

# Quelques aspects géométriques des polygones

par

Aziz EL KACIMI ALAOUI & Abdellatif ZEGGAR

(Août 2017)

Nous décrivons toutes les familles de polygones à périmètre et aire prescrits ; elles sont les feuilles d'un feuilletage  $\mathcal{F}^{(*)}$  sur l'espace des polygones. Nous étudions quelques propriétés géométriques des polygones (par exemple leur inscriptibilité dans un cercle et leur régularité) en relation avec le périmètre et l'aire.

On note  $\mathbb{E}$  le plan vectoriel euclidien muni de sa structure affine canonique et d'une orientation donnée par une base (qu'on supposera orthonormée). L'origine sera notée  $O$  et, pour  $A, B \in \mathbb{E}$ , on note  $\overrightarrow{AB}$  le vecteur  $B - A$ . Par convention, à partir du paragraphe 1, le mot "isométrie" signifiera transformation affine de  $\mathbb{E}$  qui préserve la distance et l'orientation.

## 0. Introduction

Une *figure* du plan  $\mathbb{E}$  est juste une partie de celui-ci. Mais d'habitude cette appellation n'est donnée qu'à une partie ayant une certaine particularité : on la voit tout entière (elle est bornée) ou au moins on comprend comment elle se fabrique pour deviner son comportement quand elle échappe à notre vue, telle une droite... et son contour a un peu de régularité. Un *polygone* en est l'exemple type. C'est une figure bornée, bordée par un nombre fini de segments appelés *côtés* ou *arêtes*. À chaque polygone, on peut associer des *invariants*, parmi lesquels deux nombres réels qui jouent un rôle important : le *périmètre* et l'*aire*.

Les polygones du plan sont nombreux et leurs formes et tailles sont variées. La question de leur équivalence se pose donc de façon naturelle. Mais dans quel sens ?

Du point de vue ensembliste, deux polygones  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont toujours équivalents : il existe une bijection de  $\mathbb{E}$  qui envoie l'un sur l'autre. Mais comme on est dans un plan euclidien, on aimerait que cette bijection préserve au moins l'une des propriétés liées à la structure affine euclidienne. Il y a plusieurs notions d'équivalence ; en voici quelques-unes (celles qui nous intéresseront directement). On dira que  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont :

1. *isométriques* s'il existe une isométrie  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  telle que  $f(\mathcal{P}) = \mathcal{P}'$ . On peut les superposer ; et on peut encore faire ça sans sortir du plan si  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont *directement isométriques* i.e. si, en plus,  $f$  préserve l'orientation ;
2. *semblables* s'il existe une similitude  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  telle que  $f(\mathcal{P}) = \mathcal{P}'$ . En quelque sorte, l'un des deux est un agrandissement de l'autre (comme pour les photos) ;
3. *équivalents* (tout court) s'ils ont la même aire. Dans ce cas, on peut toujours passer de l'un à l'autre par découpage et recollement géométriques ;
4. *isopérimétriques* s'ils ont le même périmètre. (Leurs clôtures par du fil barbelé ont la même longueur !)

L'équivalence isométrique est la plus forte car elle implique toutes les autres. Elle est donc trop rigide pour être "utile" : deux polygones isométriques ne diffèrent que par les positions qu'ils occupent dans le plan. Ce sont plutôt les équivalences 3 et 4 qui vont nous occuper ici.

Ce papier tire son origine de la question (\*) qui suit : *Existe-t-il deux triangles non isométriques ayant même périmètre et même aire ?* Elle nous a amenés d'abord à la construction d'un feuilletage  $\mathcal{F}^{(*)}$  sur l'espace des triangles : chaque feuille est constituée de triangles ayant même périmètre et même aire. Ensuite, nous avons fait une étude plus générale pour les polygones, sur lesquels d'autres propriétés géométriques liées à l'aire et au périmètre ont été aussi déviées de près. Certaines d'entre elles sont connues certes, mais un peu absentes dans la "littérature géométrique", ce qui nous a motivés à les insérer dans ce texte.

---

(\*) Elle a été posée par Geoffrey Letellier à son enseignant Valerio Vassallo qui l'a posée à son tour au premier auteur. Ce dernier a construit à cet effet le feuilletage  $\mathcal{F}$  sur l'espace des triangles. Mais juste à la question posée, Geoffrey lui-même a répondu en construisant une famille à un paramètre de triangles isocèles ayant le même périmètre et la même aire (son exemple est donné dans la sous-section 5.6).

## 1. L'espace des polygones

Un *polygone* (ou  $n$ -polygone) convexe non dégénéré de  $\mathbb{E}$  est un élément  $(M_1, \dots, M_n)$  de  $\mathbb{E}^n$  tel que, pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ , l'angle orienté  $\widehat{M_k} = (\overrightarrow{M_k M_{k+1}}, \overrightarrow{M_k M_{k-1}})$  a une mesure dans l'intervalle ouvert  $]0, \pi[$ . Par convention, on pose  $M_0 = M_n$  et  $M_{n+1} = M_1$ . L'orientation de l'angle  $\widehat{M_k}$  est la même que celle du cercle trigonométrique centré au point  $M_k$ .

Les points  $M_k$  et les segments  $[M_k, M_{k+1}]$  sont respectivement les *sommets* et les *côtés* du polygone  $(M_1, \dots, M_n)$ . Si  $M_i$  et  $M_j$  sont deux sommets non successifs, c'est-à-dire pour lesquels  $|i - j| > 1$ , on dira que le segment  $[M_i, M_j]$  est une *diagonale* du polygone.

Rappelons qu'un polygone est dit :

- *équilatéral* si tous ses côtés ont la même longueur ;
- *inscriptible* si tous ses sommets sont sur un même cercle ;
- *régulier* s'il est à la fois inscriptible et équilatéral.

L'ensemble des  $n$ -polygones du plan  $\mathbb{E}$  sera noté  $\widetilde{\mathcal{P}}_n$ . Les éléments *centrés* de  $\widetilde{\mathcal{P}}_n$  sont les polygones pour lesquels le centre de gravité est l'origine  $O$  de  $\mathbb{E}$ . Leur ensemble sera noté  $\widetilde{\mathcal{P}}_{n,c}$ .

Notons que, pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ , la forme quadratique  $D_k : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}$  définie au point  $P = (M_1, \dots, M_n)$  par  $D_k(P) = \det(\overrightarrow{M_k M_{k+1}}, \overrightarrow{M_k M_{k-1}})$  est continue et on a :

$$(1.1) \quad \widetilde{\mathcal{P}}_n = \{P \in \mathbb{E}^n, \forall k \in \{1, \dots, n\}, D_k(P) > 0\}.$$

On déduit de cette expression que  $\widetilde{\mathcal{P}}_n$  est un ouvert de  $\mathbb{E}^n$ .

Notons aussi que l'ensemble  $\mathbb{E}_c^n = \left\{ (M_1, \dots, M_n) \in \mathbb{E}^n : \sum_{k=1}^n M_k = O \right\}$  est le noyau de la surjection linéaire

$\mathcal{S} : (M_1, \dots, M_n) \in \mathbb{E}^n \mapsto \sum_{k=1}^n M_k \in \mathbb{E}$ . Ceci montre que  $\mathbb{E}_c^n$  est un sous-espace vectoriel de dimension  $2n - 2$

de  $\mathbb{E}^n$  et que le sous-ensemble  $\widetilde{\mathcal{P}}_{n,c} = \widetilde{\mathcal{P}}_n \cap \mathbb{E}_c^n$  est un ouvert de  $\mathbb{E}_c^n$ .

Soit  $f$  une isométrie de  $\mathbb{E}$ . L'image  $(M'_1, \dots, M'_n) = (f(M_1), \dots, f(M_n))$  de tout polygone  $(M_1, \dots, M_n)$  est un polygone de  $\mathbb{E}$  tel que :

$$(1.2) \quad \widehat{M'_k} = \widehat{M_k} \text{ et } \|\overrightarrow{M'_k M'_\ell}\| = \|\overrightarrow{M_k M_\ell}\| \text{ pour } (k, \ell) \in \{1, \dots, n\}^2.$$

Si en plus  $f$  est linéaire, c'est-à-dire  $f(O) = O$  et si  $(M_1, \dots, M_n)$  est centré, alors  $(M'_1, \dots, M'_n)$  est aussi centré. Nous avons donc deux actions naturelles :

$$\text{Isom}^+(\mathbb{E}) \times \widetilde{\mathcal{P}}_n \longrightarrow \widetilde{\mathcal{P}}_n, (f, (M_1, \dots, M_n)) \longmapsto (f(M_1), \dots, f(M_n))$$

et :

$$\text{SO}(\mathbb{E}) \times \widetilde{\mathcal{P}}_{n,c} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{P}}_{n,c}, (f, (M_1, \dots, M_n)) \longmapsto (f(M_1), \dots, f(M_n))$$

où  $\text{Isom}^+(\mathbb{E})$  et  $\text{SO}(\mathbb{E})$  sont respectivement le groupe des isométries affines et le groupe des isométries linéaires de  $\mathbb{E}$ . Les espaces quotients donnés par ces actions seront notés respectivement :

$$(1.3) \quad \mathcal{P}_n = \widetilde{\mathcal{P}}_n / \text{Isom}^+(\mathbb{E}) \text{ et } \mathcal{P}_{n,c} = \widetilde{\mathcal{P}}_{n,c} / \text{SO}(\mathbb{E}).$$

**1.1. Définition.** Les éléments de  $\mathcal{P}_n$  (resp.  $\mathcal{P}_{n,c}$ ) sont appelés **polygones géométriques** (resp. **polygones géométriques centrés**) de  $\mathbb{E}$ .

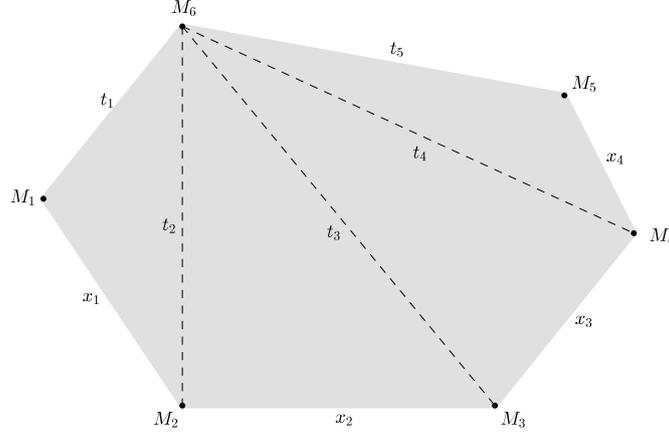
Un polygone géométrique de  $\mathbb{E}$  est dit *équilatéral* (resp. *inscriptible*) s'il admet un représentant équilatéral (resp. inscriptible).

