EXTRACTION DE LA RACINE CARRÉE
Dites-moi qui s'en souvient ?

Aziz El Kacimi Alaoui

« *À leurs moments perdus, et par simple plaisir, certains chefs cuisiniers étoilés font revivre quelques vieilles recettes culinaires du Moyen Âge. Comme eux, mais plus par nostalgie et conviction de garder un savoir, il m'arrive souvent de revisiter des mathématiques d'antan qui m'ont marqué et qui ont été mises à l'écart ces dernières décennies* ! »

J'ai appris à extraire la *racine carrée à une unité près par défaut* en troisième année secondaire. C'était en 1967 au Lycée Tarik ibn Zyad à Azrou (Maroc). À cette époque, nous n'avions qu'un seul manuel (1) à notre disposition, et nous nous débrouillions avec. Je me souviens encore de notre professeur de mathématiques : Madame Cazalot, une dame superbe. Elle nous faisait la leçon dans une salle aérée, avec de grandes fenêtres, souvent ouvertes, laissant entrer le chant des oiseaux du jardin jouxtant la partie côté ville de l'établissement. Des moments de bonheur !

Les élèves du secondaire d'aujourd'hui ne savent pas extraire une racine carrée, ni même ce que cela signifie. Ils utilisent une machine à calculer - maintenant disponible sur leur téléphone portable. Un simple clic et le résultat s'affiche. Pourquoi devraient-ils s'embêter à faire autrement ? Nous n'avons pas besoin d'apprendre à penser ni à réfléchir quand tout nous est servi à table. Une règle de vie qui nous figera dans la dépendance pour l'éternité ! « *De bien des façons, nous avons vendu nos âmes aux machines* » disait Clifford Donald Simak dans (2) déjà au début des années 1950.

Ces dernières années, j'ai eu à effectuer un calcul qui passait par celui de la racine carrée d'un entier (assez grand pour que je ne puisse pas le faire de tête, ou mentalement comme on dit). Pour m'amuser, j'ai voulu essayer par cette « vieille » méthode mais je n'ai plus su comment ! J'ai alors décidé de passer le temps qu'il faut pour réapprendre et, surtout, pour comprendre comment ça marche (à l'époque je n'ai eu que la « recette » à « exécuter automatiquement »). Ce n'était pas aussi immédiat que je le pensais, il a fallu que je retrouve d'abord comment ça marche en examinant plusieurs exemples numériques pour dégager ensuite les « règles générales de calcul ». C'est l'objet de cette note.

1. Préliminaires

1.1. Tout entier naturel a, utilisant n chiffres (avec bien sûr $n \geq 1$) du *système décimal*, s'écrit de manière unique sous la forme : $a = a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0$ avec $0 \leq a_i \leq 9$ pour tout $i = 0, 1, \cdots, n-2$ et

(1) R. Maillard, R. Cahen et E. Caralp : *Mathématiques, Troisième.* Classiques Hachette (1960).
(2) *Demain les chiens.* Première édition en 1952. Nouvelle traduction dans *Le Livre de Poche* en 2023.

$1 \leq a_{n-1} \leq 9$. Ceci signifie :

$$a = a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0 \cdot 10^0$$

La condition $a_{n-1} \neq 0$ assure l'unicité de l'écriture ; sans quoi on a aussi par exemple les écritures suivantes :

$$1556 = 01556 = 0001556 = 000000001556 = \cdots$$

qui représentent toutes le nombre $1556 = 1.1000 + 5.100 + 5.10 + 6.1 = 1.10^3 + 5.10^2 + 5.10^1 + 6.10^0$. Ce nombre a donc exactement (en écriture réduite) les 4 chiffres : $a_0 = 6$, $a_1 = 5$, $a_2 = 5$ et $a_3 = 1$.

1.2. Définitions. *Soit a un nombre réel positif. On appelle* ***racine carrée*** *de a le nombre réel positif x tel que $x^2 = a$ et qu'on note $\sqrt{a}$. Supposons a entier. La racine carrée de a à une* ***unité près par défaut*** *(en abrégé* RCPD*) est l'entier positif x tel que : $x^2 \leq a < (x+1)^2$. Le nombre $R = a - x^2$ est le* ***reste*** *de l'extraction. On a ainsi : $a = x^2 + R$.*

1.3. Question. *Comment calculer cette* RCPD ?

Pour les petits entiers ou ceux d'apparence proche d'un carré parfait, on peut à peu près le faire à la main. Mais ce n'est pas facile pour a assez grand (on comprend ce qu'on entend par là).

