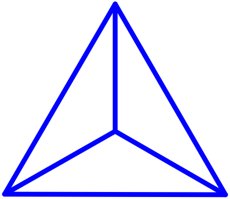
(a) ***Tétraèdre*** : $F - A + S = 4 - 6 + 4 = 2.$

(b) ***Cube*** : $F - A + S = 6 - 12 + 8 = 2.$

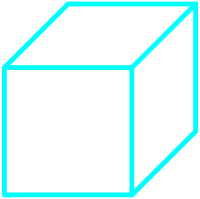
(c) ***Octaèdre*** : $F - A + S = 8 - 12 + 6 = 2.$

(d) ***Dodécaèdre*** : $F - A + S = 12 - 30 + 20 = 2$

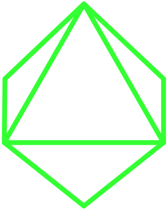
(e) ***Icosaèdre*** : $F - A + S = 20 - 30 + 12 = 2$



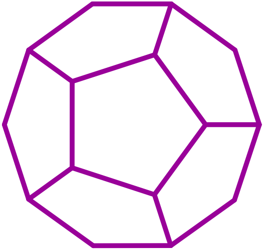
(a)



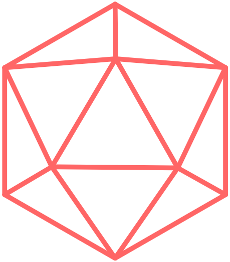
(b)



(c)

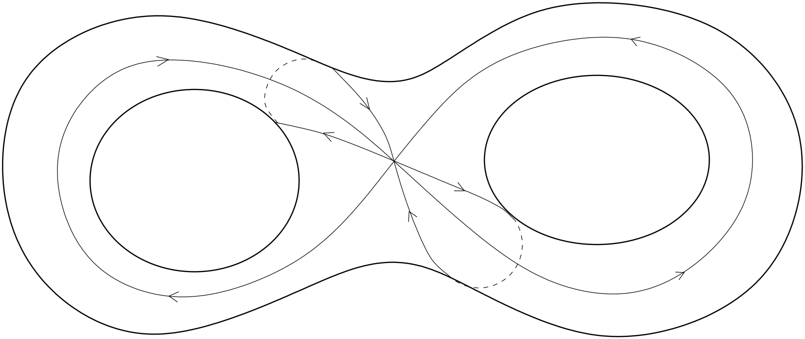


(d)

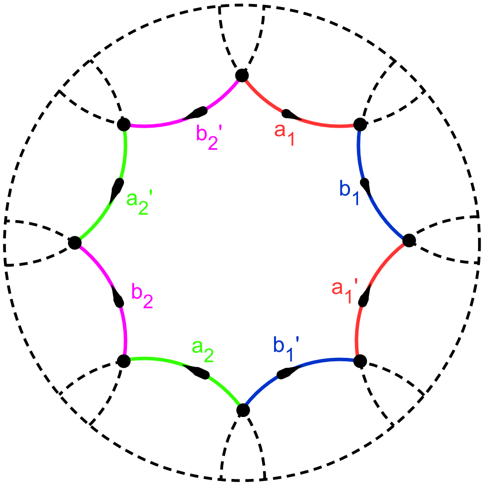


(e)

Comment calculer $\chi(\Sigma_2)$ ***par exemple ?***

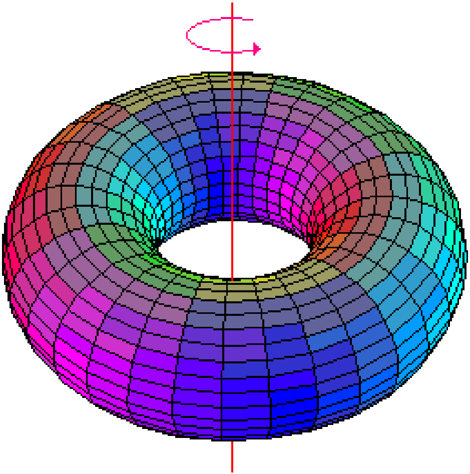


On utilise le domaine fondamental qui suit !



