

# VARIATIONS SUR LES DROITES CONCOURANTES

AZIZ EL KACIMI

Ce texte est la compilation de trois billets (correspondant aux trois sections ci-dessous) publiés dans le site Images des mathématiques pour dire *Quelques mots sur les figures sans paroles* ! Dans le premier nous avons conté le beau théorème de Ceva avec sa démonstration complète et détaillée. Il a servi, dans le second, à établir deux autres aussi beaux théorèmes : celui de Nagel et celui de Ceva-Nagel-Gergonne. Dans le troisième, nous nous sommes permis de petites digressions pour offrir au lecteur quelques friandises topologiques. L'une d'elle est inspirée par le théorème de Ceva, et toutes sont concoctées à l'aide de méthodes ne dépassant guère celles de la géométrie élémentaire plane même si quelques éléments du langage utilisé paraissent un peu élaborés.

Deux droites se coupent presque sûrement. En revanche, trois droites ne sont presque jamais concourantes. Savoir quand elles peuvent l'être est une question fréquente en géométrie plane. Le théorème de Ceva fournit une des réponses ; ce sera l'objet de la section 1. On l'appliquera ensuite dans la section 2 pour démontrer deux théorèmes : un premier portant sur le point de Nagel et un deuxième sur le point de Gergonne. Dans la section 3, on offrira quelques friandises topologiques concoctées géométriquement de façon élémentaire.

Il n'y a rien de nouveau dans ce texte à part les quelques digressions de la section 3. Je l'ai écrit pour faire un peu de mathématiques que beaucoup ont décidé d'abandonner.

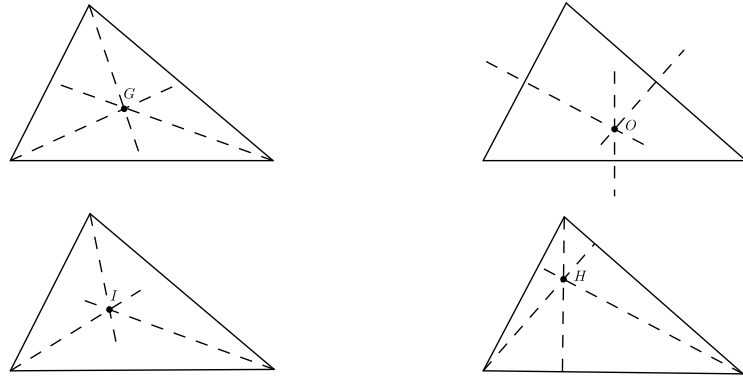
## 1. Le théorème de Ceva

Le triangle est la plus élémentaire des figures géométriques non triviales du plan et, sans conteste, l'une des plus riches : pléthore de questions ont été posées et de résultats obtenus dessus. C'est ce qui a fait dire à Crelle en 1816 (suite à la découverte du point de Brocard) « *Il est véritablement fascinant qu'une figure aussi simple que le triangle possède des propriétés aussi inépuisables* ». Une figure simple, oui !

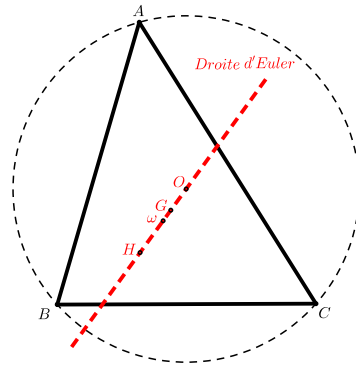
**1.1.** Il est bien connu que dans un triangle :

- (1) Les médianes concourent en un point  $G$  qui est son centre de gravité.
- (2) Les médiatrices concourent en un point  $O$ , centre de son cercle circonscrit.
- (3) Les bissectrices concourent en un point  $I$ , centre de son cercle inscrit.
- (4) Les hauteurs concourent en un point  $H$  qui est son orthocentre.

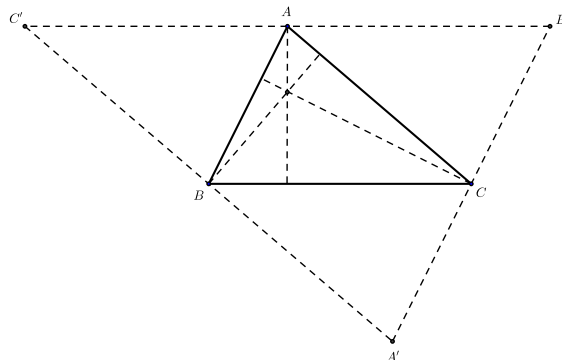
A priori, ces droites dites *remarquables* semblent différentes mais elles ont quelque chose en commun : le *partage*. La médiane tronçonne le triangle en deux parties de même aire. La bissectrice divise l'angle en deux angles égaux et constitue l'ensemble des points à égale distance des côtés adjacents. La hauteur plonge d'un sommet et casse l'angle plat d'en face en deux angles droits. Les médiatrices se rencontrent en le point à égale distance des trois sommets : leur lieu commun de villégiature, proche autant de l'un que des autres. Tout est bien fait !



Et ce qui est encore plus beau : les trois points  $G$ ,  $H$  et  $O$  sont sur une même droite appelée *droite d'Euler* du triangle  $ABC$  ; si on leur adjoint le milieu  $\omega$  du segment  $[OH]$ , le quadruplet  $(G, H, O, \omega)$  devient une division harmonique *i.e.*  $\frac{OG}{OH} : \frac{\omega G}{\omega H} = -1$ .



