COHOMOLOGIE DE DOLBEAULT FEUILLETÉE DU FEUILLETAGE COMPLEXE AFFINE DE REEB

par

Rochdi Ben Charrada & Aziz El Kacimi Alaoui

(Mars 2019)

Résumé. Soit $\mathcal{F}$ le feuilletage complexe affine de Reeb de dimension 1 sur la variété de Hopf $\mathbb{S}^{n+1} \times \mathbb{S}^1$. On montre que sa cohomologie de Dolbeault feuilletée en degré 1 est isomorphe à $\mathbb{C}$ en en exhibant explicitement un générateur. On voit apparaître ainsi toutes les obstructions à résoudre le $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}$ le long des feuilles sur $(\mathbb{S}^{n+1} \times \mathbb{S}^1, \mathcal{F})$.

1. Premières définitions

Soit M une variété différentiable (de classe C^∞) de dimension $m+n$. On suppose, pour simplifier, qu'elle est connexe et qu'elle possède toutes les bonnes propriétés dont on aurait éventuellement besoin (paracompacité...).

1.1. Définion. *Un **feuilletage** $\mathcal{F}$ de **codimension** n sur M est donné par un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ et, pour tout i, d'un difféomorphisme $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi_i} U_i$ tel que, sur toute intersection non vide $U_i \cap U_j$, le difféomorphisme de changement de coordonnées :*

$$\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i : (z,t) \in \varphi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \longrightarrow (z',t') \in \varphi_j^{-1}(U_i \cap U_j)$$

soit de la forme $z' = \varphi_{ij}(z,t)$ et $t' = \gamma_{ij}(t)$.

La variété M est ainsi décomposée en sous-variétés connexes de dimension m. Chacune d'elles est appelée *feuille* de $\mathcal{F}$. On note τ le fibré tangent à $\mathcal{F}$; il est constitué de tous les vecteurs tangents aux feuilles. Les sections de τ forment un module $\mathfrak{X}(\mathcal{F})$ sur l'anneau $C^\infty(M)$ des fonctions sur M. Si X et Y sont deux éléments de $\mathfrak{X}(\mathcal{F})$, par le théorème de Frobenius [Ca], le crochet $[X,Y]$ est encore un élément de $\mathfrak{X}(\mathcal{F})$.

Le quotient $\nu\mathcal{F} = TM/\tau$ est le *fibré normal* à $\mathcal{F}$; on peut le réaliser dans TM par le choix d'un supplémentaire ν de τ. On a ainsi une décomposition en somme directe $TM = \tau \oplus \nu$. Celle-ci donne une décomposition du complexifié du fibré $\Lambda^\ell T^*M \otimes \mathbb{C}$ des ℓ-formes extérieures :

$$\Lambda^\ell T^*M \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{s+r=\ell} \Lambda^{sr} \tag{1}$$

où Λ^{sr} est le fibré dont les sections globales sont les ℓ-formes complexes α de type (s,r) *i.e.* celles qui s'écrivent localement :

$$\alpha = \sum_{\substack{1\le i_1<\cdots<i_s\le m\\ 1\le j_1<\cdots<j_r\le}} f_{i_1,\cdots,i_s,j_1,\cdots,j_r}(z,t)dt_{i_1}\wedge\cdots\wedge dt_{i_s}\wedge dz_{j_1}\wedge\cdots\wedge dz_{j_r} \tag{2}$$

où les $f_{i_1,\cdots,i_s,j_1,\cdots,j_r}$ sont des fonctions continues et C^∞ en $z=(z_1,\cdots,z_m)$. L'ensemble $A^{sr}(M)$ de ces formes différentielles est un module sur l'anneau $A(M) = C^{0,\infty}(M,\mathbb{C})$ des fonctions complexes sur M (C^0 en (z,t) mais C^∞ en z).

Mathematics Subject Classification : 32W05, 32G05, 32Q58, 58A30

Key Words : Feuilletage complexe, $\mathcal{F}$-holomorphie, cohomologie feuilletée

Dans toute la suite, on se restreindra au cas $s = 0$. On note alors $A^r_{\mathcal{F}}(M)$ l'espace $A^{0r}(M)$ et on considère l'opérateur $d_{\mathcal{F}}$ qui à la forme $\alpha \in A^r_{\mathcal{F}}(M)$ associe la forme $d_{\mathcal{F}}\alpha \in A^{r+1}_{\mathcal{F}}(M)$ dont l'évaluation $d_{\mathcal{F}}\alpha(X_1, \cdots, X_{r+1})$ sur les $r+1$ champs de vecteurs $X_1, \cdots, X_{r+1}$ tangents à $\mathcal{F}$ est donnée par :

$$\sum_{i=1}^{r+1}(-1)^i X_i \cdot \alpha(X_1, \cdots, \widehat{X}_i, \cdots, X_{r+1}) + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\alpha([X_i, X_j], \cdots, \widehat{X}_i, \cdots \widehat{X}_j, \cdots X_{r+1}). \tag{3}$$

Cet opérateur est de carré nul et donne alors un complexe différentiel :

$$0 \longrightarrow A^0_{\mathcal{F}}(M) \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} A^1_{\mathcal{F}}(M) \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} \cdots \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} A^{m-1}_{\mathcal{F}}(M) \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} A^m_{\mathcal{F}}(M) \longrightarrow 0 \tag{4}$$

appelé *complexe de de Rham feuilleté* de $\mathcal{F}$. Son homologie en degré r sera notée $H^r_{\mathcal{F}}(M)$ et appelée *cohomologie feuilletée* de $\mathcal{F}$. Elle coïncide avec la cohomologie de de Rham de M lorsque la dimension des feuilles est celle de la variété, c'est-à-dire lorsque il n'y a qu'une seule feuille, la variété M elle-même.

On se donne maintenant une variété M comme avant, qu'on suppose de dimension $2m + n$ et munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension n (et donc de dimension $2m$).

1.2. Définition. *On dira que $\mathcal{F}$ est* **complexe** *s'il existe un recouvrement ouvert $\{U_i\}$ de M et des difféomorphismes $\phi_i : \Omega_i \times \mathcal{O}_i \longrightarrow U_i$, où Ω_i est un ouvert de $\mathbb{C}^m$ et $\mathcal{O}_i$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tels que les changements de coordonnées :*

$$\phi_{ij} = \phi_j^{-1} \circ \phi_i : \phi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \longrightarrow \phi_j^{-1}(U_i \cap U_j)$$

soient de la forme $(z', t') = \big(\phi^1_{ij}(z, t), \phi^2_{ij}(t)\big)$ avec $\phi^1_{ij}(z, t)$ holomorphe en z pour t fixé.

Chaque feuille de $\mathcal{F}$ est une variété analytique complexe de dimension m. La notion de feuilletage complexe généralise celle de feuilletage holomorphe sur une variété analytique complexe.

La donnée d'un feuilletage complexe $\mathcal{F}$ sur une variété M sera représentée par le couple $(M, \mathcal{F})$.