1.4. Avant de commencer quoi que ce soit, remarquons d'abord (la vérification est laissée au lecteur) que si le nombre a utilise $2n$ ou $2n-1$ chiffres, sa RCPD en utilise exactement n, c'est-à-dire que si $a = a_{2n-1}a_{2n-2}\cdots a_1a_0$ ou $a = a_{2n-2}\cdots a_1a_0$, alors $x = x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_1x_0$ (avec bien sûr $x_{n-1} \neq 0$).

2. Un exemple numérique

2.1. Je vais prendre l'exemple numérique $a = 7236511$ et extraire sa RCPD (qui aura quatre chiffres d'après 1.4) par la méthode d'antan que j'ai apprise par cœur et sans en avoir eu aucune explication. Et à partir de là, je vais décrire l'algorithme de façon générale. En voici les différentes étapes, que je vais expliquer l'une après l'autre.

I

7.23.65.11	2
3	

II

7.23.65.11	26
3.23	$46 \times 6 = 276$
47	

III

7.23.65.11	269
3.23	$46 \times 6 = 276$
47.65	$529 \times 9 = 4761$
4	

IV

7.23.65.11	2690
3.23	$46 \times 6 = 276$
47.65	$529 \times 9 = 4761$
4.11	$5380 \times 0 = 0$
4.11	

2.2. Description des étapes

Étape I

• On partage le plan en trois quadrants Q1, Q2 et Q3 ; Q1 à gauche, Q2 et Q3 à droite (Q3 en dessous de Q2 comme sur chacune des quatre figures ci-dessus).

• On partitionne le nombre en tranches de deux chiffres en commençant par la droite : 7.23.65.11. Bien entendu, si le nombre de chiffres est impair, la tranche complètement à gauche ne sera constituée que d'un chiffre ; c'est le cas ici. Ce nombre dont on cherche la RCPD est placé dans le quadrant Q1 comme on le voit sur le dessin. Toutefois, la numérotation des tranches commencera par celle de gauche (dont on dira qu'elle est la première).

• On détermine la RCPD de la première tranche (à gauche) : c'est 2 pour 7. On la place dans le quadrant Q2. Le premier reste est $R_1 = 7 - 2^2 = 3$ qu'on garde dans le quadrant Q1 en dessous de 7.

Étape II

• Dans le quadrant Q1 on abaisse la deuxième tranche 23 qu'on place à côté du reste $R_1 = 3$ pour obtenir 323. On double le nombre 2 de Q2 et on le place dans Q3 ; on obtient 4. À côté de ce 4 on place le plus grand chiffre $0 \leq \omega \leq 9$ tel que $4\omega \times \omega \leq 323$. (Attention : 4ω n'est pas 4 multiplié par ω mais l'entier dont le chiffre des dizaines est 4 et celui des unités ω). Le calcul nous mène vers 6 ($46 \times 6 = 276$) qu'on place à côté du 2 dans Q2 pour faire 26. Le reste $R_2 = 323 - 276 = 47$ sera placé dans Q1 en dessous de 323.

Étape III

• Dans le quadrant Q1 on abaisse la troisième tranche 65 qu'on place à côté du reste $R_2 = 47$ pour obtenir 4765. On double le nombre 26 de Q2 et on le place dans Q3 ; on obtient 52. À côté de ce 52 on place le plus grand chiffre $0 \leq \omega \leq 9$ tel que $52\omega \times \omega \leq 4765$. Le calcul nous mène vers le chiffre 9 (car $529 \times 9 = 4761$) ; on le place à côté du 26 dans Q2 pour faire 269. Le reste $R_3 = 4765 - 4761 = 4$ sera placé dans Q1 en dessous de 4765.

Étape IV

• Elle est similaire dans la démarche aux étapes II et III. Nous la laissons au soin du lecteur. On trouve donc à la fin la RCPD $x = 2690$ du nombre $a = 7236511$ avec comme reste $R = R_4 = 411$.