Les assertions (1), (2) et (3) sont relativement faciles à démontrer. La quatrième n'est pas aussi directe mais on y arrive en passant par un deuxième triangle  $A'B'C'$  dont les médiatrices sont les hauteurs en question. On le construit en traçant les parallèles aux côtés  $BC$ ,  $CA$  et  $AB$  passant respectivement par les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  (voir dessin ci-dessous).



Habituellement on définit une *cevienne* d'un triangle comme étant une droite qui passe par un sommet et par un point du côté opposé. Mais, pour des « besoins de raccourci » dans ce texte, nous conviendrons d'appeler *cevienne* toute droite qui passe par un sommet et par un point sur la droite qui porte le côté opposé. Soit  $(A\alpha)$  une cevienne d'un triangle  $ABC$  ; on dira qu'elle est *intérieure* si  $\alpha \in ]BC[$  et *extérieure* si  $\alpha \notin [BC]$ . (Nous ne

nous occuperons pas du cas où le point  $\alpha$  est sur  $B$  ou sur  $C$ .) Une question naturelle se pose alors : *Sous quelles conditions trois ceviennees  $(A\alpha)$ ,  $(B\beta)$  et  $(C\gamma)$  d'un triangle  $ABC$  sont-elles concourantes ?*

Une belle réponse est donnée par un théorème attribué à Ceva[1] mais dont José Zaragoza[2] a démontré une version quelques années auparavant. Et il paraît même qu'il était déjà connu de Al-Mutaman[3] à la fin du XI<sup>ème</sup> siècle. Pour que l'exposé de ce théorème soit clair, nous l'énoncerons et le démontrerons en considérant deux cas différents.

**1.2. Théorème de Ceva.** *Soient  $ABC$  un triangle et  $(A\alpha)$ ,  $(B\beta)$  et  $(C\gamma)$  trois ceviennees.*

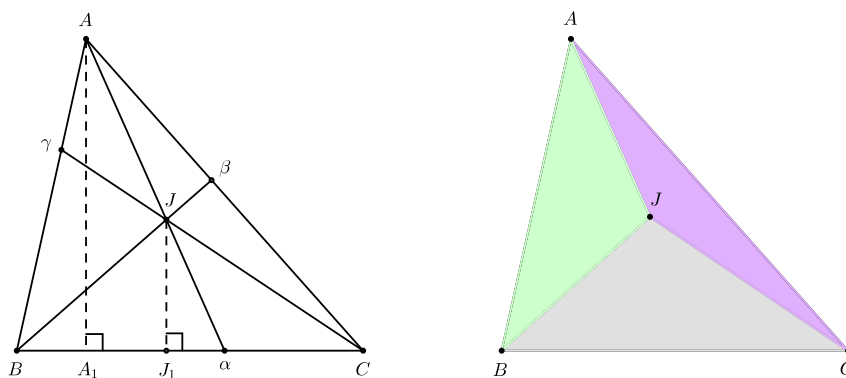
**Cas 1.** *On suppose  $(A\alpha)$ ,  $(B\beta)$  et  $(C\gamma)$  toutes intérieures. Alors elles sont concourantes si, et seulement si,  $\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B} = -1$ .*

**Cas 2.** *On suppose  $(A\alpha)$ ,  $(B\beta)$  et  $(C\gamma)$  non toutes intérieures. Alors elles sont concourantes ou parallèles si, et seulement si,  $\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B} = -1$ .*

*Preuve.* Aussi bien dans le cas 1 que dans le cas 2, elle est belle et d'un niveau élémentaire. Il faut donc absolument la dévoiler.

En faisant juste de simples dessins le lecteur peut facilement se convaincre que les ceviennees  $(A\alpha)$ ,  $(B\beta)$  et  $(C\gamma)$  n'ont que deux possibilités si elles veulent être parallèles ou concourantes : i) les trois sont intérieures ; ii) deux sont extérieures et une est intérieure. Dans le cas i) les trois rapports  $\frac{\alpha B}{\alpha C}$ ,  $\frac{\beta C}{\beta A}$  et  $\frac{\gamma A}{\gamma B}$  sont négatifs. Dans le cas ii) deux de ces rapports sont positifs et un est négatif. Il suffit donc de montrer (à chaque fois qu'on aura à le faire) que  $\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B} = 1$ .

**Cas 1.** Supposons que les trois droites  $(A\alpha)$ ,  $(B\beta)$  et  $(C\gamma)$  concourent en un point qu'on notera  $J$ . Soit  $A_1$  la projection orthogonale de  $A$  sur la droite  $(BC)$ . Alors l'aire  $\mathcal{A}(A\alpha B)$  du triangle  $A\alpha B$  est égale à  $\frac{AA_1 \cdot \alpha B}{2}$  ; de même l'aire  $\mathcal{A}(A\alpha C)$  du triangle  $A\alpha C$  est égale à  $\frac{AA_1 \cdot \alpha C}{2}$ . On a donc :  $\frac{\alpha B}{\alpha C} = \frac{\mathcal{A}(A\alpha B)}{\mathcal{A}(A\alpha C)}$ .



[1] Giovanni CEVA : mathématicien italien (1647-1734) connu par le fameux théorème énoncé ci-dessus et par les liens qu'il a découverts entre mécanique et géométrie.

[2] José ZARAGOZA : jésuite et mathématicien espagnol (1627-1679). Il a été le premier à formaliser l'écriture algébrique en Espagne.