Soient $(M, \mathcal{F})$ et $(M', \mathcal{F}')$ deux feuilletages complexes. On appelle *morphisme* de $(M, \mathcal{F})$ vers $(M', \mathcal{F}')$ toute application $f : M \longrightarrow M'$, de classe C^∞ et telle que l'image de toute feuille F de $\mathcal{F}$ est contenue dans une feuille F' de $\mathcal{F}'$ et l'application $f : F \longrightarrow F'$ est holomorphe.

Un morphisme $f : (M, \mathcal{F}) \longrightarrow (M', \mathcal{F}')$ est un *isomorphisme de feuilletages complexes* si c'est un difféomorphisme qui est un biholomorphisme sur les feuilles. On dira que deux feuilletages complexes $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sur M sont *conjugués* (ou dans la même *classe de conjugaison*) s'il existe un isomorphisme $f : (M, \mathcal{F}) \longrightarrow (M, \mathcal{F}')$.

L'ensemble des automorphismes de $\mathcal{F}$ est un groupe qu'on notera $G(\mathcal{F})$. On peut remarquer qu'une feuille de $\mathcal{F}$ qui n'est biholomorphiquement équivalente à aucune autre feuille de $\mathcal{F}$ est fixée par tout le groupe $G(\mathcal{F})$.

1.3. Exemples

i) Toute variété analytique complexe de dimension m est un feuilletage complexe de dimension m. Le groupe des automorphismes de ce feuilletage est réduit à celui des automorphismes de la variété complexe.

ii) Tout feuilletage holomorphe au sens usuel sur une variété complexe est un feuilletage complexe sur la variété réelle sous-jacente.

iii) Soit M un ouvert de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{R}^n$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^n$, on note M^t l'ensemble :

$$\{z \in \mathbb{C}^m : (z,t) \in M\}.$$

M^t est un ouvert de $\mathbb{C}^m$ appelé *section* de M suivant t. Les sections sont les feuilles d'un feuilletage complexe $\mathcal{F}$ de dimension m qu'on appellera *feuilletage complexe canonique* de M.

iv) Soit F une variété analytique complexe de dimension m. Toute fibration localement triviale $F \hookrightarrow M \longrightarrow B$ dont le cocycle est à valeurs dans le groupe $\mathrm{Aut}(F)$ des biholomorphismes de la fibre F est un feuilletage complexe $\mathcal{F}$ de dimension m. Si la fibration est triviale *i.e.* $M = F \times B$, on dira que F est un *feuilletage produit* : toutes les feuilles $F \times \{t\}$ ont la même structure complexe.

v) Supposons que $\mathcal{F}$ est un feuilletage complexe sur $M = F \times B$ dont les feuilles sont les facteurs $F \times \{t\}$ mais que la structure complexe n'est pas forcément la même sur toutes les feuilles ; on dira alors que $\mathcal{F}$ est un *produit différentiable.*

vi) Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage orientable par surfaces sur une variété M. On considère une métrique riemannienne g sur le fibré $T\mathcal{F}$. A tout vecteur $u \in T_y\mathcal{F}$ on associe l'unique vecteur $v \in T_y\mathcal{F}$ de même longueur que u et tel que le repère (u,v) soit direct. En posant $Ju = v$ on définit ainsi une structure presque complexe sur chaque feuille. La version à paramètre du théorème d'intégrabilité montre que cette structure est en fait une *structure complexe* transversalement (localement) différentiable sur $\mathcal{F}$. Ainsi tout feuilletage orientable par surfaces est un feuilletage complexe de dimension 1.

2. La $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}$-cohomologie

2.1. Soit $(M,\mathcal{F})$ un feuilletage complexe de dimension m. On s'intéresse aux formes feuilletées qui, dans un système de coordonnées locales $(z,t) = (z_1,\ldots,z_m,t_1,\ldots,t_n)$, s'écrivent :

$$\alpha = \sum f_{j_1\ldots j_p k_1\ldots k_q}(z,t)dz_{j_1} \wedge \ldots \wedge dz_{j_p} \wedge d\overline{z}_{k_1} \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_{k_q}$$

où $f_{j_1\ldots j_p k_1\ldots k_q}$ est une fonction continue en (z,t) mais C^∞ en z. On les appelle *formes feuilletées de type* (p,q). Elles forment un espace vectoriel qu'on notera $A^{pq}_{\mathcal{F}}(M)$ et qui est aussi un module sur $A(M)$ (anneau des fonctions continues et C^∞ en z). Ainsi, toute forme $\alpha \in A^r_{\mathcal{F}}(M)$ se décompose en une somme $\alpha = \sum\limits_{p+q=r} \alpha_{pq}$ où α_{pq} est une forme feuilletée de type (p,q). Ce qui donne la décomposition en somme directe :

$$A^r_{\mathcal{F}}(M) = \bigoplus_{p+q=r} A^{pq}_{\mathcal{F}}(M). \tag{5}$$

On fixe l'entier $p \in \{0,1,\cdots,m\}$. Alors l'*opérateur de Cauchy-Riemann* le long des feuilles $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}$: $A^{pq}(\mathcal{F}) \longrightarrow A^{p,q+1}(\mathcal{F})$ s'écrit localement :

$$\overline{\partial}_{\mathcal{F}}(\alpha(z,t)dz_{j_1} \wedge \cdots \wedge dz_{j_p} \wedge d\overline{z}_{k_1} \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_{k_q}) =$$

$$\sum_{s=1}^{m} \frac{\partial \alpha}{\partial \overline{z}_s}(z,t)d\overline{z}_s \wedge dz_{j_1} \wedge \ldots \wedge dz_{j_p} \wedge d\overline{z}_{k_1} \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_{k_q}$$

où $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_s} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_s} + i\frac{\partial}{\partial y_s}\right\}$ avec $z_s = x_s + iy_s$. On peut vérifier facilement que cet opérateur est de carré nul et qu'on a un complexe différentiel :

$$0 \longrightarrow A_{\mathcal{F}}^{p0}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}_{\mathcal{F}}} A_{\mathcal{F}}^{p1}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}_{\mathcal{F}}} \cdots \xrightarrow{\overline{\partial}_{\mathcal{F}}} A_{\mathcal{F}}^{p,m-1}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}_{\mathcal{F}}} A_{\mathcal{F}}^{pm}(M) \longrightarrow 0$$

appellé *complexe du* $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}$ ou *complexe de Dolbeault feuilleté* de $(M, \mathcal{F})$; son homologie, notée $H_{\mathcal{F}}^{pq}(M)$, sera appelée la $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}$*-cohomologie* ou *cohomologie de Dolbeault feuilletée* de $\mathcal{F}$. Lorsque M est une variété complexe munie du feuilletage dont la seule feuille est elle-même, alors $H_{\mathcal{F}}^{pq}(M)$ n'est rien d'autre que sa cohomologie de Dolbeault usuelle.