Caractéristique d'Euler-Poincaré = 1 - 4 + 1 = -2

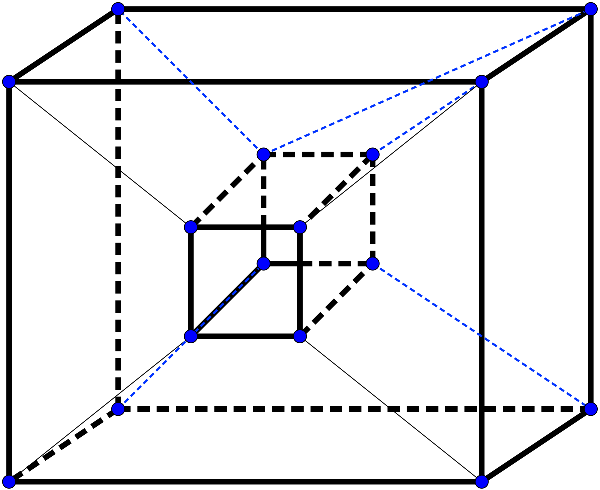
4. Le tore



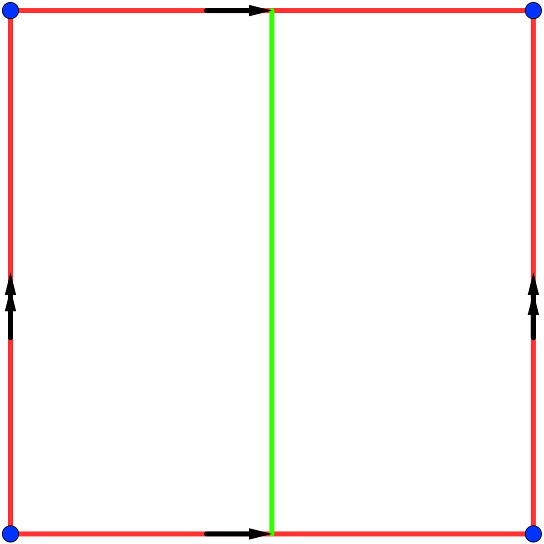
Le tore

Le tore dans l'espace !

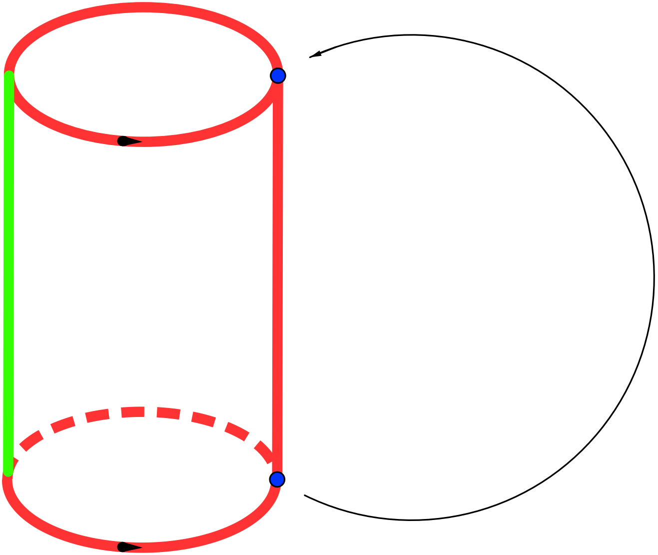
Tore noué

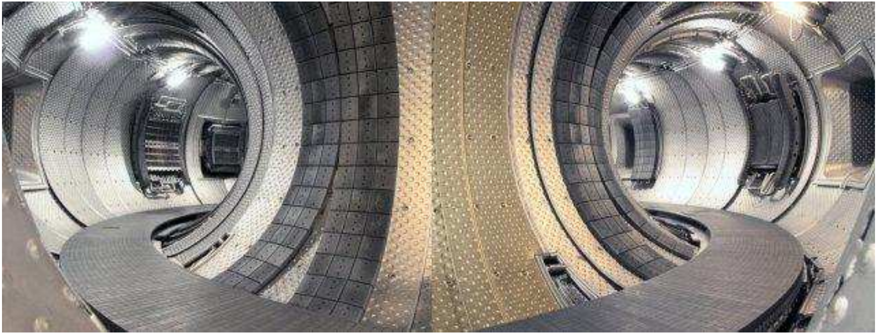


F - A + S = 16 - 32 +16 = 0



Caractéristique d'Euler-Poincaré = 1 - 2 +1 = 0





Des tores topologiques

5. Surfaces feuilletables

Une surface Σ *est dite feuilletable si elle est une réunion disjointe de courbes dont aucune n'est réduite à un point. C'est une notion centrale en topologie différentielle et en systèmes dynamiques. Cette partition en courbes est appelée feuilletage.*

Quelles sont les surfaces compactes qui admettent un feuilletage ?