[3] Yusuf AL-MUTAMAN : mathématicien arabe qui vécut au XI<sup>ème</sup> siècle dans la taïfa de Saragosse et dont il fut roi de 1081 à 1085.

En considérant cette fois-ci la projection orthogonale  $J_1$  du point  $J$  sur  $(BC)$  et en suivant la même démarche, on montre que :  $\frac{\alpha B}{\alpha C} = \frac{\mathcal{A}(J\alpha B)}{\mathcal{A}(J\alpha C)}$ . Par suite :

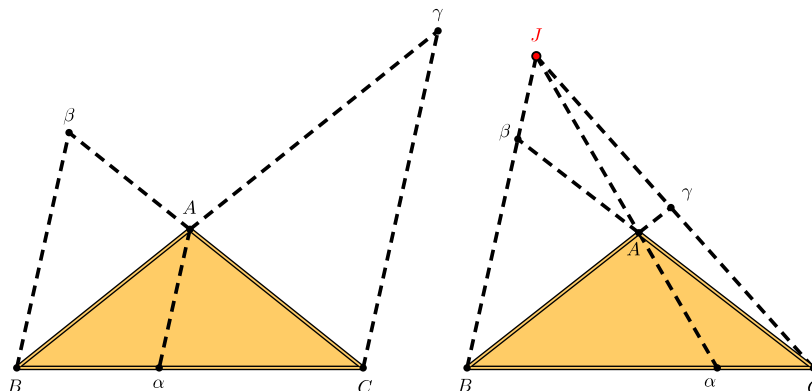
$$\frac{\alpha B}{\alpha C} = \frac{\mathcal{A}(A\alpha B)}{\mathcal{A}(A\alpha C)} = \frac{\mathcal{A}(J\alpha B)}{\mathcal{A}(J\alpha C)} = \frac{\mathcal{A}(A\alpha B) - \mathcal{A}(J\alpha B)}{\mathcal{A}(A\alpha C) - \mathcal{A}(J\alpha C)} = \frac{\mathcal{A}(AJB)}{\mathcal{A}(AJC)}.$$

De façon analogue, on montre que  $\frac{\beta C}{\beta A} = \frac{\mathcal{A}(BJC)}{\mathcal{A}(BJA)}$  et  $\frac{\gamma A}{\gamma B} = \frac{\mathcal{A}(CJA)}{\mathcal{A}(CJB)}$ . D'où :

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B} = \frac{\mathcal{A}(AJB)}{\mathcal{A}(AJC)} \cdot \frac{\mathcal{A}(BJC)}{\mathcal{A}(BJA)} \cdot \frac{\mathcal{A}(CJA)}{\mathcal{A}(CJB)} = 1.$$

La réciproque est facile. On suppose qu'on a  $\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B} = 1$ . On note  $I$  le point d'intersection des droites  $(B\beta)$  et  $(C\gamma)$  et  $\alpha'$  le point d'intersection de  $(AI)$  avec le segment  $[BC]$ . Comme les cevienes  $(B\beta)$  et  $(C\gamma)$  sont intérieures, il en est de même de  $(A\alpha')$ . D'après ce qu'on vient d'établir, on a  $\frac{\alpha' B}{\alpha' C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B} = 1$ . Comme, par hypothèse, on a aussi  $\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B} = 1$ , on en déduit  $\frac{\alpha B}{\alpha C} = \frac{\alpha' B}{\alpha' C}$ . Les deux points  $\alpha$  et  $\alpha'$  étant situés entre  $B$  et  $C$ , cette égalité implique qu'ils sont confondus.  $\diamond$

**Cas 2.** On supposera, pour fixer les idées,  $(A\alpha)$  intérieure,  $(B\beta)$  et  $(C\gamma)$  extérieures. Ci-dessous les dessins qui serviront de support à tous nos raisonnements.



• **On suppose que les droites  $(A\alpha)$ ,  $(B\beta)$  et  $(C\gamma)$  sont parallèles**

On applique le théorème de Thalès aux droites parallèles  $(A\alpha)$  et  $(B\beta)$  et aux sécantes  $(C\alpha)$  et  $(C\beta)$  :  $\frac{\beta C}{\beta A} = \frac{BC}{\alpha B}$ . De même, on applique le théorème de Thalès aux droites parallèles  $(A\alpha)$  et  $(C\gamma)$  et aux sécantes  $(B\gamma)$  et  $(B\alpha)$  :  $\frac{\gamma A}{\gamma B} = \frac{\alpha C}{BC}$ . En multipliant ces égalités membre à membre, on obtient  $\frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B} = \frac{BC}{\alpha B} \cdot \frac{\alpha C}{BC} = \frac{\alpha C}{\alpha B}$  qui donne l'égalité cherchée :

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B} = 1.$$

• **On suppose qu'on a  $\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B} = 1$ .**

Montrons que, si deux cevienes parmi  $(A\alpha)$ ,  $(B\beta)$  et  $(C\gamma)$  sont parallèles, alors toutes les trois le sont. On suppose  $(A\alpha)$  et  $(B\beta)$  parallèles. Par le théorème de Thalès on a  $\frac{\beta C}{\beta A} = \frac{BC}{\alpha B}$ . D'où  $\frac{\alpha B \cdot \beta C}{\beta A} = BC$ . Par suite :

$$1 = \frac{\alpha B \cdot \beta C}{\beta A} \cdot \frac{\gamma A}{\alpha C \cdot \gamma B} = BC \cdot \frac{\gamma A}{\alpha C \cdot \gamma B}$$

qui donne finalement l'égalité  $\frac{BC}{\alpha C} = \frac{\gamma B}{\gamma A}$ . Celle-ci montre que les droites  $(A\alpha)$  et  $(C\gamma)$  sont parallèles en vertu de la réciproque du théorème de Thalès.