Pour un élément  $(M_1, \dots, M_n)$  de  $\widetilde{\mathcal{P}}_n$  (resp.  $(M_1, \dots, M_n)_c$  de  $\widetilde{\mathcal{P}}_{n,c}$ ), nous utiliserons les notations suivantes :

$$(1.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle M_1, \dots, M_n \rangle \text{ (resp. } \langle M_1, \dots, M_n \rangle_c) \text{ est la classe d'équivalence de} \\ (M_1, \dots, M_n) \text{ dans } \widetilde{\mathcal{P}}_n \text{ (resp. } (M_1, \dots, M_n)_c \text{ dans } \widetilde{\mathcal{P}}_{n,c}). \\ x_k = M_k M_{k+1} = \|\overrightarrow{M_k M_{k+1}}\| \text{ pour } k \in \{1, \dots, n-2\}. \\ t_k = M_n M_k = \|\overrightarrow{M_n M_k}\| \text{ pour } k \in \{1, \dots, n-1\}. \end{array} \right.$$

Les nombres positifs  $t_1, x_1, \dots, x_{n-2}, t_{n-1}$  sont les longueurs des côtés et  $t_2, t_3, \dots, t_{n-2}$  sont les longueurs des diagonales issues du sommet  $M_n$  (voir la figure ci-dessous pour un hexagone). Nous avons  $(n-2)$  longueurs du type  $x_k$  et  $(n-1)$  longueurs du type  $t_k$ .

Comme une isométrie préserve la distance dans le plan euclidien  $\mathbb{E}$ ,  $(t_1, x_1, t_2, x_2, \dots, t_{n-2}, x_{n-2}, t_{n-1})$  ne dépend pas du choix du représentant  $(M_1, \dots, M_n)$  du polygone géométrique  $\langle M_1, \dots, M_n \rangle$ .



Pour tout triangle  $(M_k, M_n, M_{k+1})$  avec  $1 \leq k \leq n-2$ , les longueurs des côtés  $t_k, x_k, t_{k+1}$  vérifient les inégalités :

$$(1.5) \quad \begin{cases} 0 < t_k < x_k + t_{k+1} \\ 0 < x_k < t_k + t_{k+1} \\ 0 < t_{k+1} < x_k + t_k \end{cases}$$

i.e.  $(t_k, x_k, t_{k+1})$  est un élément de l'ouvert  $\mathcal{V}_3$  de  $\mathbb{R}^3$  consistant en les triplets  $(x, y, z)$  satisfaisant aux conditions :

$$\begin{cases} 0 < x < y + z \\ 0 < y < x + z \quad \text{ou encore } |x - y| < z < x + y. \\ 0 < z < x + y \end{cases}$$

De plus, on peut vérifier par récurrence que la longueur de chacun des côtés d'un polygone est strictement plus petite que la somme des longueurs des autres côtés.

Nous avons par exemple le beau résultat qui suit.

**1.2. Théorème [Pen].** *Pour tout entier naturel  $n \geq 3$  et tout  $n$ -uplet  $u = (u_1, \dots, u_n)$  de nombres réels strictement positifs, il existe un unique polygone géométrique inscriptible  $\langle M_1, \dots, M_n \rangle$  tel que  $M_k M_{k+1} = u_k$  for  $k \in \{1, \dots, n\}$  si, et seulement si, pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ , on a l'inégalité :  $u_j < \sum_{k \neq j} u_k$ .*

Considérons maintenant l'ouvert  $\mathcal{V}_n$  de  $\mathbb{R}^n$  et l'ouvert  $\Omega_n$  de  $\mathbb{R}^{2n-3}$  donnés comme suit :

$$(1.6) \quad \mathcal{V}_n = \left\{ (u_1, \dots, u_n) \in ]0, +\infty[^n : \forall j \in \{1, \dots, n\}, u_j < \sum_{k \neq j} u_k \right\}$$

$$\Omega_n = \{ (t_1, x_1, \dots, t_{n-2}, x_{n-2}, t_{n-1}) \in \mathbb{R}^{2n-3} : \text{pour tout } k \in \{1, \dots, n-2\}, (t_k, x_k, t_{k+1}) \in \mathcal{V}_3 \}$$

et considérons également les applications  $\mathcal{L}_n : \mathcal{P}_n \rightarrow \Omega_n$  et  $\mathcal{L}_{n,c} : \mathcal{P}_{n,c} \rightarrow \Omega_n$  définies par :

$$\mathcal{L}_n(\langle M_1, \dots, M_n \rangle) = (t_1, x_1, t_2, x_2, \dots, t_{n-2}, x_{n-2}, t_{n-1})$$

$$\mathcal{L}_{n,c}(\langle M_1, \dots, M_n \rangle_c) = (t_1, x_1, t_2, x_2, \dots, t_{n-2}, x_{n-2}, t_{n-1}).$$

### 1.3. Remarques

(i) On a  $\Omega_3 = \mathcal{V}_3$ .

(ii) Pour tout entier  $n \geq 3$ , les ouverts  $\mathcal{V}_n$  et  $\Omega_n$  sont des cônes convexes respectivement dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^{2n-3}$ .

**1.4. Proposition.** *On a les assertions qui suivent.*

(i) Les quotients  $\mathcal{P}_n = \tilde{\mathcal{P}}_n / \text{Isom}^+(\mathbb{E})$  et  $\mathcal{P}_{n,c} = \tilde{\mathcal{P}}_{n,c} / \text{SO}(\mathbb{E})$  sont des variétés différentiables difféomorphes de dimension  $2n - 3$ . De plus, la projection canonique  $\tilde{\mathcal{P}}_{n,c} \rightarrow \mathcal{P}_{n,c}$  est un  $\text{SO}(\mathbb{E})$ -fibré principal.

(ii) L'application  $\mathcal{L}_n$  (resp.  $\mathcal{L}_{n,c}$ ) est un difféomorphisme identifiant les éléments de  $\mathcal{P}_n$  (resp.  $\mathcal{P}_{n,c}$ ) à ceux de  $\Omega_n$ .

**Preuve**

(i) L'action du groupe de Lie compact connexe  $\text{SO}(\mathbb{E})$  sur l'ouvert  $\tilde{\mathcal{P}}_{n,c}$  de  $\mathbb{E}_c^n$  est différentiable et libre. Le quotient  $\mathcal{P}_{n,c} = \tilde{\mathcal{P}}_{n,c} / \text{SO}(\mathbb{E})$  est donc une variété différentiable de dimension  $\dim \tilde{\mathcal{P}}_{n,c} - \dim \text{SO}(\mathbb{E}) = 2n - 3$  pour laquelle la projection canonique  $\tilde{\mathcal{P}}_{n,c} \rightarrow \mathcal{P}_{n,c}$  est une  $\text{SO}(\mathbb{E})$ -fibration principale.

D'autre part, à tout polygone  $P = (M_1, \dots, M_n)$  avec  $G = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M_k$ , comme centre de gravité, on peut associer le polygone centré  $P' = (M'_1, \dots, M'_n)$  dont les sommets sont  $M'_k = M_k - G$ . Ce polygone  $P'$  est l'image de  $P$  par la translation de vecteur  $\overrightarrow{GO}$ ; donc les deux polygones représentent le même polygone géométrique  $\langle P \rangle$  in  $\mathcal{P}_n$ . De plus, pour toute isométrie  $f$  de  $\mathbb{E}$ , on a  $(f(P))' = \overrightarrow{f}(P')$ . Ceci implique que si  $P$  et  $Q$  sont deux polygones tels que  $\langle P \rangle = \langle Q \rangle$  dans  $\mathcal{P}_n$ , alors  $\langle P' \rangle = \langle Q' \rangle$  dans  $\mathcal{P}_{n,c}$ . On obtient donc une bijection naturelle  $\langle P \rangle \in \mathcal{P}_n \xrightarrow{\cong} \langle P' \rangle \in \mathcal{P}_{n,c}$  qui permet de transférer la structure de variété différentiable de  $\mathcal{P}_{n,c}$  vers  $\mathcal{P}_n$ .

(ii) L'application  $\mathcal{L}_n$  est la composée de  $\mathcal{L}_{n,c}$  par la bijection naturelle  $\mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_{n,c}$ . Par suite, il est suffisant de montrer que  $\mathcal{L}_{n,c} : \mathcal{P}_{n,c} \rightarrow \Omega_n$  est une bijection.

(★) **Injectivité de  $\mathcal{L}_{n,c}$**

Si  $P = (P_1, \dots, P_n)$  et  $Q = (Q_1, \dots, Q_n)$  sont deux polygones tels que :

$$\mathcal{L}_{n,c}(\langle P \rangle) = \mathcal{L}_{n,c}(\langle Q \rangle),$$

alors, pour tout  $k \in \{1, \dots, n-2\}$ , on a :

$$P_n P_k = Q_n Q_k, P_n P_{k+1} = Q_n Q_{k+1}, P_k P_{k+1} = Q_k Q_{k+1}$$

et il existe une isométrie  $f_k$  qui transforme le triangle direct  $(P_n, P_k, P_{k+1})$  en le triangle direct  $(Q_n, Q_k, Q_{k+1})$ . Mais, pour tout  $k \in \{1, \dots, n-2\}$ , les deux isométries  $f_k$  et  $f_{k+1}$  coïncident aux points  $P_n$  et  $P_{k+1}$ . Donc  $f_k = f_{k+1}$ . Ce qui donne  $Q = f_1(P)$  et finalement  $\langle P \rangle = \langle Q \rangle$ .

(★) **Surjectivité de  $\mathcal{L}_{n,c}$**

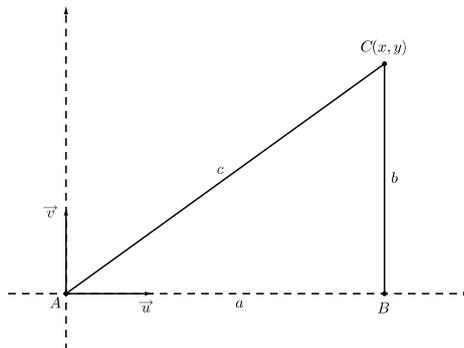
On fera une récurrence sur  $n \geq 3$ .

• **Le cas  $n = 3$**

Soient  $(a, b, c) \in \Omega_3 = \mathcal{V}_3$  et  $A$  et  $B$  deux points tels que  $AB = a$ . Il existe alors un point  $C$  tel que  $BC = b$ ,  $AC = a$  et le triangle  $(A, B, C)$  est direct. Pour le voir il suffit de considérer un repère orthonormé direct  $(A, \vec{u}, \vec{v})$  de  $\mathbb{E}$  avec  $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB}$  et de prendre le point  $C$  de coordonnées  $x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$  et  $y = \sqrt{c^2 - x^2}$ .

Notons que  $c^2 - x^2 > 0$  puisque la condition  $|a - c| < b < a + c$ , disant que  $(a, b, c) \in \Omega_3$ , implique  $b^2 - (a - c)^2 > 0$ ,  $(a + c)^2 - b^2 > 0$  et donc :

$$c^2 - x^2 = (c - x)(c + x) = \frac{b^2 - (a - c)^2}{2a} \cdot \frac{(a + c)^2 - b^2}{2a} > 0.$$



Donc tout élément  $(a, b, c) \in \Omega_3$  admet un antécédent dans  $\mathcal{P}_{3,c}$ .