2.2. Une p-forme feuilletée ω est dite $\mathcal{F}$*-holomorphe* si elle est de type $(p, 0)$ et vérifie $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}\omega = 0$. Le faisceau des germes de telles formes sera noté $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}^p$; il admet une résolution fine :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{F}}^p \hookrightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{F}}^{p0} \xrightarrow{\overline{\partial}_{\mathcal{F}}} \mathcal{A}_{\mathcal{F}}^{p1} \xrightarrow{\overline{\partial}_{\mathcal{F}}} \cdots \xrightarrow{\overline{\partial}_{\mathcal{F}}} \mathcal{A}_{\mathcal{F}}^{p,m-1} \xrightarrow{\overline{\partial}_{\mathcal{F}}} \mathcal{A}_{\mathcal{F}}^{pm} \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}^{pq}$ est le faisceau des germes des formes feuilletées de type (p, q). Comme $A_{\mathcal{F}}^{pq}(M)$ est l'espace des sections globales du faisceau $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}^{pq}$, on a un isomorphisme canonique :

$$H_{\mathcal{F}}^{pq}(M) \simeq H_{\mathcal{F}}^q(M, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}^p). \tag{6}$$

Les deux définitions permettent de faire des calculs suivant la nature des exemples et la manière dont ils sont décrits. Nous verrons dans la suite comment cela se passe. L'espace $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}^p(M)$ des p-formes $\mathcal{F}$-holomorphes (sections globales du faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}^p$) sur M est $H_{\mathcal{F}}^{p0}(M)$.

Divers calculs de la cohomologie feuilletée de Dolbeault, et quelques-unes de leurs applications, sont donnés dans [BC], [Ek1], [Ek2], [ES], [GT], [Sℓ].

3. Fonctions $\mathcal{F}$-holomorphes en dimension 1

Dans toute cette section, M sera une variété réelle de dimension $2 + n$ munie d'un feuilletage complexe $\mathcal{F}$ de dimension 1. L'espace $A^{00}(\mathcal{F})$ n'est rien d'autre que l'anneau $C^{0,\infty}(M)$ des fonctions complexes sur M continues et C^∞ le long des feuilles qu'on a déjà noté $A(M)$.

3.1. La topologie $C^{0,\infty}$ sur $A_{\mathcal{F}}^{0q}(M)$

Soient V un ouvert de $\mathbb{C}$ et O un ouvert de $\mathbb{R}^n$; les coordonnées sur $V \times O$ seront notées $(z, t) = (z, t_1, \cdots, t_n)$. Pour tout multi-indice $k = (k_1, k_2)$ (k_1 et k_2 sont des entiers naturels), on posera $|k| = k_1 + k_2$ et :

$$D^k = \frac{\partial^{|k|}}{\partial z^{k_1} \partial \bar{z}^{k_2}}.$$

Pour tout $s \in \mathbb{N}$, tout compact K de $\Omega \times O$ et toute fonction $f : \Omega \times O \longrightarrow \mathbb{C}$ on pose :

$$N_{s,K}(f) = \max_{|k| \leq s} \left\{ \sup_K \left| D^k(f) \right| \right\}.$$

Soit U un ouvert de la variété M distingué pour $\mathcal{F}$ et équivalent à $V \times O$ via un isomorphisme $\varphi : V \times O \longrightarrow U$. Pour tout compact K contenu dans U et toute fonction $f \in C^{0,\infty}(U)$ on pose $N_{s,K}(f) = N_{s,K}(f \circ \varphi)$.

Soient $\mathcal{U} = \{(U, \varphi)\}$ un atlas dénombrable définissant $\mathcal{F}$ et $\mathcal{C} = \{C_n\}$ une suite de compacts, chacun contenu dans une carte de $\mathcal{U}$, recouvrant M et telle que tout compact $K \subset M$ soit recouvert par un nombre fini d'éléments de $\mathcal{C}$. Considérons une suite croissante de compacts K_n dont la réunion est égale à M. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\mathcal{C}_n$ des compacts de la famille $\mathcal{C}$ qui intersectent K_n est fini. Pour tout $s \in \mathbb{N}$ et toute fonction $f \in A(M)$, posons :

$$||f||_s^n = \sum_{C \in \mathcal{C}_n} N_{s,C}(f).$$

La famille des semi-normes $||\ \ ||_s^n$ (indexée par $s \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$) est filtrante et séparante ; elle permet de définir une distance sur $A(M)$ invariante par translations

$$\delta(f,g) = \sum_{s,n} \frac{1}{2^{s+n}} \inf\left(1, ||f-g||_s^n\right).$$

Cette distance définit une topologie faisant de $C^{0,\infty}(M)$ un espace de Fréchet. Elle ne dépend ni de l'atlas $\{(U,\varphi)\}$ ni de la famille $\mathcal{C}$ ni de la suite croissante de compacts K_n. C'est la topologie $C^{0,\infty}$ sur $A(M) = C^{0,\infty}(M)$.

Pour cette topologie, le sous-espace $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M)$ des fonctions $\mathcal{F}$-holomorphes est fermé. Notons que, pour définir la topologie induite sur $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M)$, on peut faire l'économie des dérivées le long des feuilles : il suffit de considérer l'opérateur différentiel D^0.

La topologie $C^{0,\infty}$ se définit de manière analogue sur les espaces $A^{pq}(\mathcal{F})$, vu que tout élément $\alpha \in \Omega^{pq}(\mathcal{F})$ s'écrit, sur une carte locale (U,φ), sous la forme $\alpha = fd\overline{z}$, $\alpha = fdz$ ou $\alpha = fdz \wedge d\overline{z}$ avec $f \in A(U)$.

3.2. Zéros et pôles

On travaillera sur un ouvert U de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ muni de son feuilletage complexe canonique $\mathcal{F}$. (Le facteur $\mathbb{R}$ pourrait être remplacé par n'importe quelle variété différentiable et notamment par $\mathbb{R}^n$.)

Soient $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction $\mathcal{F}$-holomorphe et Z l'ensemble de ses zéros. La restriction de f à chaque feuille F est une fonction holomorphe ; par suite, si $f : F \longrightarrow \mathbb{C}$ n'est pas identiquement nulle, par le principe des zéros isolés, $Z \cap F$ est une partie discrète de F. Donc en un point de $Z \cap F$ où f n'est pas idendiquement nulle, $Z \cap F$ est "transverse" à F.

Une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite *$\mathcal{F}$-méromorphe*, si sa restriction à chaque feuille est une fonction méromorphe. Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des pôles de f ; alors, comme pour les zéros, l'intersection de $\mathcal{P}$ avec toute feuille F est un ensemble discret de F.

Une fonction $\mathcal{F}$-holomorphe $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ (resp. $\mathcal{F}$-méromorphe) étant simplement continue sur U (resp. sur $U \setminus \mathcal{P}$), on ne peut malheureusement pas dire plus ni sur l'ensemble de ses zéros ni celui de ses pôles. Nous ferons simplement des remarques lorsque Z et $\mathcal{P}$ possèdent une structure de variété C^∞ ; de telles fonctions existent bien sûr : si $\varphi :]-\eta,\eta[\longrightarrow U \subset \mathbb{C}$ est une courbe différentiable, alors les fonctions $f(z,t) = z - \varphi(t)$ et $g(t) = \frac{1}{f(z,t)}$ sont $\mathcal{F}$-holomorphes et ont $\{(z,t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : z = \varphi(t) \text{ avec } t \in]-\eta,\eta[\}$ respectivement comme ensemble de zéros et ensemble de pôles. Ceci permet de définir localement des fonctions du même type sur des feuilletages holomorphes $(M,\mathcal{F})$.