- On suppose que les droites  $(A\alpha)$ ,  $(B\beta)$  et  $(C\gamma)$  sont concourantes en un point  $J$

Nous laisserons alors le lecteur adapter la démonstration du cas 1 pour établir la relation  $\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B} = 1$ .

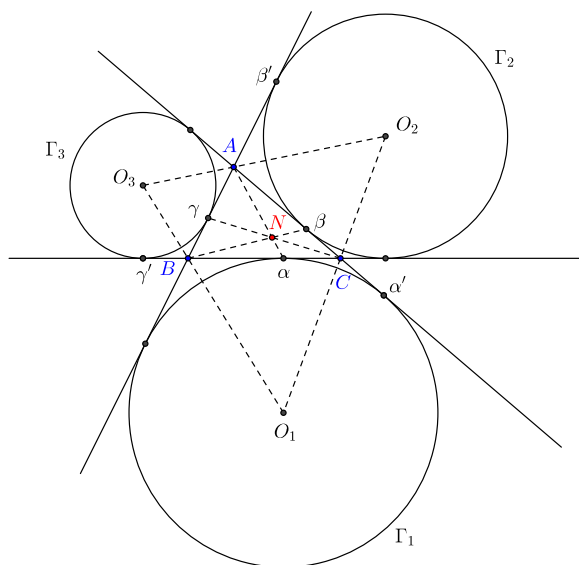
- On suppose qu'on a  $\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B} = 1$ .

Nous laisserons aussi le lecteur adapter la réciproque de la démonstration du cas 1 pour montrer que si deux des cevianes  $(A\alpha)$ ,  $(B\beta)$  et  $(C\gamma)$  se coupent en un point  $J$  alors la troisième passe aussi par le point  $J$ .  $\diamond$

## 2. Ceva, Nagel, Gergonne

Les situations géométriques où le théorème de Ceva intervient de façon substantielle sont très nombreuses. Nous en donnons quelques applications notamment pour établir deux résultats. L'un est dû à Nagel [4] et un autre dans lequel il y est pour quelque chose.

**2.1. Théorème de Nagel.** Soit  $ABC$  un triangle non dégénéré. On note  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$  les cercles tangents aux droites  $(AB)$ ,  $(BC)$  et  $(CA)$  et extérieurs au triangle  $ABC$ . Le cercle  $\Gamma_1$  a  $\alpha$  comme point de contact avec le segment  $[BC]$ ,  $\Gamma_2$  a  $\beta$  comme point de contact avec le segment  $[CA]$  et  $\Gamma_3$  a  $\gamma$  comme point de contact avec le segment  $[AB]$ . Alors les trois segments  $[A\alpha]$ ,  $[B\beta]$  et  $[C\gamma]$  concourent en un point  $N$  qu'on appelle **point de Nagel** du triangle  $ABC$ .



*Preuve.* D'après le théorème de Ceva, il suffit de montrer que  $\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B} = 1$ .

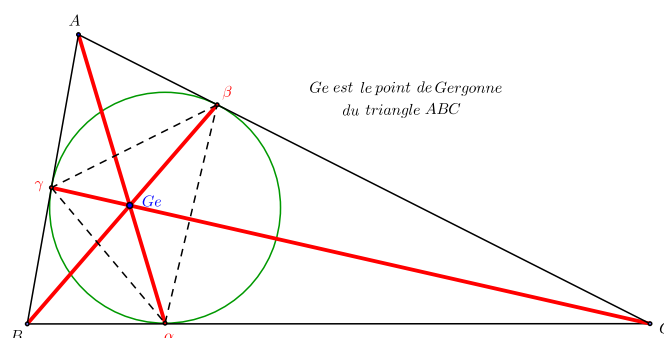
- Les droites  $(AB)$  et  $(BC)$  étant les tangentes intérieures communes aux cercles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_3$ , leur point d'intersection  $B$  est le centre de l'homothétie négative qui envoie le cercle  $\Gamma_3$  sur le cercle  $\Gamma_1$  ; la valeur absolue de son rapport est  $\frac{R_1}{R_3}$  et envoie  $\gamma'$  sur  $\alpha$ . On a donc  $\frac{B\alpha}{B\gamma'} = \frac{R_1}{R_3}$ . Mais comme  $B\gamma' = B\gamma$ , on a  $\frac{B\alpha}{B\gamma} = \frac{R_1}{R_3}$ .

[4] Christian Heinrich von NAGEL : mathématicien allemand (1803-1882). Ses travaux portent essentiellement sur la géométrie du triangle.

- De façon similaire, on établit  $\frac{C\beta}{C\alpha} = \frac{R_2}{R_1}$  et  $\frac{A\gamma}{A\beta} = \frac{R_3}{R_2}$ . Ce qui donne finalement :

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B} = \frac{A\gamma}{A\beta} \cdot \frac{C\beta}{C\alpha} \cdot \frac{B\alpha}{B\gamma} = \frac{R_3}{R_2} \cdot \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{R_1}{R_3} = 1.$$

**2.2. Théorème de Ceva-Gergonne-Nagel.** Soit  $ABC$  un triangle non dégénéré. On note  $\Gamma$  le cercle inscrit dans ce triangle,  $\alpha$  le point de contact de  $\Gamma$  avec le côté  $BC$ ,  $\beta$  celui avec le côté  $CA$  et  $\gamma$  celui avec le côté  $AB$ . Alors les trois segments  $[A\alpha]$ ,  $[B\beta]$  et  $[C\gamma]$  de Ceva concourent en un point  $Ge$  appelé **point de Gergonne** du triangle  $ABC$ .