• **Le cas  $n = 4$**

Si  $(a, b, e, c, d) \in \Omega_4$ , alors  $(a, b, e) \in \Omega_3$  et  $(e, c, d) \in \Omega_3$ . Il existe donc (cas  $n = 3$ ) un triangle direct  $(A, B, C)$  tel que  $AB = a$ ,  $BC = b$  et  $CA = e$ . De plus il existe un point  $D$ , en dehors du demi-plan contenant  $B$  et bordé par la droite  $(AC)$  tel que  $CD = c$  et  $DA = d$ . Le quadrilatère  $(A, B, C, D)$  ainsi obtenu est convexe puisque aucun de ses sous-triangles ne contient de sommet à part les siens (voir [Per] Proposition 1.7, page 150). Ceci donne un antécédent de  $(a, b, e, c, d)$ .

• **Hérédité.** On suppose que l'application  $\mathcal{L}_{n,c}$  est surjective et on montre que  $\mathcal{L}_{n+1,c}$  l'est aussi. Pour tout polygone  $\omega = (t_1, x_1, t_2, \dots, t_{n-2}, x_{n-2}, t_{n-1}, x_{n-1}, t_n) \in \Omega_{n+1}$ , on pose :

$$\omega' = (t_1, x_1, t_2) \in \Omega_3 \quad \text{and} \quad \omega'' = (t_2, x_2, \dots, t_{n-2}, x_{n-2}, t_{n-1}, x_{n-1}, t_n) \in \Omega_n.$$

Il existe alors un polygone convexe centré  $P = (M_2, \dots, M_{n+1})$  tel que  $\mathcal{L}_{n,c}(\langle P \rangle) = \omega''$ . D'autre part, comme dans le cas  $n = 4$ , on peut construire un point  $M_1$  en dehors du demi-plan contenant  $M_3$  et bordé par la droite  $(M_2M_{n+1})$  tel que  $M_{n+1}M_1 = t_1$  et  $M_1M_2 = x_1$ . Le  $(n+1)$ -polygone  $Q = (M_1, \dots, M_{n+1})$  est convexe puisque aucun de ses sous-triangles ne contient de sommet à part les siens [Per]. Ceci donne un antécédent de  $\omega$ . Ce qui montre que  $\mathcal{L}_{n,c}$  est surjective.

Finalement nous avons montré que l'application  $\mathcal{L}_{n,c}$  est une bijection.

*Dans toute la suite nous identifions les polygones géométriques aux points du cône convexe  $\Omega_n$  en utilisant le difféomorphisme  $\mathcal{L}_n$ .*

Cette identification  $\mathcal{P}_n \simeq \Omega_n$  nous permettra d'étudier plus aisément certaines propriétés de l'espace des polygones géométriques.

Soit  $\varphi : X \rightarrow Y$  une application entre deux ensembles non vides  $X$  et  $Y$ . Toute partie non vide de  $X$  de la forme  $\varphi^{-1}(\{y\})$  sera appelée *ensemble de niveau* (courbe de niveau, surface de niveau, variété de niveau...) de  $\varphi$  (au niveau  $y \in Y$ ).

## 2. Les polygones géométriques inscriptibles pour $n \geq 4$

Notons  $\Gamma_n$  l'ensemble des  $n$ -polygones géométriques inscriptibles de  $\mathbb{E}$  que nous regarderons comme une partie de l'ouvert  $\Omega_n$ . (Rappelons que tout polygone géométrique régulier est inscriptible.)

**2.1. Remarque.** Le fait qu'un polygone  $(M_1, \dots, M_n)$  est inscriptible est équivalent au fait que chacun des  $n-3$  quadrilatères  $Q_1 = (M_n, M_1, M_2, M_3), \dots, Q_{n-3} = (M_n, M_{n-3}, M_{n-2}, M_{n-1})$  est inscriptible.

**2.2. Lemme.** *Un quadrilatère  $(A, B, C, D)$  est inscriptible si, et seulement si, les distances  $a = AB$ ,  $b = BC$ ,  $c = CD$ ,  $d = DA$  et  $e = BD$  satisfont à la relation :*

$$(2.1) \quad ad(b^2 + c^2 - e^2) + bc(a^2 + d^2 - e^2) = 0.$$

**Preuve.** Soient  $\alpha$  et  $\beta$  les mesures respectives des angles  $\widehat{A}$  et  $\widehat{C}$ . Alors :  $0 < \alpha < \pi$ ,  $0 < \beta < \pi$  et, par la loi des cosinus d'Al-Kashi, on a :

$$a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha = e^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \beta.$$

On en déduit :

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{a^2 + d^2 - e^2}{2ad} \\ \cos \beta = \frac{b^2 + c^2 - e^2}{2bc} \end{cases}$$

D'autre part, le quadrilatère  $(A, B, C, D)$  est inscriptible si, et seulement si,  $\alpha + \beta = \pi$  ou, de façon équivalente, si  $\cos \beta = -\cos \alpha$ . Donc :

$$(A, B, C, D) \text{ inscriptible} \iff \frac{b^2 + c^2 - e^2}{2bc} = -\frac{a^2 + d^2 - e^2}{2ad}$$

qui est aussi équivalent à  $ad(b^2 + c^2 - e^2) + bc(a^2 + d^2 - e^2) = 0$ .

La remarque 2.1 et le lemme 2.2 permettent de réaliser  $\Gamma_n$  comme ensemble de niveau d'une application différentiable. Plus précisément, considérons les applications  $\Theta : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\gamma_k : \Omega_n \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\gamma : \Omega_n \rightarrow \mathbb{R}^{n-3}$  définies par :

$$\Theta(u) = u_1 u_2 (u_4^2 + u_5^2 - u_3^2) + u_4 u_5 (u_1^2 + u_2^2 - u_3^2)$$

pour  $u = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) \in \mathbb{R}^5$ ,

$$\gamma_k(\omega) = \Theta(t_k, x_k, t_{k+1}, x_{k+1}, t_{k+2}) \text{ pour } k \in \{1, \dots, n-3\}$$

$$\gamma(\omega) = (\gamma_1(\omega), \dots, \gamma_{n-3}(\omega))$$

où  $\omega = (t_1, x_1, t_2, \dots, x_{n-2}, t_{n-1}) \in \Omega_n$ .

**2.3. Proposition.** *L'ensemble  $\Gamma_n$  des polygones géométriques inscriptibles est donné par  $\Gamma_n = \gamma^{-1}(\{0\})$ . De plus,  $\Gamma_n$  est une sous-variété différentiable de dimension  $n$  de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^{2n-3}$ .*

**Preuve.** Soit  $\omega = (t_1, x_1, \dots, t_{n-2}, x_{n-2}, t_{n-1})$  un élément de  $\Omega_n$  représenté par un polygone  $(M_1, \dots, M_n)$ . On a les équivalences :

$$\begin{aligned} \omega \in \Gamma_n &\iff (M_n, M_k, M_{k+1}, M_{k+2}) \text{ est inscriptible pour } 1 \leq k \leq n-3 \\ &\iff \Theta(t_k, x_k, t_{k+1}, x_{k+1}, t_{k+2}) = 0 \text{ pour } 1 \leq k \leq n-3 \\ &\iff \gamma_k(\omega) = 0 \text{ pour } 1 \leq k \leq n-3 \\ &\iff \gamma(\omega) = 0 \\ &\iff \omega \in \gamma^{-1}(\{0\}). \end{aligned}$$

Maintenant nous allons montrer, par récurrence sur  $n \geq 4$ , que l'application  $\gamma$  est une submersion en tout point  $\omega$  of  $\Omega_n$ .

- **Le cas  $n = 4$ .**

On a  $\gamma = \gamma_1$  et l'application :

$$\gamma : \Omega_4 \rightarrow \mathbb{R}, \omega = (t_1, x_1, t_2, x_2, t_3) \mapsto \gamma(\omega) = t_1 x_1 (t_3^2 + x_2^2 - t_2^2) + t_3 x_2 (t_1^2 + x_1^2 - t_2^2)$$

est une submersion en tout point  $\omega \in \Omega_4$ . En effet,  $\frac{\partial \gamma}{\partial t_2}(\omega) = -2t_2(t_1 x_1 + t_3 x_2) \neq 0$ . Donc  $\Gamma_4 = \gamma^{-1}(\{0\})$  est une sous-variété de codimension 1 de l'ouvert  $\Omega_4$  et donc une sous-variété de dimension 4 de  $\mathbb{R}^5$ .

- **Hérédité.**

Supposons que, pour un entier fixé  $n \geq 4$ , l'application  $\gamma$  est une submersion en tout point de  $\Omega_n$ . Si à tout élément  $\omega = (t_1, x_1, \dots, t_{n-2}, x_{n-2}, t_{n-1}, x_{n-1}, t_n) \in \Omega_{n+1}$  on associe :

$$\begin{cases} \omega' = (t_1, x_1, \dots, t_{n-2}, x_{n-2}, t_{n-1}) \in \Omega_n \\ \omega'' = (t_{n-2}, x_{n-2}, t_{n-1}, x_{n-1}, t_n) \in \Omega_4 \end{cases}$$

on peut écrire  $\omega = (\omega', x_{n-1}, t_n)$  et  $\gamma(\omega) = (\gamma(\omega'), \gamma(\omega''))$ . Notons que nous utilisons la notation  $\gamma$  pour trois applications différentes. La matrice jacobienne de l'application  $\gamma : \Omega_{n+1} \subset \mathbb{R}^{2n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-2}$  en tout point  $\omega \in \Omega_{n+1}$  est donné par :

$$(2.2) \quad \begin{pmatrix} A(\omega') & 0 \\ B(\omega'') & C(\omega'') \end{pmatrix}$$

où :

$$A(\omega') = \begin{pmatrix} \frac{\partial \gamma_1}{\partial t_1}(\omega') & \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1}(\omega') & \cdots & \frac{\partial \gamma_1}{\partial t_{n-2}}(\omega') & \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_{n-2}}(\omega') & \frac{\partial \gamma_1}{\partial t_{n-1}}(\omega') \\ \frac{\partial \gamma_2}{\partial t_1}(\omega') & \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_1}(\omega') & \cdots & \frac{\partial \gamma_2}{\partial t_{n-2}}(\omega') & \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_{n-2}}(\omega') & \frac{\partial \gamma_2}{\partial t_{n-1}}(\omega') \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \gamma_{n-3}}{\partial t_1}(\omega') & \frac{\partial \gamma_{n-3}}{\partial x_1}(\omega') & \cdots & \frac{\partial \gamma_{n-3}}{\partial t_{n-2}}(\omega') & \frac{\partial \gamma_{n-3}}{\partial x_{n-2}}(\omega') & \frac{\partial \gamma_{n-3}}{\partial t_{n-1}}(\omega') \end{pmatrix}$$

qui est la matrice jacobienne de l'application  $\gamma : \Omega_n \subset \mathbb{R}^{2n-3} \rightarrow \mathbb{R}^{n-3}$  au point  $\omega'$ ,

$$B(\omega'') = \left( 0, \dots, 0, \frac{\partial \Theta}{\partial u_1}(\omega''), \frac{\partial \Theta}{\partial u_2}(\omega''), \frac{\partial \Theta}{\partial u_3}(\omega'') \right) \text{ et } C(\omega'') = \left( \frac{\partial \Theta}{\partial u_4}(\omega''), \frac{\partial \Theta}{\partial u_5}(\omega'') \right).$$