Soit maintenant Σ une petite sous-variété transverse à $\mathcal{F}$; elle peut être considérée comme le graphe d'une application $z_0 : t \in]-\eta,\eta[\longmapsto z_0(t) \in \mathbb{C}$ de classe C^∞. Soit V un voisinage ouvert relativement compact de Σ dont chaque section V^t est un disque centré en $z_0(t)$. Alors, sur $V \setminus \Sigma$, la fonction f admet un développement de Laurent :

$$f(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)(z - z_0(t))^n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m(t)}{(z - z_0(t))^m}$$

où les coefficients a_n et b_m sont donnés, comme dans le cas classique, par les formules intégrales :

$$a_n(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1^t} \frac{f(\xi,t)}{(\xi - z_0(t))^{n+1}}d\xi \ \text{ et } \ b_m(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2^t}(\xi - z_0(t))^{n-1}f(\xi,t)d\xi. \tag{7}$$

γ_1^t et γ_2^t sont respectivement le grand cercle et le petit cercle d'une couronne contenant le point (z,t) dans la section V^t de V. Le point $(z_0,t_0) \in \Sigma$ est une singularité si l'un au moins des $b_m(t_0)$ est non nul ; s'il existe $m_0 \geq 1$ tel que $b_{m_0}(t_0) \neq 0$ et $b_m(t_0) = 0$ pour $m > m_0$, on dira que $(z_0,t_0) \in \Sigma$ est un *pôle* de f d'*ordre* m_0 ; s'il existe une infinité de $b_m(t_0)$ non nuls, on dira que $(z_0,t_0) \in \Sigma$ est une *singularité essentielle* ; si $a_0(t_0)$ et tous les $b_m(t_0)$ sont nuls, on dira que (z_0,t_0) est un *zéro* de f ; sa *multiplicité* est par définition le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $a_n(t_0) \neq 0$. Comme les a_n et les b_m sont des fonctions continues en t, si $(z_0,t_0) \in \Sigma$ est un point singulier de f (*i.e.* un pôle ou une singularité essentielle) par continuité, il existe $\delta > 0$ tel que pour $|t - t_0| < \delta$, le point $(z_0(t),t)$ est aussi singulier. L'ensemble singulier de f est donc une transversale à $\mathcal{F}$ qui est ouverte.

Ces remarques nous permettent de montrer facilement la proposition suivante dont on fera usage dans le calcul explicite de l'exemple 2.

3.3. Proposition. *Soit $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et $\mathcal{F}$-holomorphe en dehors d'une réunion discrète de sous-variétés transverses Σ_j. Alors :*

i) *chaque Σ_j est ouverte ;*
ii) *si chacune des Σ_j est réduite à un point, f se prolonge en une fonction $\mathcal{F}$-holomorphe sur toute la variété M. (C'est un phénoménome type Hartogs.)*

4. Le feuilletage complexe affine de Reeb

4.1. Construction

• On pose $\widetilde{M} = \mathbb{C}\times\mathbb{R}^n\setminus\{(0,0)\}$ et on considère le feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}$ défini par le système différentiel $dt_1 = \ldots = dt_n = 0$ où $(z,t_1,\ldots,t_n)$ sont les coordonnées d'un point (z,t) dans $\widetilde{M}$. Les feuilles de $\widetilde{\mathcal{F}}$ sont holomorphiquement équivalentes à $\mathbb{C}$ sauf celle qui correspond à $t = 0$ qui est $\mathbb{C}^*$. Soit $\phi : \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M}$ le difféomorphisme de M défini par $\phi(z,t) = (\lambda z, \lambda t)$ où $\lambda \in]0,1[$. L'action de $\mathbb{Z}$ engendrée par ϕ est libre, propre et discontinue ; le quotient $M = \widetilde{M}/\phi$ est difféomorphe à la *variété de Hopf* réelle $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n+1}$. Le feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}$ est invariant par ϕ et induit un feuilletage complexe $\mathcal{F}_\lambda$ de dimension 1 sur M. Les feuilles sont des copies de $\mathbb{C}$ sauf celle qui correspond à $t = 0$ qui est une *courbe elliptique* C_λ dont la structure complexe est donnée par celle de la couronne $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |\lambda| < |z| < 1\}$. Tout isomorphisme de feuilletages $f : (M,\mathcal{F}_\lambda) \longrightarrow (M,\mathcal{F}_{\lambda'})$ induit un biholomorphisme de C_λ sur $C_{\lambda'}$. Donc si $\lambda \neq \lambda'$, $\mathcal{F}_\lambda$ n'est pas isomorphe à $\mathcal{F}_{\lambda'}$.

• Cherchons le groupe $G(\mathcal{F}_\lambda)$ des automorphismes de $\mathcal{F}_\lambda$ sur $M = \widetilde{M}/\phi$ (dans le cas où la variété $\widetilde{M}$ est $\mathbb{C}\times\mathbb{R}$). Un élément f de $G(\mathcal{F}_\lambda)$ est donné par un automorphisme $\widetilde{f} : \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M}$ de $\mathcal{F}$ commutant à l'action de ϕ ; il s'écrit $\widetilde{f}(z,t) = (f_1(z,t), f_2(t))$ où f_1 est holomorphe en z et commute à la multiplication $z \longmapsto \lambda z$ et f_2 est un difféomorphisme de $\mathbb{R}$; f_1 est nécessairement de la forme $f_1(z,t) = a(t)z$ où $a(t) \in \mathrm{GL}(1,\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ dépendant différentiablement de t. D'autre part, comme $\mathbb{C}^*$ n'est pas équivalent à $\mathbb{C}$, f_2 doit fixer 0 et commuter à l'homothétie $\phi_2 : t \longmapsto \lambda t$ *i.e.* $f_2(\lambda t) = \lambda f_2(t)$; il est alors du type $f_2(t) = bt$ où $b \in \mathbb{R}^*$. Le groupe $G(\mathcal{F}_\lambda)$ est donc celui des transformations de la forme $(z,t) \longmapsto (a(t)z, bt)$ où $a \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}^*)$ et $b \in \mathbb{R}^*$.

La variété ici est $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n+1}$ qui est le quotient de $\widetilde{M} = \mathbb{C}\times\mathbb{R}^n \setminus \{(0,0)\}$ par l'action de $\mathbb{Z}$ engendrée par l'automorphisme $(z,t) \in \widetilde{M} \stackrel{\gamma}{\longrightarrow} (\lambda z, \lambda t) \in \widetilde{M}$. Elle sera munie du feuilletage $\mathcal{F}_\lambda$ défini qu'on notera simplement $\mathcal{F}$.