*Preuve.* C'est une conséquence immédiate du théorème de Ceva. Il suffit, là encore, de montrer que le produit des trois rapports  $\frac{\alpha B}{\alpha C}$ ,  $\frac{\beta C}{\beta A}$  et  $\frac{\gamma A}{\gamma B}$  vaut 1. À cet effet, remarquons d'abord que, comme les droites  $(AB)$  et  $(AC)$  sont les tangentes issues de  $A$  au cercle  $\Gamma$ , on a  $A\beta = A\gamma$ . Pour les mêmes raisons,  $B\gamma = B\alpha$  et  $C\alpha = C\beta$ . D'où :

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B} = \frac{\alpha B}{\beta C} \cdot \frac{\beta C}{\gamma A} \cdot \frac{\gamma A}{\alpha B} = 1.$$

Ce qui termine la démonstration du théorème.  $\diamond$

J. D. Gergonne[5] a publié ce résultat en 1818. Mais, paraît-il, le point  $Ge$  était déjà mentionné par Ceva en 1678. On trouve aussi une preuve du même théorème dans un des articles de Nagel en 1837. Qui a fait quoi ? Moi, je n'en sais rien. Alors attribuons la paternité aux trois, c'est plus simple.

### 3. Friandises topologiques

Beaucoup de branches des mathématiques se donnent comme but la classification des objets dont elles font usage. Mais les mathématiciens savent pertinemment qu'on ne peut classifier qu'à équivalence près. Définir une notion d'équivalence s'avère ainsi indispensable à chaque fois qu'on s'adonne à une telle tâche : isomorphisme entre groupes, anneaux, corps, espaces vectoriels, homéomorphisme, difféomorphisme en topologie différentielle, biholomorphisme en géométrie complexe, isométrie, similitude en géométrie euclidienne et, de façon générale, isomorphisme entre ensembles munis d'un même type de structure.

Dans le même ordre d'idées, et en restant dans le plan (c'est déjà assez si on sait ce qui s'y passe), voici des questions naturelles :

---

[5] Joseph Diez GERGONNE : mathématicien français (1771-1859). Il a été le fondateur du journal *Annales de mathématiques pures et appliquées*.

On se donne deux figures géométriques planes. Dans quel sens peut-on dire qu'elles sont équivalentes ? Une fois une équivalence définie, comment l'exhiber de façon explicite ?

On sait par exemple que deux triangles  $ABC$  et  $A'B'C'$  (supposés non dégénérés pour ne pas à avoir à gérer des situations particulières) sont *affinement équivalents* : il existe un *automorphisme affine*  $f$  (une bijection qui préserve l'alignement et l'ordre) du plan tel que  $f(A) = A'$ ,  $f(B) = B'$  et  $f(C) = C'$ . Mais il n'est pas toujours possible de demander une équivalence plus fine, par exemple à ce qu'ils soient *semblables* et encore moins *isométriques*. Autre question :

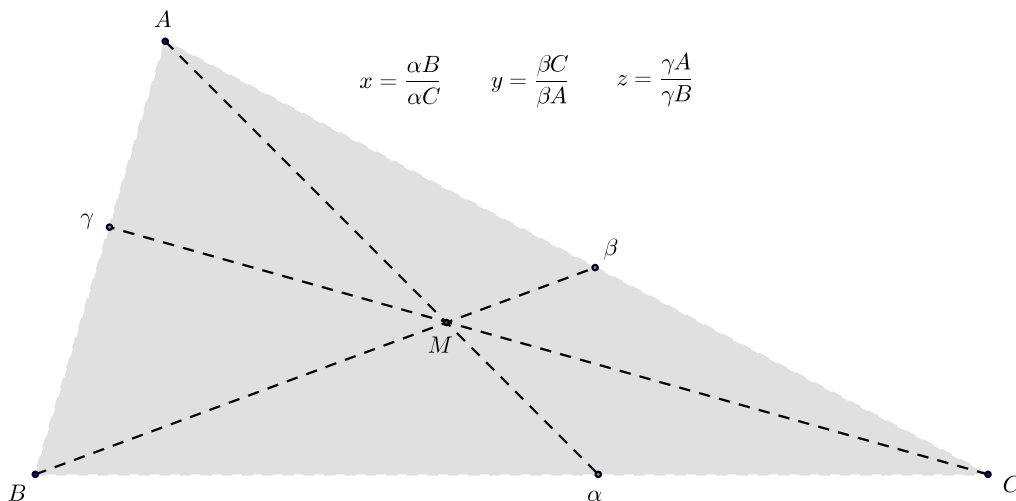
(\*) *Qu'en est-il de l'intérieur  $\Delta$  d'un triangle et celui  $\mathcal{Q}$  d'un parallélogramme ?*

Dans un premier temps, il serait raisonnable de chercher une équivalence faible et plus facile à obtenir, par exemple un *homéomorphisme* : une bijection continue  $f : \Delta \rightarrow \mathcal{Q}$  d'inverse  $f^{-1}$  continue. (On pourrait ensuite tenter de lisser  $f$  en un difféomorphisme, ou même lui donner une expression « familière » !) Les topologues diront peut-être « à quoi ça sert puisque on sait qu'un disque ouvert, l'intérieur d'un polygone... et, de façon générale, tout ouvert *simplement connexe* du plan, sont homéomorphes entre eux ». Mais justement, on ne sait pas toujours, enfin tout le monde ne le sait pas ! Et même quand on sait, comment exhiber simplement et explicitement un homéomorphisme ? Et de préférence géométriquement. Le problème, quand on veut être élémentaire et clair auprès du public non spécialiste, est celui-là. C'est ce que nous nous proposons de regarder dans ce qui suit et, entre autres, en répondant (élémentairement) à la question (\*).