Par l'hypothèse de récurrence, la matrice  $A(\omega')$  a pour rang  $n - 3$ . D'autre part, les deux dérivées partielles :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Theta}{\partial u_4}(\omega'') = 2x_{n-1}t_{n-2}x_{n-2} + t_n(x_{n-2}^2 + t_{n-2}^2 - t_{n-1}^2) \\ \frac{\partial \Theta}{\partial u_5}(\omega'') = 2t_n t_{n-2}x_{n-2} + x_{n-1}(x_{n-2}^2 + t_{n-2}^2 - t_{n-1}^2) \end{cases}$$

ne s'annulent pas simultanément car si c'était le cas nous aurions :

$$0 = x_{n-1} \frac{\partial \Theta}{\partial u_4}(\omega'') - t_n \frac{\partial \Theta}{\partial u_5}(\omega'') = 2x_{n-1}t_{n-2}(x_{n-1}^2 - t_n^2)$$

qui implique  $x_{n-1} = t_n$ . En tenant compte cette égalité dans la relation  $\frac{\partial \Theta}{\partial u_4}(\omega'') = 0$ , on obtient :

$$0 = t_n [(x_{n-2} + t_{n-2})^2 - t_{n-1}^2]$$

et par suite  $x_{n-2} + t_{n-2} = t_{n-1}$ . Ce qui contredit l'inégalité  $t_{n-1} < x_{n-2} + t_{n-2}$  entre les longueurs des côtés du triangle non dégénéré  $(M_{n+1}, M_{n-2}, M_{n-1})$ .

La matrice jacobienne de  $\gamma : \Omega_{n+1} \subset \mathbb{R}^{2n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-2}$  est donc de rang  $n - 2$ . Ce qui termine la démonstration par récurrence.

On en déduit que, pour tout  $n \geq 4$ , l'application  $\gamma : \Omega_n \subset \mathbb{R}^{2n-3} \rightarrow \mathbb{R}^{n-3}$  est une submersion et que l'ensemble non vide  $\Gamma_n = \gamma^{-1}(\{0\})$  est une sous-variété de codimension  $(n - 3)$  de l'ouvert  $\Omega_n$  de  $\mathbb{R}^{2n-3}$ . Ceci implique que  $\Gamma_n$  est une sous-variété de dimension  $n$  de  $\mathbb{R}^{2n-3}$ .  $\diamond$

### 3. Polygones équilatéraux et polygones articulés

#### 3.1. Polygones géométriques équilatéraux

Un polygone  $\langle M_1, \dots, M_n \rangle \simeq (t_1, x_1, t_2, x_2, \dots, t_{n-2}, x_{n-2}, t_{n-1}) \in \Omega_n$  est équilatéral si, et seulement si, on a  $M_1M_2 = M_nM_1$ ,  $M_2M_3 = M_nM_1, \dots, M_{n-2}M_{n-1} = M_nM_1$  et  $M_{n-1}M_n = M_nM_1$  ou  $x_1 = t_1$ ,  $x_2 = t_1, \dots$ ,  $x_{n-2} = t_1$  et  $t_{n-1} = t_1$ .

On peut donc voir que l'ensemble  $\mathcal{E}_n$  des polygones géométriques équilatéraux comme l'ensemble de niveau  $\lambda_n^{-1}(\{0\})$  de l'application  $\lambda_n : \Omega_n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  définie par :

$$(3.1) \quad \lambda_n(t_1, x_1, \dots, t_{n-2}, x_{n-2}, t_{n-1}) = (x_1 - t_1, x_2 - t_1, \dots, x_{n-2} - t_1, t_{n-1} - t_1).$$

**Proposition.** *L'espace  $\mathcal{E}_n$  des polygones géométriques équilatéraux est une sous-variété différentiable convexe de dimension  $n - 2$  de  $\mathbb{R}^{2n-3}$ .*

**Preuve.**  $\lambda_n$  est la restriction à  $\Omega_n$  de l'application linéaire surjective  $\tilde{\lambda}_n : \mathbb{R}^{2n-3} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  définie comme suit :  $\tilde{\lambda}_n(t_1, x_1, t_2, x_2, \dots, t_{n-2}, x_{n-2}, t_{n-1}) = (x_1 - t_1, x_2 - t_1, \dots, x_{n-2} - t_1, t_{n-1} - t_1)$ . C'est donc une submersion en tout point de  $\Omega_n$ . Ceci montre que l'ensemble de niveau :

$$(3.2) \quad \lambda_n^{-1}(\{0\}) = \Omega_n \cap \tilde{\lambda}_n^{-1}(\{0\})$$

est une sous-variété de dimension  $n - 2$  de  $\Omega_n$ . Elle est convexe comme intersection d'ensembles convexes.  $\diamond$

#### 3.2. Polygones géométriques articulés

Un *polygone articulé* est un système mécanique consistant en  $n$  barres rigides  $[M_1M_2], [M_1M_2], \dots, [M_{n-1}M_n]$  articulées à leurs extrémités  $M_1, \dots, M_n$ . Les longueurs des barres  $u_1 = M_1M_2, \dots, u_n = M_nM_1$  définissent un élément  $u = (u_1, \dots, u_n)$  de l'ouvert  $\mathcal{V}_n$ . L'ensemble des articulations est l'ensemble de niveau  $q_n^{-1}(\{u\})$  de l'application  $\Omega_n \subset \mathbb{R}^{2n-3} \xrightarrow{q_n} \mathcal{V}_n$  donnée par :

$$(3.3) \quad q_n(t_1, x_1, t_2, x_2, \dots, t_{n-2}, x_{n-2}, t_{n-1}) = (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, t_{n-1}, t_1).$$

**Proposition.** *L'application  $q_n$  est une submersion surjective dont chaque ensemble de niveau est une sous-variété différentiable convexe de dimension  $n - 3$  de  $\mathbb{R}^{2n-3}$ . Ces ensembles de niveau sont les feuilles d'un feuilletage  $\mathcal{F}_q$  de dimension  $n - 3$  sur  $\Omega_n$  dont l'espace des feuilles est  $\mathcal{V}_n$ .*

**Preuve.** L'application  $q_n$  est la restriction à l'espace  $\Omega_n$  de la projection linéaire  $\mathbb{R}^{2n-3} \xrightarrow{\tilde{q}_n} \mathbb{R}^n$  définie par :

$$\tilde{q}_n(t_1, x_1, \dots, t_{n-2}, x_{n-2}, t_{n-1}) = (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, t_{n-1}, t_1).$$

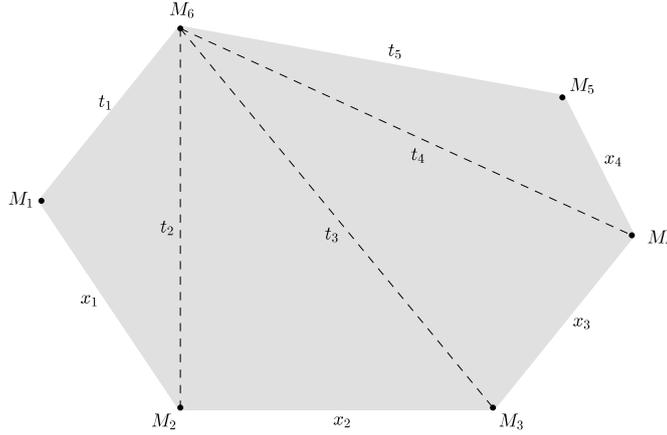
C'est une submersion en tout point de  $\Omega_n$ . Le fait que  $q_n$  est surjective est une conséquence du Théorème 1.2. On obtient donc un feuilletage  $\mathcal{F}_q$  de codimension  $n$  (et de dimension  $n - 3$ ) sur l'espace  $\Omega_n$ ; ses feuilles sont les variétés de niveau de l'application  $q_n$ . L'ouvert  $\mathcal{V}_n$  est l'espace des feuilles de ce feuilletage.

Pour tout  $u \in \mathcal{V}_n$ , l'ensemble  $q_n^{-1}(\{u\}) = \Omega_n \cap \tilde{q}_n^{-1}(\{u\})$  est une sous-variété de dimension  $n - 3$  de  $\Omega_n$ . Elle est convexe comme intersection de parties convexes de  $\mathbb{R}^{2n-3}$ .  $\diamond$

#### 4. Le feuilletage périmètre-aire

4.1. On définit les applications  $p : \Omega_n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{A} : \Omega_n \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\Psi : \Omega_n \rightarrow \mathbb{R}^2$  par :

$$(4.1) \quad \begin{cases} p(\omega) = \text{périmètre de } \omega \\ \mathcal{A}(\omega) = \text{aire de } \omega \\ \Psi(\omega) = (p(\omega), \mathcal{A}(\omega)). \end{cases}$$



Pour tout  $\omega = (t_1, x_1, t_2, \dots, t_{n-2}, x_{n-2}, t_{n-1}) \in \Omega_n$ , on a :

$$(4.2) \quad \begin{cases} p(\omega) = t_1 + x_1 + x_2 + \dots + x_{n-2} + t_{n-1} \\ \mathcal{A}(\omega) = \frac{1}{4}\sqrt{f(\omega_1)} + \dots + \frac{1}{4}\sqrt{f(\omega_{n-2})} \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} \omega_k = (t_k, x_k, t_{k+1}) \in \mathcal{V} \text{ pour } k \in \{1, \dots, n-2\} \\ \text{aire de } \omega_k = \frac{1}{4}\sqrt{f(\omega_k)} \text{ pour } k \in \{1, \dots, n-2\} \text{ (Formule de Héron)} \\ f(x, y, z) = (x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z) \text{ pour } (x, y, z) \in \mathcal{V}. \end{cases}$$

En posant  $s(x, y, z) = x + y + z$ , on obtient pour tout  $v = (x, y, z) \in \mathcal{V}$  :

$$f(v) = s(v)(s(v) - 2x)(s(v) - 2y)(s(v) - 2z).$$

D'autre part, les applications  $p$ ,  $\mathcal{A}$  et  $\Psi$  sont clairement différentiables et les gradients  $\nabla p(\omega)$  et  $\nabla \mathcal{A}(\omega)$  sont :

$$\begin{cases} \nabla p(\omega) = \left( \frac{\partial p}{\partial t_1}(\omega), \frac{\partial p}{\partial x_1}(\omega), \dots, \frac{\partial p}{\partial x_{n-2}}(\omega), \frac{\partial p}{\partial t_{n-1}}(\omega) \right) = (1, 1, 0, 1, \dots, 0, 1, 1) \\ \nabla \mathcal{A}(\omega) = \left( \frac{\nabla f(\omega_1)}{8\sqrt{f(\omega_1)}}, \dots, \frac{\nabla f(\omega_{n-2})}{8\sqrt{f(\omega_{n-2})}} \right) = \left( \frac{\sqrt{f(\omega_1)}}{8} \cdot \frac{\nabla f(\omega_1)}{f(\omega_1)}, \dots, \frac{\sqrt{f(\omega_{n-2})}}{8} \cdot \frac{\nabla f(\omega_{n-2})}{f(\omega_{n-2})} \right) \end{cases}$$

où la dérivée logarithmique  $\frac{\nabla f}{f}$  est donnée en tout point  $v = (x, y, z) \in \mathcal{V}$  par :

$$\frac{\nabla f(v)}{f(v)} = \frac{\nabla s(v)}{s(v)} + \frac{\nabla(s-2x)(v)}{s(v)-2x} + \frac{\nabla(s-2y)(v)}{s(v)-2y} + \frac{\nabla(s-2z)(v)}{s(v)-2z}.$$