3. Algorithme général

C'est en décrivant cet algorithme de façon générale que nous allons voir comment se justifient toutes les recettes dont on fait usage sur les exemples numériques. Ces dernières nous ont été enseignées en premier cycle du secondaire, par cœur sans doute parce que nous n'avions pas suffisamment de bagage arithmétique pour comprendre le fond.

3.1. Supposons que le nombre a a $\ell = 2n$ chiffres $a_0, a_1, \cdots, a_{2n-1}$ (avec $a_{2n-1} \neq 0$) ou ou $\ell = 2n - 1$ chiffres $a_0, a_1, \cdots, a_{2n-2}$ (avec $a_{2n-2} \neq 0$). Dans l'écriture $a = a_{2n-1}a_{2n-2} \cdots a_1a_0$ ou $a = a_{2n-2} \cdots a_1a_0$ regroupons ces chiffres en blocs de deux à partir de la droite :

$$a = \begin{cases} (a_{2n-1}a_{2n-2})(a_{2n-3}a_{2n-4}) \cdots (a_3a_2)(a_1a_0) & \text{si } \ell = 2n \\ \\ (a_{2n-2})(a_{2n-3}a_{2n-4}) \cdots (a_3a_2)(a_1a_0) & \text{si } \ell = 2n - 1. \end{cases}$$

Posons $\xi_0 = a_1a_0$, $\xi_1 = a_3a_2, \cdots, \xi_{n-1} = a_{2n-1}a_{2n-2}$ ou $\xi_{n-1} = a_{2n-2}$.

Tous les calculs que nous allons faire auront pour but de montrer que pour tout $k = 1, \cdots, n-1$, l'entier s'écrivant $x_{n-1} \cdots x_{n-k}$ est la RCPD de l'entier s'écrivant $\xi_{n-1} \cdots \xi_{n-k}$. On peut déjà vérifier cela sur l'exemple numérique 2.1 que nous avons traité.

3.2. *Le chiffre x_{n-1} de la* RCPD x *du nombre a est la* RCPD *du nombre (à un ou deux chiffres) ξ_{n-1}.*

Preuve. Faisons d'abord une remarque. Avec les notations que nous avons choisies, le nombre a peut s'écrire $a = \xi_{n-1} \cdot 10^{2n-2} + \tau$ avec $\tau < 10^{2n-2}$. Si jamais on a une inégalité $\alpha \cdot 10^{2n-2} \leq \xi_{n-1} \cdot 10^{2n-2} + \tau$ pour un α tel que $1 \leq \alpha \leq 99$, alors on a nécessairement $\alpha \cdot 10^{2n-2} \leq \xi_{n-1} \cdot 10^{2n-2}$ *i.e.* $\alpha \leq \xi_{n-1}$ (le lecteur méditera là-dessus).

Continuons la preuve !

Comme $x = x_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + x_1 \cdot 10 + x_0$, on a :

$$x_{n-1} \cdot 10^{n-1} \leq x < (x_{n-1}+1) \cdot 10^{n-1}$$

(avec bien sûr $(x_{n-1}+1) \cdot 10^{n-1} = 10^n$ si jamais $x_{n-1} = 9$) et par suite :

$$x_{n-1} \cdot 10^{n-1} \leq x < x+1 \leq (x_{n-1}+1) \cdot 10^{n-1}.$$

Comme x est la RCPD de a, on a $x^2 \leq a < (x+1)^2$; ce qui implique :

$$x_{n-1}^2 \cdot 10^{2n-2} \leq x^2 \leq a < (x_{n-1}+1)^2 \cdot 10^{2n-2}.$$

Puisque $x_{n-1}^2 \cdot 10^{2n-2} \leq \xi_{n-1} \cdot 10^{2n-2} + \tau$ avec $\tau < 10^{2n-2}$ alors tenant compte de la remarque par laquelle on a débuté la preuve :

$$x_{n-1}^2 \cdot 10^{2n-2} \leq \xi_{n-1} \cdot 10^{2n-2} \leq a < (x_{n-1}+1)^2 \cdot 10^{2n-2}.$$

Après simplification par 10^{2n-2}, on obtient :

$$x_{n-1}^2 \leq \xi_{n-1} < (x_{n-1}+1)^2$$

ce qui est exactement ce qu'on cherche à démontrer : x_{n-1} est la RCPD de ξ_{n-1}. ◊

3.3. Suite de l'algorithme. Nous venons de voir comment déterminer le premier chiffre x_{n-1} du nombre x. Les autres s'obtiennent de proche en proche mais différemment. Supposons connus les $(k-1)$ premiers chiffres $x_{n-1}, \cdots, x_{n-k+1}$ et essayons de déterminer le $k^{\text{ème}}$ qui est le chiffre x_{n-k}.