4.2. Théorème principal. *Les espaces vectoriels $H^{00}_{\mathcal{F}}(M) = \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M)$ et $H^{01}_{\mathcal{F}}(M)$ sont isomorphes à la droite complexe $\mathbb{C}$.*

• Réglons d'abord le cas de $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M)$. Un élément de l'espace $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M)$ est une fonction $\mathcal{F}$-holomorphe f sur M, donc une fonction sur $\widetilde{M}$ telle que $f(\lambda z, \lambda t) = f(z,t)$ et qui est $\mathcal{F}$-holomorphe. Mais, d'après la Proposition 3.3, f s'étend en une fonction $\mathcal{F}$-holomorphe sur $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^n$. D'autre part :

$$f(z,t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} f_\ell(t) z^\ell$$

où les f_ℓ sont des fonctions continues de $t \in \mathbb{R}^n$ (données par les formules intégales de gauche dans (7)). Comme f vérifie $f(\lambda z, \lambda t) = f(z,t)$, les f_ℓ doivent satisfaire la relation $\lambda^{-\ell} f_\ell(t) = f_\ell(\lambda t)$. Mais, pour $\ell \neq 0$, cette relation force $|f_\ell|$ à tendre vers $+\infty$ quand $|t| \to 0$ et ne saurait donc être continue pour $\ell \neq 0$. Donc f est réduite à la fonction f_0 ; celle-ci vérifiant $f_0(\lambda t) = f_0(t)$ doit être en fait la constante $f_0(0)$.

Pour $H^{01}_{\mathcal{F}}(M)$, la démonstration se fera pour $n = 1$. (Elle est exactement la même pour $n \geq 2$.) Nous allons commencer par décrire les espaces $A^{pq}_{\mathcal{F}}(M)$ des formes feuilletées de type (p,q).

• Une forme feuilletée de type $(0,1)$ sur $\widetilde{M}$ (resp. de type $(1,0)$) s'écrit $\alpha = f(z,t)d\overline{z}$ (resp. $\beta = g(z,t)dz$) où f et g sont des éléments de $A(M)$. L'action de γ sur α (resp. β) est donnée par $\gamma^*(\alpha) = \lambda f(\lambda z, \lambda t) d\overline{z}$ (resp. $\gamma^*(\beta) = \lambda g(\lambda z, \lambda t) d\overline{z}$). Les deux formes α et β sont donc invariantes par γ si les fonctions f et g vérifient les relation fonctionnelles :

$$\lambda f(\lambda z, \lambda t) = f(z,t) \quad \text{et} \quad \lambda g(\lambda z, \lambda t) = g(z,t). \tag{8}$$

• Une forme feuilletée de type $(1,1)$ sur $\widetilde{M}$ s'écrit $\eta = h(z,t) dz \wedge d\overline{z}$. La condition d'invariance par γ impose à la fonction h de vérifier cette fois-ci $\lambda^2 h(\lambda z, \lambda t) = h(z,t)$.

• Donnons explicitement quelques exemples de ces formes feuilletées, par exemple de type $(0,1)$, situation qui va le plus nous intéresser par la suite. On doit donc trouver une fonction $f \in A(M)$ telle que $\lambda f(\lambda z, \lambda t) = f(z,t)$. Il est évident que :

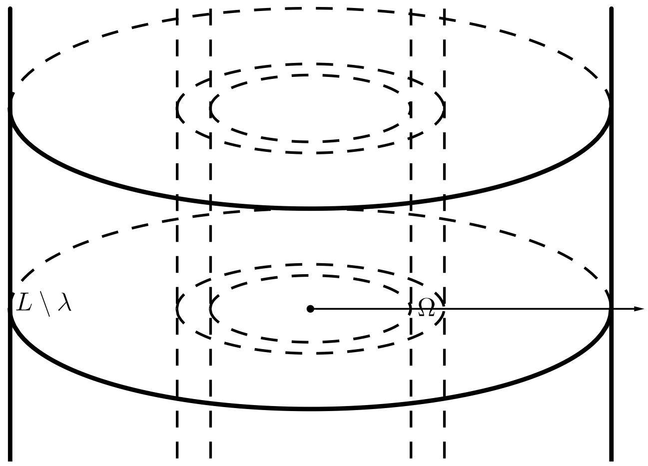
$$a(z,t) = \frac{1}{\sqrt{z\overline{z} + t^2}}$$

en est une. Si f est une autre fonction (tout à fait quelconque) et vérifiant (8), la fonction $u = \frac{f}{f_0}$ (bien définie car f_0 ne s'annule nulle part) vérifie $u(\lambda z, \lambda t) = u(z,t)$, donc une fonction sur la variété compacte $M = \widetilde{M}/\langle\gamma\rangle$ et par suite bornée. Toute $(0,1)$-forme feuilletée sur M s'écrit donc $\alpha(z,t) = a(z,t)u(z,t)d\overline{z}$ où u est une fonction sur $\widetilde{M}$ invariante par l'action du difféomorphisme γ.

4.3. Démonstration du théorème principal

Première étape

Soient R et ε deux réels strictement positifs tels que $R + \varepsilon < \lambda^{-1}R$; on note L le disque fermé de $\mathbb{C}$ de rayon R et Ω un ε-voisinage ouvert de L. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on pose $K_j = \lambda^{-j} L_0$ et $\Omega_j = \lambda^{-j}\Omega_0$ où $L_0 = L \times \mathbb{R}$ et $\Omega_0 = \Omega \times \mathbb{R}$.



Soit $\rho_0 : z \in \mathbb{C} \longmapsto \rho_0(z) \in \mathbb{R}_+$ une fonction C^∞ à support compact, ne dépendant que de $|z|$ et identiquement égale à 1 sur Ω. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, la fonction $\rho_j(\xi) = \rho_0(\lambda^j \xi)$ est C^∞, à support compact et vaut 1 identiquement sur l'ouvert $\lambda^{-j}\Omega$. Soit $\phi_j : \mathbb{C} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction définie par $\phi_j(\xi, t) = \rho_j(\xi)$ et :

$$\psi_j(\xi, t) = \begin{cases} \phi_j(\xi, t) & \text{si } j = 0 \\ \phi_j(\xi, t) - \phi_{j-1}(\xi, t) & \text{si } j \geq 1. \end{cases}$$

Comme $\phi_j(\xi, t)$ et $\psi_j(\xi, t)$ ne dépendent pas de t, on les notera simplement $\phi_j(\xi)$ et $\psi_j(\xi)$. Les relations suivantes sont bien sûr immédiates mais comme elles nous seront très utiles, nous les rappelons et les mettrons bien en vue :

$$\begin{cases} \phi_j(\xi) & = \phi_0(\lambda^j \xi) \quad \text{(par définition de } \phi_j) \\ \psi_j(\lambda \xi) & = \psi_{j+1}(\xi). \end{cases} \tag{9}$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, la section K_j^t de K_j est un $\mathcal{F}$-compact (son intersection avec toute feuille est un compact) contenu dans l'intérieur de K_{j+1}. On a :

$$\bigcup_{j=0}^{\infty} K_j = \mathbb{C} \times \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j = 1.$$

Deuxième étape

On se donne une $(0,1)$-forme feuilletée $\alpha = f(z,t) d\bar{z}$ où f vérifie la relation fonctionnelle (8). Pour une raison évidente de degré, cette forme est $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}$-fermée. D'autre part, comme α s'écrit $\alpha = a(z,t) u(z,t) d\bar{z}$ avec u invariante par γ, la fonction f a la croissance de la fonction a qui est localement intégrable. Pour tout $(z,t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\} = \widetilde{M}$, la quantité qui suit existe :

$$h_0(z,t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\psi_0(\xi) f(\xi, t)}{\xi - z} d\xi \wedge d\bar{\xi}.$$

La fonction h_0 est donc bien définie, continue en (z,t) et C^∞ en z (*cf.* [Hö] Theorem 1.2.2 page 3). En utilisant la formule intégrale de Cauchy, on montre facilement que h_0 vérifie l'équation $\overline{\partial}_{\mathcal{F}} h_0 = \psi_0 f$ sur $\widetilde{M}$.