### 3.1. De nouvelles coordonnées sur $\Delta$

On se donne un triangle  $ABC$  non dégénéré (on dit aussi non plat). Ses trois sommets  $A$ ,  $B$  et  $C$  déterminent un repère affine  $(A, B, C)$  du plan : un point  $M$  est donné par ses coordonnées affines  $(x, y, z)$  définies par les conditions  $\overrightarrow{AM} = y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC}$  et  $x = 1 - y - z$ . On écrit alors  $M = xA + yB + zC$ . En particulier, si les trois nombres  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont dans l'intervalle  $[0, 1]$ , le point  $M$  est sur le triangle  $ABC$  ou à l'intérieur. Le choix de  $x$ ,  $y$  et  $z$  dans l'intervalle ouvert  $]0, 1[$  code les points qui sont strictement à l'intérieur du triangle  $ABC$  et non sur son bord  $\partial(ABC)$ .

Le théorème de Ceva nous permet d'introduire un autre type de coordonnées pour repérer les points à l'intérieur  $\Delta$  du triangle  $ABC$ .



Soit  $M \in \Delta$ . On note  $\alpha$  l'intersection de la droite  $(AM)$  avec le côté  $BC$ ,  $\beta$  celle de  $(BM)$  avec  $CA$  et  $\gamma$  celle de  $(CM)$  avec  $AB$ . On pose :

$$x = \frac{\alpha B}{\alpha C} \quad y = \frac{\beta C}{\beta A} \quad z = \frac{\gamma A}{\gamma C}.$$

Les trois nombres  $x, y$  et  $z$  ainsi définis sont strictement positifs et vérifient  $xyz = 1$ . Réciproquement, tout triplet  $(x, y, z)$  de nombres strictement positifs vérifiant la relation  $xyz = 1$  définit un unique point  $M$  sur  $\Delta$ . En effet, il suffit de construire le point  $\alpha$  du segment  $[BC]$  le divisant dans le rapport  $x$  (*i.e.*  $x = \frac{\alpha B}{\alpha C}$ ), le point  $\beta$  de  $[CA]$  le divisant dans le rapport  $y$  (*i.e.*  $y = \frac{\beta C}{\beta A}$ ) ; le point  $M$  cherché est alors l'intersection des deux droites  $(A\alpha)$  et  $(B\beta)$ . D'après le théorème Ceva, la droite  $(CM)$  coupe le segment  $[AB]$  en un point  $\gamma$  le divisant dans le rapport  $z$  (*i.e.*  $z = \frac{\gamma A}{\gamma C}$ ).

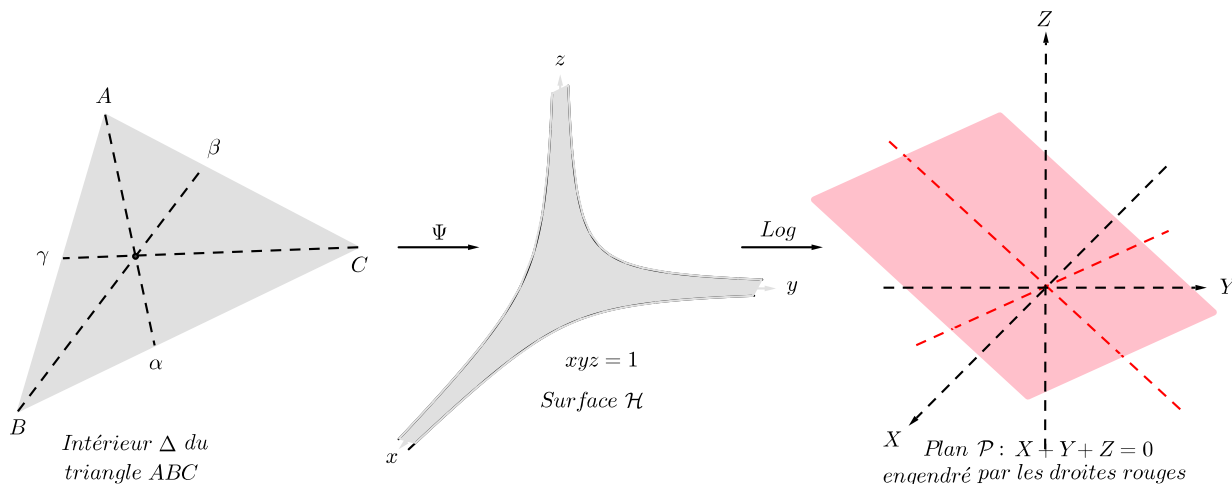
On pourrait nommer  $(x, y, z)$  *coordonnées de Ceva* du point  $M \in \Delta$  ou même *coordonnées hyperboliques* en raison du fait que les traces des plans orthogonaux aux axes de coordonnées de  $\mathbb{R}^3$  sur la surface  $\mathcal{H}$  sont des hyperboles.