Posons $X_{k-1} = x_{n-1} \cdots x_{n-k+1}$ (qui est le nombre $X_{k-1} = x_{n-1}10^{k-2} + \cdots + x_{n-k+2}10 + x_{n-k+1}$). Comme :

$$x = X_{k-1} \cdot 10^{n-k+1} + x_{n-k} \cdot 10^{n-k} + \eta \quad \text{avec} \quad \eta < 10^{n-k},$$

on a :

$$X_{k-1} \cdot 10^{n-k+1} + x_{n-k} \cdot 10^{n-k} \leq x < x+1 \leq X_{k-1} \cdot 10^{n-k+1} + (x_{n-k}+1) \cdot 10^{n-k}$$

ou encore :

$$(10X_{k-1} + x_{n-k}) \cdot 10^{n-k} \leq x < x+1 \leq (10X_{k-1} + x_{n-k} + 1) \cdot 10^{n-k}.$$

En élevant chaque membre au carré, on obtient :

$$(10X_{k-1} + x_{n-k})^2 \cdot 10^{2n-2k} \leq x^2 < (x+1)^2 \leq (10X_{k-1} + x_{n-k} + 1)^2 \cdot 10^{2n-2k}$$

ou encore, puisque x est RCPD de a :

$$(10X_{k-1} + x_{n-k})^2 \cdot 10^{2n-2k} \leq x^2 \leq a < (10X_{k-1} + x_{n-k} + 1)^2 \cdot 10^{2n-2k}.$$

D'autre part, on peut écrire a sous la forme :

$$a = (\xi_{n-1} \cdots \xi_{n-k}) \cdot 10^{2n-2k} + \gamma \quad \text{avec} \quad \gamma < 10^{2n-2k}.$$

D'où :

$$(10X_{k-1} + x_{n-k})^2 \cdot 10^{2n-2k} \leq (\xi_{n-1} \cdots \xi_{n-k})10^{2n-2k} + \gamma < (10X_{k-1} + x_{n-k} + 1)^2 \cdot 10^{2n-2k}.$$

Utilisant encore une fois la remarque par laquelle on a débuté la preuve dans 3.2 on obtient :

$$(10X_{k-1}+x_{n-k})^2\cdot 10^{2n-2k}\le(\xi_{n-1}\cdots\xi_{n-k})10^{2n-2k}<(10X_{k-1}+x_{n-k}+1)^2\cdot 10^{2n-2k}.$$

Après simplification par 10^{2n-2k} :

$$(10X_{k-1}+x_{n-k})^2\le Z_k<(10X_{k-1}+x_{n-k}+1)^2$$

où $Z_k=\xi_{n-1}\cdots\xi_{n-k}$. On en déduit que $10X_{k-1}+x_{n-k}$ (qui n'est rien d'autre que X_k) est la RCPD de l'entier $Z_k=\xi_{n-1}\cdots\xi_{n-k}$ et donc x_{n-k} est le plus grand nombre dans $\{0,1,\cdots,9\}$ tel que :

$$(10X_{k-1}+x_{n-k})^2\le Z_k,$$

c'est-à-dire (après calcul), x_{n-k} est le plus grand nombre dans $\{0,1,\cdots,9\}$ tel que :

$$(20X_{k-1}+x_{n-k})x_{n-k}\le Z_k-100X_{k-1}^2.$$

3.4. Question. *Comment extrait-on la* RCPD *de façon pratique* ?

• On a $a=a_{2n-1}a_{2n-2}\cdots a_3a_2a_1a_0$ ou $a=a_{2n-2}a_{2n-3}\cdots a_3a_2a_1a_0$.
On regroupe les chiffres en blocs de deux en commençant par la droite :

$$a=(a_{2n-1}a_{2n-2})(a_{2n-3}a_{2n-4})\cdots(a_3a_2)(a_1a_0)\quad\text{ou}\quad a=(a_{2n-2})(a_{2n-3}a_{2n-4})\cdots(a_3a_2)(a_1a_0).$$