Soit $j \in \mathbb{N}^*$. Le support de ψ_j ne contient pas l'origine $(0,0)$. Comme précédemment, on pose pour tout $(z,t) \in \widetilde{M}$:

$$h_j(z,t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\psi_j(\xi) f(\xi,t)}{\xi - z} d\xi \wedge d\overline{\xi}.$$

Comme pour h_0, la fonction h_j est bien définie, continue en (z,t) et C^∞ en z. Elle vérifie l'équation $\overline{\partial}_{\mathcal{F}} h_j = \psi_j f$.

Troisième étape

Il nous reste à recoller toutes les solutions partielles que nous avons obtenues. Comme $\psi_j = 0$ sur Ω_{j-1}, h_j y est $\mathcal{F}$-holomorphe (*cf.* [Hö]). Les sections Ω_{j-1}^t étant des disques ouverts, on peut développer h_j en série entière :

$$h_j(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) z^n \tag{10}$$

qui converge pour la métrique δ sur l'ouvert Ω_{j-1}. En tronquant de façon adéquate la série (10), on obtient une fonction v_j, $\mathcal{F}$-holomorphe sur $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ (c'est un polynôme en z) et telle que :

$$\delta(h_j, v_j) < \frac{1}{2^j}. \tag{11}$$

Soit $\widetilde{h} : \widetilde{M} \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$\widetilde{h}(z,t) = h_0(z,t) + \sum_{j=1}^{\infty} \left(h_j(z,t) - v_j(z,t)\right).$$

En vertu de l'inégalité (11), la série converge uniformément au sens de la métrique δ ; la fonction $\widetilde{h}$ est donc continue en (z,t) et de classe C^∞ en z. En plus, comme l'opérateur $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}$ est continu pour la topologie $C^{0,\infty}$, on a :

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}_{\mathcal{F}} \widetilde{h} &= \overline{\partial}_{\mathcal{F}} \left(h_0(z,t) + \sum_{j=1}^{\infty} \left(h_j(z,t) - v_j(z,t)\right) \right) \\
&= \overline{\partial}_{\mathcal{F}} h_0(z,t) + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\overline{\partial}_{\mathcal{F}} h_j(z,t) - \overline{\partial}_{\mathcal{F}} v_j(z,t) \right) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \overline{\partial}_{\mathcal{F}} h_j(z,t) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(z,t) f(z,t) \\
&= f
\end{aligned}$$

qui montre bien que h est une solution de l'équation $\overline{\partial}_{\mathcal{F}} \widetilde{h} = f$. Mais, a priori, elle ne définit pas une solution au problème sur la variété quotient $M = \widetilde{M}/\langle\gamma\rangle$: elle ne vérifie pas forcément la condition d'invariance $\widetilde{h}(\lambda z, \lambda t) = \widetilde{h}(z,t)$. Pour en obtenir une, on corrige $\widetilde{h}$ en lui rajoutant une fonction $\mathcal{F}$-holomorphe $K(z,t)$ de telle sorte que $h(z,t) = \widetilde{h}(z,t) + K(z,t)$, qui vérifie encore l'équation $\overline{\partial}_{\mathcal{F}} h = f$, soit γ-invariante *i.e.* $h(\lambda z, \lambda t) = h(z,t)$, ce qui impose à K de vérifier l'*équation cohomologique* :

$$K(z,t) - K(\lambda z, \lambda t) = H(z,t) \tag{12}$$

où $H(z,t) = \widetilde{h}(\lambda z, \lambda t) - \widetilde{h}(z,t)$. Nous avons donc à résoudre l'équation (12) où l'inconnue est la fonction $\mathcal{F}$-holomorphe K. Remarquons que H est continue et $\mathcal{F}$-holomorphe sur $\widetilde{M}$; en effet :

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}_{\mathcal{F}} H(z,t) &= \overline{\partial}_{\mathcal{F}} \left(\widetilde{h}(\lambda z, \lambda t) - \widetilde{h}(z,t) \right) \\
&= \lambda (\overline{\partial}_{\mathcal{F}} \widetilde{h})(\lambda z, \lambda t) - \overline{\partial}_{\mathcal{F}} \widetilde{h}(z,t) \\
&= \lambda f(\lambda z, \lambda t) - f(z,t) \\
&= f(z,t) - f(z,t) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Étant $\mathcal{F}$-holomorphe sur l'ouvert $\widetilde{M}$, H l'est sur l'espace $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ tout entier en vertu de la Proposition 3.3.

Quatrième étape

Formellement la fonction $K(z,t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} H(\lambda^n z, \lambda^n t)$ est solution de l'équation (12). Il ne reste donc plus qu'à montrer que cette série converge pour la topologie $C^{0,\infty}$ pour qu'elle définisse effectivement une fonction continue et $\mathcal{F}$-holomorphe.

Une condition nécessaire de l'existence de K est $H(0,0) = 0$. Avant d'examiner comment elle est vérifiée, explicitons la quantité :

$$\begin{aligned}
H(z,t) &= \widetilde{h}(\lambda z, \lambda t) - \widetilde{h}(z,t) \\
&= h_0(\lambda z, \lambda t) - h_0(z,t) + \sum_{j=1}^{\infty} \{ h_j(\lambda z, \lambda t) - h_j(z,t) \} - \sum_{j=1}^{\infty} \{ v_j(\lambda z, \lambda t) - v_j(z,t) \}.
\end{aligned}$$

• Commençons par $h_0(\lambda z, \lambda t) - h_0(z,t)$. On a :

$$\begin{aligned}
h_0(\lambda z, \lambda t) - h_0(z,t) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\psi_0(\xi) f(\xi, \lambda t)}{\xi - \lambda z} d\xi \wedge d\overline{\xi} - \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\psi_0(\xi) f(\xi, t)}{\xi - z} d\xi \wedge d\overline{\xi} \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\psi_0(\lambda\xi) f(\xi, t)}{\xi - z} d\xi \wedge d\overline{\xi} - \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\psi_0(\xi) f(\xi, t)}{\xi - z} d\xi \wedge d\overline{\xi} \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\psi_1(\xi) f(\xi, t)}{\xi - z} d\xi \wedge d\overline{\xi}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Le passage de la première ligne à la deuxième se fait par chagement de variable $\xi \longmapsto \lambda\xi$ et utilise la relation $\lambda f(\lambda\xi, \lambda t) = f(\xi, t)$ et le passage de la deuxième ligne à la troisième les relations (9).