On en déduit :

$$\begin{cases} \frac{1}{f(v)} \frac{\partial f}{\partial x}(v) = \frac{1}{s(v)} - \frac{1}{s(v)-2x} + \frac{1}{s(v)-2y} + \frac{1}{s(v)-2z} \\ \frac{1}{f(v)} \frac{\partial f}{\partial y}(v) = \frac{1}{s(v)} + \frac{1}{s(v)-2x} - \frac{1}{s(v)-2y} + \frac{1}{s(v)-2z} \\ \frac{1}{f(v)} \frac{\partial f}{\partial z}(v) = \frac{1}{s(v)} + \frac{1}{s(v)-2x} + \frac{1}{s(v)-2y} - \frac{1}{s(v)-2z}. \end{cases}$$

Par suite, les dérivées partielles de  $\mathcal{A}$  sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t_1}(\omega) = \frac{\sqrt{f(\omega_1)}}{8} \left( \frac{1}{s(\omega_1)} - \frac{1}{s(\omega_1)-2t_1} + \frac{1}{s(\omega_1)-2x_1} + \frac{1}{s(\omega_1)-2t_2} \right) \\ \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_1}(\omega) = \frac{\sqrt{f(\omega_1)}}{8} \left( \frac{1}{s(\omega_1)} + \frac{1}{s(\omega_1)-2t_1} - \frac{1}{s(\omega_1)-2x_1} + \frac{1}{s(\omega_1)-2t_2} \right) \\ \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t_{n-1}}(\omega) = \frac{\sqrt{f(\omega_{n-2})}}{8} \left( \frac{1}{s(\omega_{n-2})} + \frac{1}{s(\omega_{n-2})-2t_{n-2}} + \frac{1}{s(\omega_{n-2})-2x_{n-2}} - \frac{1}{s(\omega_{n-2})-2t_{n-1}} \right) \end{cases}$$

et pour  $k \in \{2, \dots, n-2\}$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t_k}(\omega) = \frac{\sqrt{f(\omega_{k-1})}}{8} \left( \frac{1}{s(\omega_{k-1})} + \frac{1}{s(\omega_{k-1})-2t_{k-1}} + \frac{1}{s(\omega_{k-1})-2x_{k-1}} - \frac{1}{s(\omega_{k-1})-2t_k} \right) \\ \quad + \frac{\sqrt{f(\omega_k)}}{8} \left( \frac{1}{s(\omega_k)} + \frac{1}{s(\omega_k)-2x_k} + \frac{1}{s(\omega_k)-2t_{k+1}} - \frac{1}{s(\omega_k)-2t_k} \right) \\ \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_k}(\omega) = \frac{\sqrt{f(\omega_k)}}{8} \left( \frac{1}{s(\omega_k)} + \frac{1}{s(\omega_k)-2t_k} - \frac{1}{s(\omega_k)-2x_k} + \frac{1}{s(\omega_k)-2t_{k+1}} \right). \end{cases}$$

**4.2. Théorème.** *On a les assertions qui suivent.*

(1) *La fonction périmètre  $p$  et la fonction aire  $\mathcal{A}$  sont des submersions sur  $\Omega_n$ . Donc les variétés de niveau de  $p$  (resp. de  $\mathcal{A}$ ) sont les feuilles d'un feuilletage  $\mathcal{F}_p$  (resp.  $\mathcal{F}_a$ ) de codimension 1 sur  $\Omega_n$ .*

(2) *Pour  $\omega \in \Omega_n$ , la différentielle  $d\Psi(\omega)$  est de rang 2 si  $\omega$  n'est pas un polygone régulier et de rang 1 si  $\omega$  l'est. Donc l'application  $\Psi$  définit un feuilletage  $\mathcal{F}$  de codimension 2 sur l'ouvert  $\Omega_n^*$  de  $\mathbb{R}^{2n-3}$  dont les éléments sont les polygones non réguliers de  $\Omega_n$ .*

**Preuve.** Soit  $\omega = (t_1, x_1, \dots, t_{n-2}, x_{n-2}, t_{n-1})$  un élément de  $\Omega_n$  et  $(M_1, \dots, M_n)$  un de ses représentants.

Point (1)

(\*) Pour tout  $\omega \in \Omega_n$ ,  $dp(\omega) \neq 0$  puisque  $\frac{\partial p}{\partial t_1}(\omega) = 1 \neq 0$ . Donc  $p$  est une submersion sur  $\Omega_n$ .

(\*) Pour tout  $\omega \in \Omega_n$ ,  $\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t_1}(\omega) \neq 0$  ou  $\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_1}(\omega) \neq 0$ . En effet on a les implications :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t_1}(\omega) = 0 \\ \text{et} \\ \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_1}(\omega) = 0 \end{cases} \implies \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t_1}(\omega) + \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_1}(\omega) = 0 \implies \frac{2}{s(\omega_1)} + \frac{2}{s(\omega_1) - 2t_2} = 0 \implies t_1 + x_1 = 0.$$

Mais la dernière égalité  $t_1 + x_1 = 0$  ne peut pas être satisfaite. Donc  $d\mathcal{A}(\omega) \neq 0$ . Ceci prouve que  $\mathcal{A}$  est une submersion sur  $\Omega_n$ .

Point (2)

(\*) Si les côtés du polygone ne sont pas tous égaux, il existe deux côtés successifs (de sommet commun  $M$ ) ayant des longueurs différentes. On peut supposer que  $M = M_1$ . Dans ces conditions les longueurs  $t_1 = M_n M_1$  et  $x_1 = M_1 M_2$  sont différentes. Ce qui donne  $\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t_1}(\omega) \neq \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_1}(\omega)$  puisque on a l'implication :

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t_1}(\omega) = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_1}(\omega) \implies t_1 = x_1.$$

La matrice jacobienne de l'application  $\Psi$  au point  $\omega$  est :

$$\mathcal{J}(\Psi, \omega) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t_1}(\omega) & \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_1}(\omega) & \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t_2}(\omega) & \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_2}(\omega) & \dots & \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t_{n-2}}(\omega) & \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_{n-2}}(\omega) & \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t_{n-1}}(\omega) \end{pmatrix}$$

Elle est de rang 2 puisque la sous-matrice  $2 \times 2$  de  $\mathcal{J}(\Psi, \omega)$  consistant en les deux premières colonnes est inversible.

(\*) Supposons le polygone équilatéral. Nous considérons deux cas :

- La condition (C) suivante est satisfaite.

$$(C) \quad \begin{cases} \text{Les dérivées partielles } \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t_1}(\omega), \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t_{n-1}}(\omega), \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_k}(\omega) \\ \text{avec } k \in \{1, \dots, n-2\} \text{ ne sont pas toutes égales} \\ \text{ou} \\ \text{au moins une des dérivées } \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t_k}(\omega), k \in \{1, \dots, n-2\} \text{ est non nulle.} \end{cases}$$

La matrice  $\mathcal{J}(\Psi, \omega)$  a pour rang 2 puisque elle admet une sous-matrice d'ordre 2 inversible.

- La condition (C) n'est pas satisfaite. Dans ce cas la condition non(C) l'est :

$$\text{non(C)} \quad \begin{cases} \text{Les dérivées partielles } \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t_1}(\omega), \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t_{n-1}}(\omega), \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_k}(\omega) \\ \text{avec } k \in \{1, \dots, n-2\} \text{ sont toutes égales} \\ \text{et} \\ \text{les dérivées } \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t_k}(\omega), k \in \{1, \dots, n-2\} \text{ sont toutes nulles} \end{cases}$$

et on a :

$$(4.3) \quad \mathcal{J}(\Psi, \omega) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t_1}(\omega) & \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t_1}(\omega) & 0 & \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t_1}(\omega) & \cdots & 0 & \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t_1}(\omega) & \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t_1}(\omega) \end{pmatrix}$$

Ceci implique que  $\mathcal{J}(\Psi, \omega)$  est de rang 1. Nous allons montrer que dans ce cas  $\omega$  est un polygone régulier.

Pour  $k \in \{2, \dots, n-2\}$ , on a  $\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_{k-1}}(\omega) = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_k}(\omega)$  qui implique :

$$\left( \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_{k-1}}(\omega) \right)^2 - \left( \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_k}(\omega) \right)^2 = 0.$$

Par suite, en tenant compte du fait que les côtés  $x_k$  sont tous égaux dans ce cas, on obtient la factorisation :

$$\frac{64x_k^2 t_k^2 (t_{k-1} - t_{k+1})(t_{k-1} + t_{k+1})(t_{k-1}t_{k+1} - x_k^2 + t_k^2)(t_{k-1}t_{k+1} + x_k^2 - t_k^2)}{\Delta} = 0$$

où :

$$\Delta = (x_k - t_k - t_{k+1})(x_k - t_k + t_{k+1})(x_k + t_k - t_{k+1})(x_k + t_k + t_{k+1}) \\ (t_{k-1} - x_k - t_k)(t_{k-1} - x_k + t_k)(t_{k-1} + x_k - t_k)(t_{k-1} + x_k + t_k).$$

Donc  $(t_{k-1} - t_{k+1})(t_{k-1}t_{k+1} - x_k^2 + t_k^2)(t_{k-1}t_{k+1} + x_k^2 - t_k^2) = 0$ .

– Si  $t_{k-1} - t_{k+1} = 0$ , en tenant compte de la relation  $\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t_k}(\omega) = 0$ , on obtient :

$$t_k^2 = x_k^2 + t_{k+1}^2.$$

Ce qui implique que les deux triangles  $(M_n, M_{k-1}, M_k)$  et  $(M_n, M_{k+1}, M_k)$  sont rectangles respectivement en  $M_{k-1}$  et  $M_{k+1}$ . Par conséquent le quadrilatère  $(M_n, M_{k-1}, M_k, M_{k+1})$  est inscriptible ( $\widehat{M}_{k-1} = \frac{\pi}{2} = \widehat{M}_{k+1}$ ).