La réponse à cette question est donnée par le :

Théorème de Hopf

Une surface compacte orientable Σ *admet un feuilletage si, et seulement si, sa caractéristique d'Euler-Poincaré* $\chi(\Sigma)$ *est nulle.*

L'entier $\chi(\Sigma)$ *apparaît donc comme une* ***obstruction*** *à l'existence d'un feuilletage sur la surface* Σ*. Par suite :*

– *La sphère* $\mathbb{S}^2$ *n'est pas feuilletable car* $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$*.*

– *La surface* Σ_g *de genre* $g \geq 2$ *n'est pas feuilletable car* $\chi(\Sigma_g) = 2(1-g) \neq 0$*.*

– *Le tore* $\mathbb{T}^2$ *est* ***feuilletable*** *car* $\chi(\mathbb{T}^2) = 0$*.*

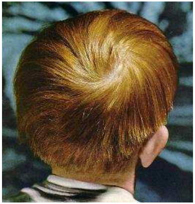
On voit alors que le tore occupe une place assez particulière parmi toutes les surfaces compactes orientables.

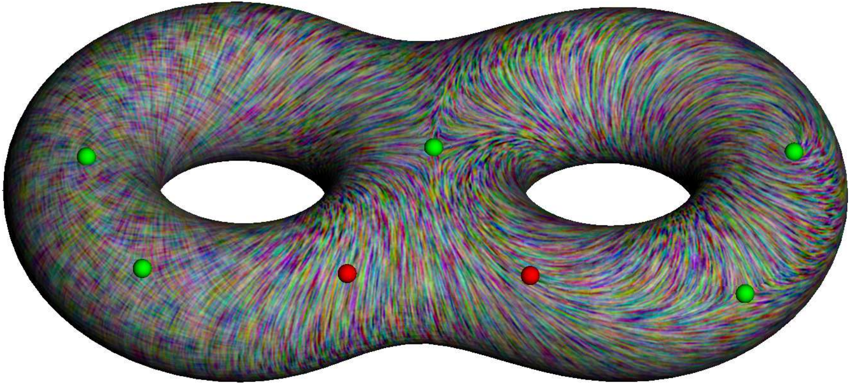
Illustrons cela par quelques dessins !

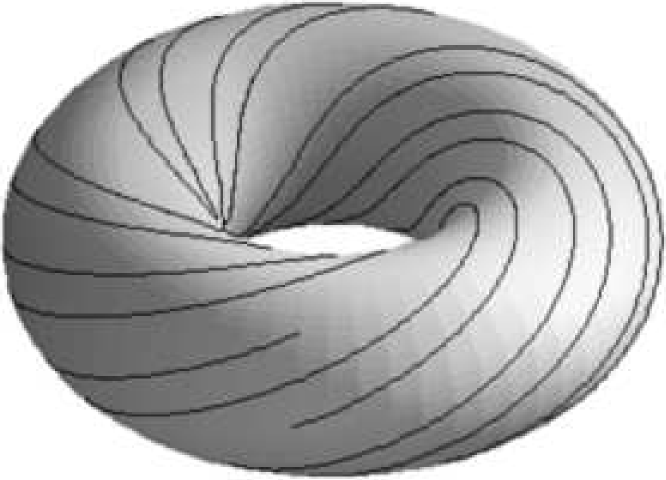
Comme on vient de le dire, la sphère $\mathbb{S}^2$ n'est pas feuilletable. Ceci explique par exemple :

– que quand le vent souffle sur toute la surface de la terre, il y a au moins un point en lequel il ne souffle pas : c'est l'œil du cyclone !

– qu'on ne peut pas peigner les cheveux d'une tête sans produire une singularité !







Petite conclusion personnelle !

Quelle que soit sa nature, la beauté est toujours la combinaison parfaite entre quelque chose de profond et la forme qu'elle peut prendre !

Mais je m'incline et préfère laisser le mot de la fin à un grand maître de l'esthétique littéraire :

"Où la Forme manque l'Idée n'est plus. Chercher l'un, c'est chercher l'autre."

Gustave Flaubert (*Correspondance*)

Encore moi :

La beauté littéraire est au-dessus de toutes les autres car elle est créée sans contraintes et en toute liberté.