• Un calcul similaire donne :

$$h_j(\lambda z, \lambda t) - h_j(z,t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{(\psi_j(\lambda\xi) - \psi_j(\xi)) f(\xi, t)}{\xi - z} d\xi \wedge d\overline{\xi}.$$

En utilisant la deuxième relation de (9), on obtient :

$$h_j(\lambda z, \lambda t) - h_j(z,t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{(\psi_{j+1}(\xi) - \psi_j(\xi))f(\xi,t)}{\xi - z} d\xi \wedge d\overline{\xi}. \tag{14}$$

• Les relations (13) et (14) donnent finalement :

$$\sum_{j=0}^{N} \{h_j(\lambda z, \lambda t) - h_j(z,t)\} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\psi_N(\xi)f(\xi,t)}{\xi - z} d\xi \wedge d\overline{\xi}.$$

Comme l'évaluation de la quantité $\sum_{j=1}^{\infty}\{v_j(\lambda z, \lambda t) - v_j(z,t)\}$ en $(0,0)$ est nulle (pour tout $j \geq 1$, la fonction v_j est définie en $(0,0)$), on obtient :

$$H(0,0) = \lim_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\psi_N(\xi)f(\xi,0)}{\xi} d\xi \wedge d\overline{\xi}\right).$$

• Pour finir cette étape, montrons que la suite de nombres complexes $(I_N)_{N\geq 1}$ où I_N est donné par :

$$I_N = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\psi_N(\xi)f(\xi,0)}{\xi} d\xi \wedge d\overline{\xi}$$

est constante. Ceci résulte du calcul immédiat qui suit, qui utilise la deuxième des relations (9) et l'invariance $\lambda f(\lambda\xi, 0) = f(\xi,0)$ de f (pour $\xi \neq 0$ bien sûr). En effet :

$$\begin{aligned}
I_{N+1} &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\psi_{N+1}(\xi)f(\xi,0)}{\xi} d\xi \wedge d\overline{\xi} \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\psi_N(\lambda\xi)f(\xi,0)}{\xi} d\xi \wedge d\overline{\xi} \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\psi_N(\zeta)f(\frac{\zeta}{\lambda},0)}{\frac{\zeta}{\lambda}} \frac{d\zeta \wedge d\overline{\zeta}}{\lambda^2} \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\psi_N(\zeta)f(\zeta,0)}{\xi} d\zeta \wedge d\overline{\zeta} \\
&= I_N.
\end{aligned}$$

Par suite, la condition $H(0,0) = 0$ est équivalente à :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\psi_1(\xi)f(\xi,0)}{\xi} d\xi \wedge d\overline{\xi} = 0. \tag{15}$$

Cinquième étape

Nous avons vu que la condition $H(0,0) = 0$ est nécessaire à l'existence de la fonction K. Montrons maintenant qu'elle est aussi suffisante. Ce sera le cas si on montre la convergence de la série qui suit pour la topologie $C^{0,\infty}$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} H\left(\lambda^n z, \lambda^n t\right) = & \sum_{n=0}^{\infty}\big(h_0(\lambda^{n+1}z,\lambda^{n+1}t) - h_0(\lambda^n z,\lambda^n t)\big) \\ & + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left\{h_j(\lambda^{n+1}z,\lambda^{n+1}t) - h_j(\lambda^n z,\lambda^n t)\right\} \\ & - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left\{v_j(\lambda^{n+1}z,\lambda^{n+1}t) - v_j(\lambda^n z,\lambda^n t)\right\}.\end{aligned} \tag{16}$$

Un calcul simple, utilisant le fait que f vérifie la relation fonctionnelle $\lambda f(\lambda\xi,\lambda t) = f(\xi,t)$, montre que :

$$h_0(\lambda^{n+1}z,\lambda^{n+1}t) - h_0(\lambda^n z,\lambda^n t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\left\{\psi_0(\lambda^{n+1}\xi) - \psi_0(\lambda^n\xi)\right\} f(\xi,t)}{\xi - z} d\xi\wedge d\bar{\xi}$$

et :

$$h_j(\lambda^{n+1}z,\lambda^{n+1}t) - h_j(\lambda^n z,\lambda^n t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\left\{\psi_j(\lambda^{n+1}\xi) - \psi_j(\lambda^n\xi)\right\} f(\xi,t)}{\xi - z} d\xi\wedge d\bar{\xi}.$$

Pour montrer la convergence de la série $K(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} H(\lambda^n z,\lambda^n t)$, on va expliciter et simplifier l'expression des trois séries qui composent le membre de droite de la relation (16). Formellement on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\big(h_0(\lambda^{n+1}z,\lambda^{n+1}t) - h_0(\lambda^n z,\lambda^n t)\big) = \int_{\mathbb{C}} \frac{\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\psi_0(\lambda^{n+1}\xi) - \psi_0(\lambda^n\xi)\right\} f(\xi,t)}{2i\pi(\xi - z)} d\xi\wedge d\bar{\xi}.$$

Soit N un entier naturel positif. Comme :

$$\sum_{n=0}^{N}\left\{\psi_0(\lambda^{n+1}\xi) - \psi_0(\lambda^n\xi)\right\} = \psi_0(\lambda^{N+1}\xi) - \psi_0(\xi) \tag{17}$$

on a :

$$\sum_{n=0}^{N}\left\{h_0(\lambda^{n+1}z,\lambda^{n+1}t) - h_0(\lambda^n z,\lambda^n t)\right\} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\big(\psi_0(\lambda^{N+1}\xi) - \psi_0(\xi)\big) f(\xi,t)}{\xi - z} d\xi\wedge d\bar{\xi}.$$

De la même manière, nous allons nous occuper de la série double :

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left\{h_j(\lambda^{n+1}z,\lambda^{n+1}t) - h_j(\lambda^n z,\lambda^n t)\right\}.$$

D'abord on a :

$$\begin{aligned}\psi_j(\lambda^{n+1}\xi) &= \phi_j(\lambda^{n+1}\xi) - \phi_{j-1}(\lambda^{n+1}\xi) \\ &= \phi_0(\lambda^{n+j+1}\xi) - \phi_0(\lambda^{n+j}\xi).\end{aligned}$$

En sommant sur $n \in \mathbb{N}$ de 0 à N, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{N} \psi_j(\lambda^{n+1}\xi) = \phi_0(\lambda^{j+N}\xi) - \phi_0(\lambda^j\xi).$$

De façon similaire, on établit l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{N} \psi_j(\lambda^{n}\xi) = \phi_0(\lambda^{j+N}\xi) - \phi_0(\lambda^{j-1}\xi).$$

Et par suite :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} \left\{\psi_j(\lambda^{n+1}\xi) - \psi_j(\lambda^n\xi)\right\} &= -\phi_0(\lambda^j\xi) + \phi_0(\lambda^{j-1}\xi)\\ &= -\phi_j(\xi) + \phi_{j-1}(\xi)\\ &= -\psi_j(\xi).\end{aligned}$$

Finalement :

$$\sum_{n=0}^{N} \left\{h_j(\lambda^{n+1}z, \lambda^{n+1}t) - h_j(\lambda^n z, \lambda^n t)\right\} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{(-\psi_j(\xi))f(\xi,t)}{\xi - z} d\xi \wedge d\bar{\xi}.$$

Après sommation sur $j \in \mathbb{N}^*$, on obtient :

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{N} \left\{h_j(\lambda^{n+1}z, \lambda^{n+1}t) - h_j(\lambda^n z, \lambda^n t)\right\} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{(\psi_0(\xi) - 1)f(\xi,t)}{\xi - z} d\xi \wedge d\bar{\xi}.$$