– Si  $t_{k-1}t_{k+1} - x_k^2 + t_k^2 = 0$ , le quadrilatère convexe  $(M_n, M_{k-1}, M_k, M_{k+1})$  a les propriétés qui suivent :

$$(4.4) \quad \begin{cases} M_{k-1}M_k = x_k = M_kM_{k+1} \text{ (Le polygone est équilatéral dans ce cas.)} \\ t_k^2 = x_k^2 - t_{k-1}t_{k+1} \\ \cos \widehat{M}_{k-1} = \frac{t_k^2 - t_{k-1}^2 - x_k^2}{2t_{k-1}x_k} = \frac{x_k^2 - t_{k-1}t_{k+1} - t_{k-1}^2 - x_k^2}{2t_{k-1}x_k} = -\frac{t_{k+1} + t_{k-1}}{2x_k} \\ \cos \widehat{M}_{k+1} = \frac{t_k^2 - t_{k+1}^2 - x_k^2}{2t_{k+1}x_k} = \frac{x_k^2 - t_{k-1}t_{k+1} - t_{k+1}^2 - x_k^2}{2t_{k+1}x_k} = -\frac{t_{k-1} + t_{k+1}}{2x_k} \\ \widehat{M}_{k-1} = \widehat{M}_{k+1} \text{ (par l'égalité des cosinus).} \end{cases}$$

Le triangle  $(M_{k-1}, M_n, M_{k+1})$  est donc isocèle en  $M_n$  et  $t_{k-1} = t_{k+1}$ . Ceci implique, comme dans le cas précédent, que le quadrilatère  $(M_n, M_{k-1}, M_k, M_{k+1})$  est inscriptible.

– Si  $t_{k-1}t_{k+1} + x_k^2 - t_k^2 = 0$ , le quadrilatère  $(M_n, M_{k-1}, M_k, M_{k+1})$  est encore inscriptible puisque il satisfait la relation  $\cos \widehat{M}_{k-1} = -\cos \widehat{M}_{k+1}$ . En effet, on a :

$$(4.5) \quad \begin{cases} t_k^2 = t_{k-1}t_{k+1} + x_k^2 \\ \cos \widehat{M}_{k-1} = \frac{t_k^2 - t_{k-1}^2 - x_k^2}{2t_{k-1}x_k} = \frac{x_k^2 + t_{k-1}t_{k+1} - t_{k-1}^2 - x_k^2}{2t_{k-1}x_k} = t_{k+1} - t_{k-1}2x_k \\ \cos \widehat{M}_{k+1} = \frac{t_k^2 - t_{k+1}^2 - x_k^2}{2t_{k+1}x_k} = \frac{x_k^2 + t_{k-1}t_{k+1} - t_{k+1}^2 - x_k^2}{2t_{k+1}x_k} = \frac{t_{k-1} - t_{k+1}}{2x_k}. \end{cases}$$

Nous avons montré, dans tous les cas, que le quadrilatère  $(M_n, M_{k-1}, M_k, M_{k+1})$  est inscriptible pour tout  $k \in \{2, \dots, n-2\}$ . Donc le polygone  $(M_1, \dots, M_n)$  est inscriptible. Comme ce dernier est équilatéral, il est nécessairement régulier.

Finalement les points singuliers de l'application  $\Psi$  sont les polygones réguliers. La restriction de  $\Psi$  à  $\Omega_n^*$  est donc une submersion dont les variétés de niveau sont les feuilles d'un feuilletage  $\mathcal{F}$ .  $\diamond$

## 5. L'exemple des triangles

C'est la situation où on voit plus concrètement les choses et où les dessins sont plus visibles. La manière dont on va la traiter est légèrement différente de celle dont on a usé jusqu'à présent.

### 5.1. L'espace des triangles

Se donner un triangle (dans n'importe quel espace euclidien, de dimension finie ou non), c'est se donner trois nombres réels positifs ou nuls  $x, y$  et  $z$ , tels que :

$$(5.1) \quad \begin{cases} x \leq y + z \\ y \leq z + x \\ z \leq x + y \end{cases}$$

représentant les mesures des côtés. On adoptera la notation  $\langle xyz \rangle$  pour la distinguer de celle qu'on utilise habituellement :  $XYZ$  où les points  $X, Y$  et  $Z$  sont les sommets. On sait en effet (premier cas d'égalité) que  $\langle xyz \rangle$  est isométrique à  $\langle x'y'z' \rangle$  si  $x = x', y = y'$  et  $z = z'$ . (Pour le moment on fera la différence entre un triangle et un autre obtenu par permutation des trois nombres qui le représentent même si, géométriquement, ils sont les mêmes!) Dans toute la suite,  $\lambda$  sera le demi-périmètre  $\lambda = \frac{x+y+z}{2}$ .

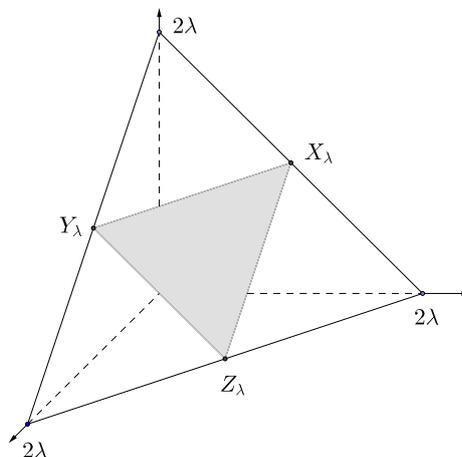
L'ensemble des triangles  $\mathcal{T}$  est une partie de  $\mathbb{R}_+^3$ . Nous le décrivons explicitement. Aux inégalités (5.1) sont associées trois équations définissant trois plans :

$$(5.2) \quad \begin{cases} \Sigma_1 = \{x = y + z\} \\ \Sigma_2 = \{y = z + x\} \\ \Sigma_3 = \{z = x + y\} \end{cases}$$

Dans la tranche  $\{x + y + z = 2\lambda\}$  de  $\mathbb{R}_+^3$ ,  $\Sigma_1, \Sigma_2$  et  $\Sigma_3$  sont les côtés d'un triangle équilatéral dans  $\mathbb{R}_+^3$  dont les sommets sont  $X_\lambda = (0, \lambda, \lambda), Y_\lambda = (\lambda, 0, \lambda)$  et  $Z_\lambda = (\lambda, \lambda, 0)$  (voir dessin ci-dessous) ; l'enveloppe convexe  $P_\lambda$  (triangle plein) de ces points (le triangle  $X_\lambda Y_\lambda Z_\lambda$  et son intérieur) représente l'espace des triangles  $\langle xyz \rangle$  de périmètre  $2\lambda$ .

Lorsque  $\lambda$  varie en  $\lambda'$ , on obtient un autre triangle plein  $P_{\lambda'}$ , image de  $P_\lambda$  par l'homothétie centrée à l'origine et de rapport  $k = \frac{\lambda'}{\lambda}$ . Donc, l'espace  $\mathcal{T}$  est *feuilleté* par ces triangles ;  $\mathcal{T}$  est en fait un cône de sommet l'origine et de base n'importe lequel des triangles pleins  $P_\lambda$ , par exemple  $P_1$  :

$$(5.3) \quad \mathcal{T} = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}_+} \lambda P_1 = \{\lambda X : X \in P_1 \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}_+\}.$$



Pour une situation particulière qui va apparaître par la suite, nous rappelons le résultat qui suit qui a été établi dans le cadre plus général des polygones.

*On se donne une famille de triangles  $ABC$  ayant tous le même périmètre  $2\lambda$ . Parmi tous ces triangles, celui qui maximise l'aire est le triangle équilatéral.*

### 5.2. Le feuilletage périmètre $\mathcal{F}_p$

Chacune de ses feuilles  $P_\lambda$  (où  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ) est définie par l'équation  $p(x, y, z) = 2\lambda$  où  $p$  est la fonction périmètre  $p(x, y, z) = x + y + z$ . Nous avons déjà vu que la surface de niveau  $P_\lambda$  est l'enveloppe convexe du triangle  $X_\lambda Y_\lambda Z_\lambda$ . Lorsque  $\lambda = 0$ ,  $P_0$  est le point  $(0, 0, 0)$  de  $\mathbb{R}_+^3$ . Nous avons donc un feuilletage  $\mathcal{F}_p$  singulier sur  $\Omega_3$  dont les feuilles régulières sont les surfaces  $P_\lambda$  ( $\lambda > 0$ ). Évidemment, en dehors de  $P_0$ ,  $\mathcal{F}_p$  est trivial puisque isomorphe au feuilletage produit  $P_1 \times \mathbb{R}_+^*$ .

### 5.3. Le feuilletage aire $\mathcal{F}_a$

La fonction  $\mathcal{A} : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$  qui au triangle  $\langle xyz \rangle$  associe son aire est donnée analytiquement par la formule de Héron :

$$(5.4) \quad \mathcal{A}(x, y, z) = \frac{1}{4} \sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}.$$

Le feuilletage  $\mathcal{F}_a$  qui nous intéressera sera celui dont les feuilles sont les surfaces de niveau de cette fonction. On peut déjà voir que la feuille  $\mathcal{A}(x, y, z) = 0$  est le cône fermé de base les côtés du triangle  $P_1 = X_1 Y_1 Z_1$ . Ceci étant réglé, on ne travaillera plus que sur l'intérieur de  $\Omega$  qui est l'ouvert  $\Omega = \Omega_3 \cap (\mathbb{R}_+^*)^3$ . Nous regarderons donc la fonction  $\mathcal{A} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ .

- La surface de niveau  $s$  de la fonction  $\mathcal{A}$  sur l'ouvert  $\Omega$  est exactement celle de niveau  $s^2$  de la fonction  $\Phi = \mathcal{A}^2$ . L'avantage de travailler avec  $\Phi$  plutôt qu'avec  $\mathcal{A}$  est qu'il n'y a plus de racine carrée, ce qui simplifie les calculs, entre autres celui de la différentielle qui joue un rôle fondamental. On considère donc la fonction :

$$(5.5) \quad \Phi(x, y, z) = \frac{1}{16} (x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z).$$

- La différentielle de  $\Phi$  est de la forme :

$$d\Phi(x, y, z) = \frac{1}{16} \{A(x, y, z)dx + B(x, y, z)dy + C(x, y, z)dz\}$$

où les fonctions  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont données par :

$$(5.6) \quad \begin{aligned} A &= (-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z) - (x+y+z)(x-y+z)(x+y-z) \\ &\quad + (x+y+z)(-x+y+z)(x+y-z) + (x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z) \\ B &= (-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z) + (x+y+z)(x-y+z)(x+y-z) \\ &\quad - (x+y+z)(-x+y+z)(x+y-z) + (x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z) \\ C &= (-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z) + (x+y+z)(x-y+z)(x+y-z) \\ &\quad + (x+y+z)(-x+y+z)(x+y-z) - (x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z). \end{aligned}$$

Un calcul facile mais long montre que ces trois fonctions  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont nulles simultanément que si  $x = y = z = 0$ , ce qui ne peut pas se produire car  $(0, 0, 0)$  n'est pas dans  $\Omega$ .