On a alors une injection  $\Psi : M \in \Delta \mapsto (x, y, z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$  d'image la surface  $\mathcal{H}$  d'équation  $xyz = 1$  ; donc  $\Psi : \Delta \rightarrow \mathcal{H}$  est une bijection. C'est en fait un homéomorphisme analytique. En composant avec le logarithme :

$$(X, Y, Z) = (\text{Log}(x), \text{Log}(y), \text{Log}(z)),$$

on obtient un homéomorphisme analytique de  $\Delta$  sur le plan  $\mathcal{P}$  de  $\mathbb{R}^3$  d'équation cartésienne  $X + Y + Z = 0$ . Les trois surfaces  $\Delta, \mathcal{H}$  et  $\mathcal{P}$  sont donc analytiquement les mêmes.

La tâche n'est pas difficile mais ce n'est certainement pas si immédiat d'exhiber autrement de façon explicite de telles équivalences autant que par Ceva !



**Note.** C'est bien entendu le théorème de Ceva qui m'a amené à remarquer ces coordonnées (dites de Ceva ou hyperboliques) très naturelles. Je ne sais pas si elles ont été déjà utilisées auparavant. Si c'est le cas, je serai ravi qu'on me l'apprenne !

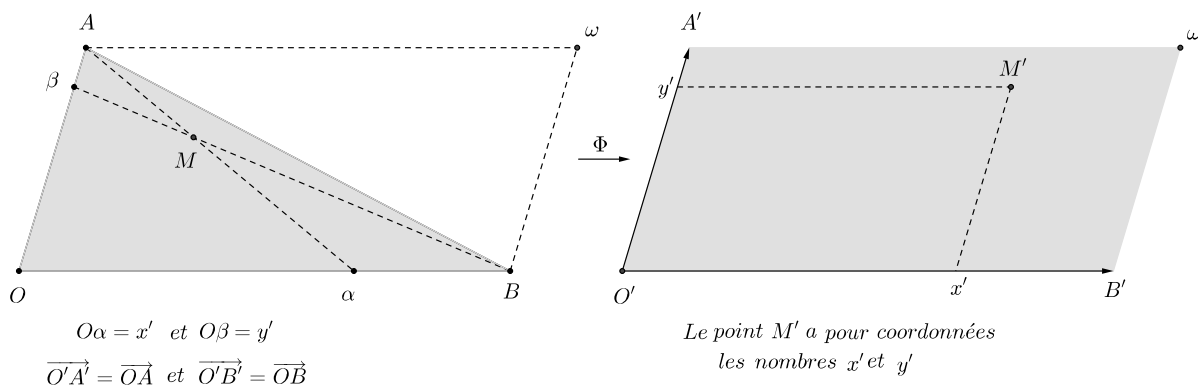
### 3.2. Un triangle est un parallélogramme : réponse à la question (\*)

Remarquons d'abord que tous les parallélogrammes (non dégénérés) sont équivalents au sens affine. En effet soient  $XYZT$  et  $X'Y'Z'T'$  deux telles figures. On a deux repères cartésiens  $(X, \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XT})$  et  $(X', \overrightarrow{X'Y'}, \overrightarrow{X'T'})$ . À l'aide de la translation de vecteur  $\overrightarrow{XX'}$  on



amène  $X$  sur  $X'$  ; ensuite on applique l'unique bijection linéaire qui envoie le vecteur  $\overrightarrow{XY}$  sur le vecteur  $\overrightarrow{X'Y'}$  et  $\overrightarrow{XT}$  sur  $\overrightarrow{X'T'}$ . La composée de ces deux transformations est une bijection affine  $f$  du plan qui envoie le parallélogramme  $XYZT$  sur le parallélogramme  $X'Y'Z'T'$ . Tout point  $M$  de l'intérieur  $\mathcal{Q}$  de  $XYZT$  s'écrit sous la forme  $M = X + \lambda\overrightarrow{XY} + \mu\overrightarrow{XT}$  avec  $\lambda, \mu \in ]0, 1[$  et  $f$  l'envoie sur  $M' = X' + \lambda\overrightarrow{X'Y'} + \mu\overrightarrow{X'T'}$  c'est-à-dire un point de l'intérieur  $\mathcal{Q}'$  de  $X'Y'Z'T'$ .

On se donne un triangle  $OAB$  d'intérieur  $\Delta$ . D'après ce qu'on vient de faire remarquer, il suffit d'envoyer  $\Delta$  sur l'intérieur de n'importe quel parallélogramme du plan, par exemple celui déterminé par les vecteurs  $\overrightarrow{OA}$  et  $\overrightarrow{OB}$  de quatrième sommet  $\omega$  (cf. figure ci-dessous).



$\Phi$  est un homéomorphisme de l'intérieur du triangle  
 $OAB$  sur celui du parallélogramme  $O'A'\omega'B'$

Soit  $M \in \Delta$  ; les droites  $(AM)$  et  $(BM)$  coupent les côtés  $OB$  et  $OA$  respectivement en  $\alpha$  et  $\beta$ . Les droites passant par  $\alpha$  et  $\beta$  et parallèles respectivement à  $(OA)$  et  $(OB)$  se coupent en un point  $M'$ . On pose alors  $\Phi(M) = M'$ . L'application  $\Phi$  ainsi définie envoie bijectivement  $\Delta$  sur  $\mathcal{Q}$  (intérieur du parallélogramme  $OAwB$ ). On peut montrer facilement que  $\Phi$  est en fait un homéomorphisme.