D'où :

$$\sum_{n=0}^{N} \left\{h_0(\lambda^{n+1}z, \lambda^{n+1}t) - h_0(\lambda^n z, \lambda^n t)\right\} + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{N} \left\{h_j(\lambda^{n+1}z, \lambda^{n+1}t) - h_j(\lambda^n z, \lambda^n t)\right\} =$$

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\left((\psi_0(\xi) - 1) + (\psi_0(\lambda^{N+1}\xi) - \psi_0(\xi))\right) f(\xi,t)}{\xi - z} d\xi \wedge d\bar{\xi}.$$

On fait tendre N vers $+\infty$; le terme $\psi_0(\lambda^{N+1}\xi)$ tend vers $\psi_0(0) = 1$ (puisque $0 < \lambda < 1$). Par suite :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{h_0(\lambda^{n+1}z, \lambda^{n+1}t) - h_0(\lambda^n z, \lambda^n t)\right\} + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \left\{h_j(\lambda^{n+1}z, \lambda^{n+1}t) - h_j(\lambda^n z, \lambda^n t)\right\} =$$

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\left\{(\psi_0(\xi) - 1) + (1 - \psi_0(\xi))\right\} f(\xi,t)}{\xi - z} d\xi \wedge d\bar{\xi} = 0.$$

En réalité, la fonction $\mathcal{F}$-holomorphe K qu'on cherche est réduite à la série double :

$$K(z,t) = -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \left\{v_j(\lambda^{n+1}z, \lambda^{n+1}t) - v_j(\lambda^n z, \lambda^n t)\right\}.$$

Sa convergence uniforme sur tout compact de $\widetilde{M}$ résulte de sa convergence en $(0,0)$ (puisque tous ses termes sont nuls) et du fait que la série des dérivées par rapport à la variable z est équivalente à des séries géométriques de raison λ (qui est dans $]0,1[$). (Rappelons que sur l'espace vectoriel $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}(\widetilde{M}) = \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(\mathbb{C}\times\mathbb{R})$ la convergence uniforme sur tout compact est équivalente à la convergence pour la $C^{0,\infty}$-topologie.)

Sixième étape

Revenons à la condition $H(0,0)=0$ nécessaire à l'existence de la fonction $\mathcal{F}$-holomorphe K qu'on cherche. Soit $\mathcal{I} : A^{01}_{\mathcal{F}}(M) \longrightarrow \mathbb{C}$ la forme linéaire continue définie par :

$$\mathcal{I}(fd\overline{z}) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\psi_1(z)f(z,0)}{z}dz\wedge d\overline{z}.$$

Alors il n'est pas difficile de voir, à partir de tous les calculs que nous avons menés précédemment, que $H(0,0)=0$ si, et seulement si, la $(0,1)$-forme feuilletée $f(z,t)d\overline{z}$ est dans le noyau de $\mathcal{I}$. La dimension de l'espace vectoriel $H^{01}_{\mathcal{F}}(M)$ est donc au plus 1. Pour montrer qu'elle est en fait égale à 1, il suffit de vérifier que la forme linéaire $\mathcal{I}$ est non nulle. Nous allons voir que son évaluation sur la $(0,1)$-forme :

$$\omega_0 = \frac{zd\overline{z}}{z\overline{z}+t^2}$$

est différente de 0. À cet effet, rappelons d'abord que ψ_1 ne dépend que du module de z et que son support est contenu dans une couronne :

$$\Delta = \{z\in\mathbb{C} : R_1 \le |z| \le R_2\}$$

(avec, bien sûr, $0<R_1<R_2$). D'autre part, comme ψ_1 est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et non identiquement nulle, son intégrale sur l'intervalle $[R_1,R_2]$ (en tant que fonction uniquement de $r=|z|$) est un réel strictement positif. Posons $z=re^{i\theta}$. On a :

$$dz\wedge d\overline{z} = d(re^{i\theta})\wedge d(re^{-i\theta}) = \big(e^{i\theta}(dr+ird\theta)\big)\wedge\big(e^{-i\theta}(dr-ird\theta)\big) = -2irdr\wedge d\theta.$$

D'où :

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(\omega_0) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{C}}\frac{\psi_1(z)z}{z\cdot|z|^2}dz\wedge d\overline{z}\\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\Delta}\frac{\psi_1(r)(-2i)}{r}dr\wedge d\theta\\ &= -\frac{1}{\pi}\left(\int_{R_1}^{R_2}\frac{\psi_1(r)}{r}dr\right)\cdot\int_0^{2\pi}d\theta\\ &= -2\int_{R_1}^{R_2}\frac{\psi_1(r)}{r}dr\\ &< 0.\end{aligned}$$

Par suite, la forme linéaire continue $\mathcal{I}$ n'est pas nulle. On a finalement :

$$H^{01}_{\mathcal{F}}(\mathbb{S}^{n+1}\times\mathbb{S}^1) = \mathbb{C}\omega_0.$$

Ceci termine la démonstration du théorème. $\square$

4.4. Remarque

Elle pourrait être significative, et c'est la raison pour laquelle nous avons jugé de la faire. La cohomologie de Dolbeault feuilletée $H^{0*}_{\mathcal{F}}(\mathbb{S}^{n+1} \times \mathbb{S}^1)$ du feuilletage $\mathcal{F}$ est la "même" que celle de la feuille compacte (courbe elliptique C_λ) induite par la feuille correspondant à $t = 0$ dans le revêtement $\widetilde{M} = \mathbb{C} \times \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$. Ceci est sûrement dû au fait que cette feuille compacte a une holonomie contractante.

Références

[Cam] Camacho, C. & Neto, A. *Geometric Theory of Foliations.* Birkhäuser.

[BC] Ben Charrada, R. *Cohomology of some complex laminations.* Results in Math. 57, (2010) 33-41.

[Ek1] El Kacimi Alaoui, A. *The $\overline{\partial}$ along the leaves and Guichard's Theorem for a simple complex foliation.* Math. Annalen 347, (2010), 885-897.

[Ek2] El Kacimi Alaoui, A. *On leafwise meromorphic functions with prescribed poles.* Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series, 48(2), (2017) 261-282.

[ES] El Kacimi Alaoui, A. & Slimène, J. *Cohomologie de Dolbeault le long des feuilles de certains feuilletages complexes.* Annales de l'Institut Fourier de Grenoble, Tome 60 n^{o}2, (2010), 727-757.

[GT] Gigante, G. & Tomassini, G. *Foliations with complex leaves.* Diff. Geo. and its Applications 5, (1995) 33-49.

[Hö] Hörmander, L. *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables.* D. Van Nostrand Compagny, Inc., (1966).

[Sℓ] Slimène, J. *Deux exemples de calcul explicite de cohomologie de Dolbeault feuilletée.* Proyecciones Vol. 27, N^0 1, pp. 63-80, May 2008.

Rochdi Ben Charrada
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences de Sfax
3018 Sfax – Tunisie
rochdi_charrada@yahoo.fr

Aziz El Kacimi Alaoui
Université Polytechnique Hauts-de-France
EA 4015 - LAMAV
FR CNRS 2956
F-59313 Valenciennes Cedex 9, France
aziz.elkacimi@uphf.fr