- À périmètre fixé  $2\lambda$ , la fonction aire  $a$  est maximale, et donc la fonction  $\Phi$  aussi, lorsque  $x = y = z = \frac{2}{3}\lambda$ ; en ce point  $\Phi$  vaut  $\frac{\lambda^4}{27}$ . Ce sont les valeurs prises par la fonction  $\Phi$  sur la demi-droite  $\Delta$  d'équations  $x = y = z$ . On se met maintenant sur l'ouvert  $\Omega_* = \Omega \setminus \Delta$ . Pour tout  $u = (x, y, z) \in \Omega_*$ , la différentielle  $d_u \Phi$  est de rang 1; donc l'ensemble de niveau de  $\Phi$  passant par ce point est une surface régulière, c'est même une surface algébrique de degré 4 (on dit une *quartique*). Elle a pour équation :

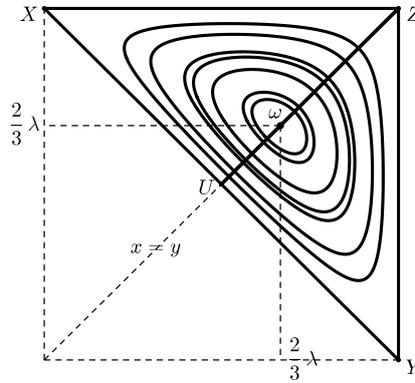
$$(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z) = 16\Phi(u).$$

Notons  $G$  le sous-groupe du groupe  $\text{Isom}(\mathbb{R}^3)$  des isométries de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  engendré par la rotation  $r$  d'axe  $\Delta$  et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$  et la réflexion  $\sigma$  par rapport au plan d'équation  $x = y$ . (Les restrictions de ses éléments au plan d'équation  $x + y + z = 2\lambda$  est le groupe des isométries du triangle équilatéral  $X_\lambda Y_\lambda Z_\lambda$ .) Il laisse l'espace

$\Omega_3$  invariant ainsi que son bord  $\partial\Omega_3$ , la demi-droite  $\Delta$  et les ouverts  $\Omega$  et  $\Omega_*$ . Il agit donc sur  $\Omega_3$  et fixe chaque feuille de  $\mathcal{F}_a$  individuellement ; il en est de même pour le feuilletage  $\mathcal{F}_p$ .

**5.4.** Soit  $\Psi : \Omega_* \mapsto (\mathbb{R}_+^*)^2$  la fonction définie par  $\Psi(x, y, z) = (p(x, y, z), \Phi(x, y, z))$ . À un facteur multiplicatif constant près, la matrice de sa différentielle en  $u = (x, y, z)$  est donnée par  $d_u\Psi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ A(u) & B(u) & C(u) \end{pmatrix}$  où  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont les fonctions données par (5.6). On peut montrer que ces fonctions ne sont égales que si  $x = y = z$  ; donc pour  $u \in \Omega_*$ ,  $d_u\Psi$  est de rang 2. Par suite, les ensembles de niveau de  $\Psi$  sont des courbes régulières, feuilles d'un feuilletage  $\mathcal{F}_*$  sur  $\Omega_*$ .

**5.5.** Sur  $\Omega_3$  on a donc un feuilletage singulier  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_p \cap \mathcal{F}_a$ . Ses feuilles de dimension 0 sont les points de la demi-droite  $\{(\frac{2}{3}\lambda, \frac{2}{3}\lambda, \frac{2}{3}\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}_+\}$ . Parmi les feuilles de dimension égale à 1, il y a les triangles de sommets  $X_\lambda = (0, \lambda, \lambda)$ ,  $Y_\lambda = (\lambda, 0, \lambda)$  et  $Z_\lambda = (\lambda, \lambda, 0)$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  ; toute autre feuille est une courbe d'équation  $\Psi(u) = \text{constante}$  dans l'ouvert  $\Omega_*$ . Ces courbes feuilletent bien sûr chaque plaque  $P_\lambda$  (feuille de  $\mathcal{F}_p$ ). Pour bien voir ce que c'est, on projette orthogonalement cette plaque sur le plan  $z = 0$  et on obtient le feuilletage du dessin ci-dessous. Nous allons expliquer ce que tout cela signifie.



La partie  $\Theta_\lambda$  constituée du triangle  $XYZ$  et son intérieur est le projeté sur le plan  $z = 0$  de l'ensemble  $P_\lambda$  des triangles  $\langle x_\lambda y_\lambda z_\lambda \rangle$  de périmètre  $2\lambda$ . Notons que le bord de  $P_\lambda$  est un triangle équilatéral alors que celui de  $\Theta_\lambda$  est un triangle rectangle isocèle. Le feuilletage  $\mathcal{F}$  sur  $P_\lambda$  est isomorphe au feuilletage du dessin via le difféomorphisme  $f : P_\lambda \rightarrow \Theta_\lambda$  défini par  $f(x, y, z) = (x, y, 0)$  et d'inverse  $f^{-1}(x, y, 0) = (x, y, 2\lambda - x - y)$ .

- Le bord  $XYZ$  correspond aux triangles qui ont une aire nulle : les triangles aplatis *i.e.* ceux pour lesquels on a l'une des égalités  $x = y + z$ ,  $y = z + x$  ou  $z = x + y$ .

- Le point  $\omega$  de coordonnées  $(\frac{2}{3}\lambda, \frac{2}{3}\lambda)$  correspond au triangle équilatéral  $\langle xxx \rangle$  d'aire maximale. Un triangle équilatéral ne peut donc jamais se déformer en un autre triangle (quel qu'il soit) ayant même aire et même périmètre.

- Les courbes forment un feuilletage de  $\Theta_\lambda \setminus \{\omega\}$ , chaque feuille correspond à l'ensemble des triangles ayant même aire. Elle a pour équation  $\lambda(2\lambda - x)(2\lambda - y)(x + y) = 8c$  où  $c$  est une constante variant dans  $]0, \frac{8\lambda^4}{27}[$ .

- Le morceau de diagonale  $UZ$  correspond à l'ensemble des triangles isocèles (pour lesquels  $x = y$ ). Dans chacune des feuilles il y a exactement les projetés de deux triangles isocèles  $\langle xxz \rangle$  et  $\langle x'x'z' \rangle$ .

- Enfin, on voit sur le dessin que toute la situation n'est invariante que par la réflexion  $\sigma$  (symétrie par rapport à la diagonale  $x = y$ ) alors que sur le triangle  $P_\lambda$  elle est invariante par tout le groupe  $G$ .  $\diamond$

**5.6.** Geoffrey Letellier a trouvé deux droites de triangles isocèles  $\langle x_\lambda y_\lambda z_\lambda \rangle$  et  $\langle x'_\lambda y'_\lambda z'_\lambda \rangle$  paramétrées par  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  avec  $x_\lambda = y_\lambda = \frac{11}{14}\lambda$ ,  $z_\lambda = \frac{3}{7}\lambda$  et  $x'_\lambda = y'_\lambda = \frac{4}{7}\lambda$ ,  $z'_\lambda = \frac{6}{7}\lambda$ . Elles sont telles que, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  :

$$\begin{cases} \langle x_\lambda x_\lambda z_\lambda \rangle \text{ et } \langle x'_\lambda x'_\lambda z'_\lambda \rangle \text{ ont même périmètre } 2\lambda. \\ \langle x_\lambda x_\lambda z_\lambda \rangle \text{ et } \langle x'_\lambda x'_\lambda z'_\lambda \rangle \text{ ont même aire } \frac{3\lambda^2}{7\sqrt{7}}. \\ \langle x_\lambda x_\lambda z_\lambda \rangle \text{ et } \langle x'_\lambda x'_\lambda z'_\lambda \rangle \text{ ne sont pas isométriques.} \end{cases}$$

Par exemple les deux triangles isocèles  $x = y = 11$ ,  $z = 6$  et  $x' = y' = 8$ ,  $z' = 12$  ont même périmètre égal à 28 et même aire égale à  $12\sqrt{7}$ .

## 6. Quelques propriétés des polygones liées à l'aire et au périmètre

Les résultats classiques qui suivent sont de beaux théorèmes de la géométrie euclidienne élémentaire plane.

**6.1. Théorème (Inégalité isopérimétrique).** *De tous les polygones convexes à  $n$  côtés ( $n \geq 3$ ) de périmètre donné, le polygone régulier est celui dont l'aire est maximale.*

Pour une esquisse de la preuve voir par exemple [Han]. Dans le même ordre d'idées, nous avons aussi le théorème qui suit. Sa démonstration n'est pas difficile mais juste un peu longue et non immédiate. (Le lecteur peut s'aventurer à la faire lui-même!)

**6.2. Théorème.** *Parmi les polygones convexes dont les côtés ont des longueurs données, le polygone inscrit est celui dont l'aire est maximale.*

A l'aide de l'expression analytique de la fonction "aire"  $\mathcal{A} : \omega \in \Omega_n \rightarrow \text{aire}(\omega) \in \mathbb{R}$ , nous démontrons les résultats suivants liés aux deux théorèmes classiques ci-dessus. (Cela a aussi été partiellement établi par une méthode différente dans [Khi].)

**6.3. Théorème.** *On a les assertions suivantes.*

(1) *Pour tout nombre réel  $L > 0$ , la variété différentiable  $p^{-1}(\{L\})$  constituée de tous les  $n$ -polygones de périmètre  $L$  est difféomorphe à un ouvert convexe  $\Omega_{n,L}$  de  $\mathbb{R}^{2n-4}$  et la restriction  $\mathcal{A}_L : \Omega_{n,L} \rightarrow \mathbb{R}$  de  $\mathcal{A}$  à  $\Omega_{n,L}$  admet un point critique en l'unique  $n$ -polygone régulier  $\omega_L$  de périmètre  $L$ .*

(2) *Les polygones convexes dont les côtés ont des longueurs données, forment une variété différentiable difféomorphe à un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^{n-3}$  et la restriction de la fonction  $\mathcal{A}$  à cet ouvert admet un point critique en l'unique  $n$ -polygone inscrit qui appartient à l'ouvert.*

**Preuve.** Rappelons que, pour tout  $\omega = (t_1, x_1, \dots, t_{n-2}, x_{n-2}, t_{n-1}) \in \Omega_n$ , on a :

$$\begin{aligned} p(\omega) &= \text{périmètre}(\omega) = t_1 + x_1 + \dots + x_{n-2} + t_{n-1} \\ \mathcal{A}(\omega) &= \text{aire}(\omega) = \frac{1}{4}\sqrt{f(\omega_1)} + \dots + \frac{1}{4}\sqrt{f(\omega_{n-2})} \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{cases} \omega_k = (t_k, x_k, t_{k+1}) \in \mathcal{V} \text{ pour } k \in \{1, \dots, n-2\} \\ f(x, y, z) = (x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z) \text{ pour } (x, y, z) \in \mathcal{V}. \end{cases}$$

En posant  $h(v) = \frac{1}{4}\sqrt{f(v)}$  pour  $v \in \mathcal{V}$ , on obtient :

$$\mathcal{A}(\omega) = h(\omega_1) + \dots + h(\omega_{n-2})$$

pour tout  $\omega = (t_1, x_1, \dots, t_{n-2}, x_{n-2}, t_{n-1}) \in \Omega_n$ .