Conclusion 1. Nous avons construit, par un procédé géométrique, un homéomorphisme  $\Phi$  de l'intérieur  $\Delta$  d'un triangle sur l'intérieur  $\mathcal{Q}$  d'un parallélogramme.

On peut même dire un peu plus sur cet homéomorphisme. On munit le plan du repère  $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$  dans lequel on notera  $(x, y)$  les coordonnées de  $M$  et  $(x', y')$  celles de  $M'$ . Un calcul élémentaire donne :

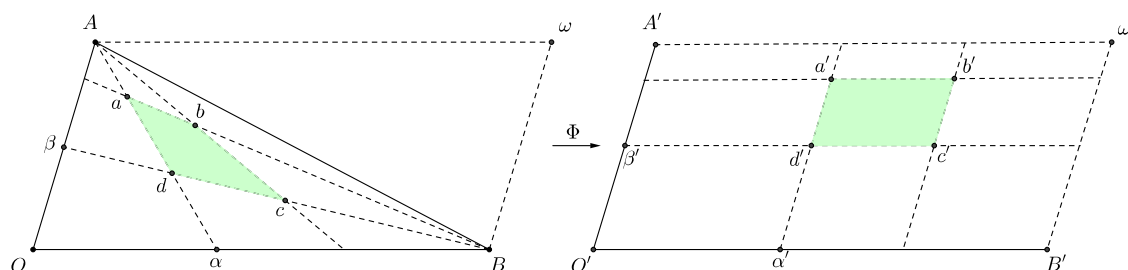
$$\begin{cases} x' = \frac{x}{1-y} \\ y' = \frac{y}{1-x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = \frac{x'(1-y')}{1-x'y'} \\ y = \frac{y'(1-x')}{1-x'y'} \end{cases}$$

Conclusion 2. L'homéomorphisme  $\Phi : \Delta \rightarrow \mathcal{Q}$  est en fait un isomorphisme rationnel (il est quadratique), donc a fortiori un homéomorphisme analytique.

On peut remarquer que cet isomorphisme se prolonge aux segments semi-ouverts  $[OA[$  et  $[OB[$  qui en constituent en fait son ensemble de points fixes. En effet, si  $M$  est sur  $[OA[$ , la droite  $(AM)$  se confond avec  $(OA)$  et donc son intersection avec la droite  $(BM)$  reste le point  $M$ . Le même raisonnement montre que  $M$  se confond avec son transformé  $M'$  s'il est sur  $[OB[$ .

### 3.3. Et pour faire un peu savant voici deux feuilletages

Dans  $\Delta$  (intérieur du triangle  $OBC$ ) les segments ouverts  $]A\alpha[$  sont tous disjoints et le remplissent ; ils forment donc un *feuilletage*  $\mathcal{F}$ . De même, les segments ouverts  $]B\beta[$  sont tous disjoints et le remplissent ; ils forment aussi un *feuilletage*  $\mathcal{V}$  transverse à  $\mathcal{F}$ . Un segment  $]A\alpha[$ , feuille de  $\mathcal{F}$  s'envoie par  $\Phi$  sur le segment vertical ouvert passant par  $\alpha'$  (image de  $\alpha$ ) et un segment  $]B\beta[$ , feuille de  $\mathcal{V}$  s'envoie par  $\Phi$  sur le segment horizontal ouvert passant par  $\beta'$  (image de  $\beta$ ). Ces segments verticaux et horizontaux définissent respectivement deux feuilletages  $\mathcal{F}'$  et  $\mathcal{V}'$  sur  $\mathcal{Q}$ .



Les feuilles de  $\mathcal{F}$  sont les segments issues de  $A$   
et celles de  $\mathcal{V}$  sont les segments issues de  $B$ .

Les feuilles de  $\mathcal{F}'$  sont les segments verticaux  
et celles de  $\mathcal{V}'$  les segments horizontaux.

L'homéomorphisme  $\Phi$  envoie les feuilletages  
 $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{V}$  respectivement sur  $\mathcal{F}'$  et  $\mathcal{V}'$ . Il envoie la  
cellule  $abcd$  sur la cellule  $a'b'c'd'$ .

La cellule  $abcd$  (voir dessin ci-dessus) s'envoie par  $\Phi$  sur la cellule  $a'b'c'd'$ . Quand  $abcd$  grandit de plus en plus à l'intérieur de  $\Delta$  et tend à épouser celui-ci,  $a'b'c'd'$  grandit à l'intérieur de  $\mathcal{Q}$  et le remplit complètement à la limite. C'est ce qui fait que l'intérieur  $\Delta$  de notre triangle  $OAB$  bordé par trois côtés se transforme en l'intérieur  $\mathcal{Q}$  du parallélogramme  $O'A'\omega B'$  bordé par quatre côtés ! C'est une opération rationnelle et qui ne peut jamais être affine.

On peut voir  $\Delta$  (resp.  $\mathcal{Q}$ ) comme un morceau de tissu dont les fibres qui le composent sont les feuilles de  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{V}$  (resp. les feuilles de  $\mathcal{F}'$  et  $\mathcal{V}'$ ) !

**A. El Kacimi**  
LMI, FR du CNRS 2956  
ISTV2, Le Mont Houy  
Université Polytechnique Hauts-de-France  
59313 Valenciennes Cedex 9 – France  
aziz.elkacimi@uphf.fr