Point (1)

Soit  $L \in ]0, +\infty[$ . Pour tout  $\omega = (t_1, x_1, t_2, \dots, t_{n-2}, x_{n-2}, t_{n-1}) \in \Omega_n$ , on a :

$$p(\omega) = L \Leftrightarrow t_1 = L - x_1 - \dots - x_{n-2} - t_{n-1}$$

En considérant l'application affine  $T : \mathbb{R}^{2n-4} \rightarrow \mathbb{R}^{2n-3} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n-4}$  donnée par :

$$u = (x_1, t_2, \dots, t_{n-2}, x_{n-2}, t_{n-1}) \mapsto T(u) = (t_1(u), u)$$

où  $t_1(u) = L - x_1 - \dots - x_{n-2} - t_{n-1}$ , on voit que  $p^{-1}(\{L\})$  est naturellement identifié à l'ouvert convexe  $\Omega_{n,L} = T^{-1}(\Omega_n)$  de  $\mathbb{R}^{2n-4}$ .

Pour tout  $u = (x_1, t_2, \dots, t_{n-2}, x_{n-2}, t_{n-1}) \in \Omega_{n,L}$ , on a :

$$\mathcal{A}_L(u) = h(t_1(u), x_1, t_2) + h(t_2, x_2, t_3) + \dots + h(t_{n-2}, x_{n-2}, t_{n-1}).$$

Posons  $t_1 = t_1(u)$  et  $\omega_k = (t_k, x_k, t_{k+1})$  pour  $k \in \{1, \dots, n-2\}$ . Les dérivées partielles en  $(x, y, z) \in \mathcal{V}$  sont :

$$(6.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x}(x, y, z) = \frac{x(-x^2+y^2+z^2)}{2\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}} \\ \frac{\partial h}{\partial y}(x, y, z) = \frac{y(x^2-y^2+z^2)}{2\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}} \\ \frac{\partial h}{\partial z}(x, y, z) = \frac{z(x^2+y^2-z^2)}{2\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{A}_L}{\partial x_1}(u) = \frac{\partial}{\partial x_1} [h(t_1(u), x_1, t_2)] = -\frac{\partial h}{\partial x}(\omega_1) + \frac{\partial h}{\partial y}(\omega_1) = \\ \frac{(t_1 - x_1)(t_1 + x_1 - t_2)(t_1 + x_1 + t_2)}{2\sqrt{(t_1 + x_1 + t_2)(-t_1 + x_1 + t_2)(t_1 - x_1 + t_2)(t_1 + x_1 - t_2)}} \\ \frac{\partial \mathcal{A}_L}{\partial t_{n-1}}(u) = \frac{\partial}{\partial t_{n-1}} [h(t_1(u), x_1, t_2) + h(t_{n-2}, x_{n-2}, t_{n-1})] = -\frac{\partial h}{\partial x}(\omega_1) + \frac{\partial h}{\partial z}(\omega_{n-2}) \end{cases}$$

et pour  $k \in \{2, \dots, n-2\}$  :

$$(6.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{A}_L}{\partial t_k}(u) = \frac{\partial}{\partial t_k} [h(t_{k-1}, x_{k-1}, t_k) + h(t_k, x_k, t_{k+1})] = \frac{\partial h}{\partial z}(\omega_{k-1}) + \frac{\partial h}{\partial x}(\omega_k) \\ \frac{\partial \mathcal{A}_L}{\partial x_k}(u) = \frac{\partial}{\partial x_k} [h(t_1(u), x_1, t_2) + h(t_k, x_k, t_{k+1})] = -\frac{\partial h}{\partial x}(\omega_1) + \frac{\partial h}{\partial y}(\omega_k) \end{cases}$$

( $\star$ ) Si les côtés du polygone ne sont pas tous égaux, alors il en existe deux consécutifs avec une extrémité commune  $M$  et des longueurs différentes.

Par un changement de numérotation des sommets du polygone, on peut supposer que  $M = M_1$ . Dans ces conditions, les longueurs  $t_1 = M_n M_1$  et  $x_1 = M_1 M_2$  sont distinctes. Ce qui implique que  $\frac{\partial \mathcal{A}_L}{\partial x_1}(u) \neq 0$  et  $u$  n'est pas un point critique de  $\mathcal{A}_L$ .

( $\star$ ) Si tous les côtés du polygone sont égaux, alors  $t_1 = x_1 = x_2 = \dots = x_{n-2} = t_{n-1}$  et pour que ce polygone soit un point critique de  $\mathcal{A}_L$ , on doit avoir  $\frac{\partial \mathcal{A}_L}{\partial t_k}(u) = 0$  pour tout  $k \in \{2, \dots, n-2\}$ , ou encore :

$$\frac{\partial h}{\partial z}(t_{k-1}, x_k, t_k) = -\frac{\partial h}{\partial x}(t_k, x_k, t_{k+1}) \text{ pour tout } k \in \{2, \dots, n-2\}.$$

Ce qui implique :

$$\left( \frac{\partial h}{\partial z}(t_{k-1}, x_k, t_k) \right)^2 - \left( \frac{\partial h}{\partial x}(t_k, x_k, t_{k+1}) \right)^2 = 0 \text{ pour tout } k \in \{2, \dots, n-2\}.$$

Le développement de cette relation conduit à l'égalité suivante :

$$\frac{(t_{k+1}t_{k-1} + x_k^2 - t_k^2)(t_{k+1}t_{k-1} - x_k^2 + t_k^2)(t_{k+1} + t_{k-1})(t_{k+1} - t_{k-1})x_k^2 t_k^2}{\Sigma} = 0$$

où :

$$\Sigma = (t_{k+1} + x_k + t_k)(t_{k+1} + x_k - t_k)(t_{k+1} - x_k + t_k)(t_{k+1} - x_k - t_k) \\ (t_{k-1} + x_k + t_k)(t_{k-1} + x_k - t_k)(t_{k-1} - x_k + t_k)(t_{k-1} - x_k - t_k).$$

D'où :

$$(t_{k+1} - t_{k-1})(t_{k+1}t_{k-1} - x_k^2 + t_k^2)(t_{k+1}t_{k-1} + x_k^2 - t_k^2) = 0.$$

La preuve se termine comme celle du Théorème 4.2. On obtient ainsi l'inscriptibilité de tous les quadrilatères  $(M_n, M_{k-1}, M_k, M_{k+1})$  pour  $k \in \{2, \dots, n-2\}$  et donc celle du polygone  $(M_1, \dots, M_n)$ . Mais comme ce dernier à tous ses côtés de même longueur, il est nécessairement régulier.

Finalement, les points singuliers de l'application  $\mathcal{A}_L$  sont les polygones réguliers de  $\Omega_{n,L}$  c'est-à-dire l'unique  $n$ -polygone régulier  $\omega_L$  de périmètre  $L$ .

Point (2)

Soient  $v = (\bar{t}_1, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-2}, \bar{t}_{n-1}) \in \mathcal{V}_n$  et  $F_v$  l'ensemble des polygones convexes dont les côtés sont  $\bar{t}_1, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-2}, \bar{t}_{n-1}$ . Par la proposition 3.2, cet ensemble est une sous-variété de  $\Omega_n$ , difféomorphe à un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^{n-3}$ .

D'autre part, la fonction aire  $\mathcal{A} : F_v \rightarrow \mathbb{R}$  est donnée, pour  $t = (t_2, t_3, \dots, t_{n-2}) \in F_v$ , par :

$$(6.3) \quad \mathcal{A}(t) = h(\bar{t}_1, \bar{x}_1, t_2) + h(t_2, \bar{x}_2, t_3) + \dots + h(t_{n-2}, \bar{x}_{n-2}, \bar{t}_{n-1}).$$

En posant :

$$\begin{cases} \omega_1 = (\bar{t}_1, \bar{x}_1, t_2) \\ \omega_k = (t_k, \bar{x}_k, t_{k+1}) \text{ pour } k \in \{2, \dots, n-3\} \\ \omega_{n-2} = (t_{n-2}, \bar{x}_{n-2}, \bar{t}_{n-1}), \end{cases}$$

on peut exprimer les dérivées partielles de  $\mathcal{A}$  comme suit :

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t_k}(t) = \frac{\partial}{\partial t_k} [h(t_{k-1}, \bar{x}_{k-1}, t_k) + h(t_k, \bar{x}_k, t_{k+1})] = \frac{\partial h}{\partial z}(\omega_{k-1}) + \frac{\partial h}{\partial x}(\omega_k).$$

Un point critique  $t \in F_v$  de la fonction aire doit satisfaire :

$$\frac{\partial h}{\partial z}(\omega_{k-1}) + \frac{\partial h}{\partial x}(\omega_k) = 0 \text{ et donc } \left( \frac{\partial h}{\partial z}(\omega_{k-1}) \right)^2 - \left( \frac{\partial h}{\partial x}(\omega_k) \right)^2 = 0.$$

En posant  $\omega_{k-1} = (u, v, w)$  et  $\omega_k = (w, s, r)$ , on obtient  $\frac{\alpha}{\beta} = 0$  où :

$$\alpha = \begin{aligned} & w^2 (r^2 uv + rsu^2 + rsv^2 - rsw^2 + s^2 uv - uvw^2) \\ & (-r^2 uv + rsu^2 + rsv^2 - rsw^2 - s^2 uv + uvw^2). \end{aligned}$$

et :

$$\beta = (r - s - w)(r + s - w)(r - s + w)(r + s + w)(-u - v + w)(u - v + w)(-u + v + w)(u + v + w)$$

ou :

$$\begin{aligned} & [(rsu^2 + rsv^2 - rsw^2) + (s^2 uv - uvw^2 + r^2 uv)] \\ & [(rsu^2 + rsv^2 - rsw^2) - (s^2 uv - uvw^2 + r^2 uv)] = 0. \end{aligned}$$

Ceci implique :

$$(rsu^2 + rsv^2 - rsw^2)^2 - (s^2 uv - uvw^2 + r^2 uv)^2 = 0$$

ou :

$$rs(u^2 + v^2 - w^2) = \pm uv(r^2 + s^2 - w^2).$$

On en déduit donc :

$$\cos \widehat{M_{k-1}} = \pm \cos \widehat{M_{k+1}}$$

qui implique que le quadrilatère  $(M_n, M_{k-1}, M_k, M_{k+1})$  est inscriptible pour tout indice  $k \in \{2, \dots, n-2\}$ . Par suite le polygone  $t$  is inscriptible.

Inversement, si le polygone  $t \in F_v$  est inscriptible, on peut aisément montrer que  $t$  est un point critique de la fonction aire  $\mathcal{A}$ .  $\diamond$

## Références

- [Han] HANSEN, V.L. *Shadows of the Circle*. World Scientific (1998).
- [Khi] KHIMSHIASHVILI, G. *Cyclic polygons as critical points*. Proc. of I. Vekua Institute of Applied Mathematics Vol. 58, (2008), 74-83.
- [Pen] PENNER, R.C. *The Decorated Teichmüller Space of Punctured Surfaces*. Commun. Math. Phys. 113, (1987), 299-339.
- [Per] PERRIN, D. *Mathématiques d'école. Nombres, mesures et géométrie*. Cassini, Paris, (2005).
- [Ram] RAMON, P. *Introduction à la géométrie différentielle discrète*. Editions Ellipses, (2013).

LAMAV, FR du CNRS 2956  
ISTV2, Le Mont Houy  
Université de Valenciennes  
59313 Valenciennes Cedex 9 – France

aziz.elkacimi@univ-valenciennes.fr  
abdellatif.zeggag@univ-valenciennes.fr