Donc (avec les notations qu'on a adoptées) :

$$\xi_{n-1}=a_{2n-1}a_{2n-2}\text{ ou }\xi_{n-1}=a_{2n-2},\ \xi_{n-2}=a_{2n-3}a_{2n-4},\cdots,\xi_1=a_3a_2,\ \xi_0=a_1a_0.$$

On pose :

$$Z_k=\xi_{n-1}\cdots\xi_{n-k}\quad\text{et}\quad X_k=x_{n-1}\cdots x_{n-k}\quad\text{pour}\quad k=1,\cdots,n.$$

Le nombre Z_k a $2k$ ou $2k-1$ chiffres et X_k en a exactement k.

• Le chiffre x_{n-1} est la RCPD du nombre $1\le\xi_{n-1}\le 99$ (donc facile à déterminer). On a alors $X_1=x_{n-1}$, $Z_2=\xi_{n-1}\xi_{n-2}$ (et $Z_1=\xi_{n-1}$ dont on n'a plus besoin en fait).

• Le chiffre x_{n-2} est le plus grand entier $0\le\varepsilon\le 9$ tel que l'on ait :

$$\varepsilon(20X_1+\varepsilon)\le Z_2-100X_1^2.$$

On a ainsi déterminé $X_2=x_{n-1}x_{n-2}$. Continuons ! On a $Z_3=\xi_{n-1}\xi_{n-2}\xi_{n-3}$ et le chiffre x_{n-3} est le plus grand entier $0\le\varepsilon\le 9$ tel que l'on ait :

$$\varepsilon(20X_2+\varepsilon)\le Z_3-100X_2^2.$$

• Ainsi, de proche en proche et en suivant la même démarche, on détermine tous les chiffres $x_{n-1},\cdots,x_0$ qui permettent d'écrire (dans la base 10) la RCPD par défaut x de l'entier a. Regardons de façon concrète ce qui se passe sur :

4. Encore un exemple

Extraction de la racine carrée de $a=136540967$

On regroupe les chiffres par tranches de deux à partir de la droite $a = 1\ 36\ 54\ 09\ 67$. On a ainsi :

$$\xi_4 = 1,\ \ \xi_3 = 36,\ \ \xi_2 = 54,\ \ \xi_1 = 09,\ \ \xi_0 = 67.$$

Ceci nous dit déjà que l'écriture de la racine carrée x utilise exactement 5 chiffres *i.e.* $x = x_4x_3x_2x_1x_0$ avec $x_4 \neq 0$.

(∗) La racine carrée de $\xi_4 = 1$ est $x_4 = 1$. D'où $X_1 = x_4 = 1$ et donc :

$$Z_2 - 100X_1^2 = 136 - 100 \cdot 1^2 = 36.$$

(∗) Le plus grand entier $0 \leq \varepsilon \leq 9$ tel que $\varepsilon(20.1 + \varepsilon) \leq 36$ est $x_3 = 1$. Par suite $X_2 = 11$.

(∗) On a $Z_3 = 13654$ et $X_2 = 11$. D'où $Z_3 - 100X_2^2 = 13654 - 100 \cdot 11^2 = 1554$. Le plus grand entier $0 \leq \varepsilon \leq 9$ tel que : $\varepsilon(20.11 + \varepsilon) \leq 1554$ est $x_2 = 6$. Par suite $X_3 = 116$.

(∗) On a $Z_4 = 1365409$ et $X_3 = 116$. D'où $Z_4 - 100X_3^2 = 1365409 - 100 \cdot 116^2 = 19809$. Le plus grand entier $0 \leq \varepsilon \leq 9$ tel que : $\varepsilon(20.116 + \varepsilon) \leq 19809$ est $x_1 = 8$. Par suite $X_4 = 1168$.

(∗) On a $Z_5 = 136540967$ et $X_4 = 1168$. D'où $Z_5 - 100X_4^2 = 136540967 - 100 \cdot 1168^2 = 118567$. Le plus grand entier $0 \leq \varepsilon \leq 9$ tel que : $\varepsilon(20.1168 + \varepsilon) \leq 118567$ est $x_0 = 5$.

La RCPD de $a = 136540967$ est donc $x = 11685$. On vérifie facilement la double inégalité :

$$x^2 = (11685)^2 = 136539225 \leq a = 136540967 < (11686)^2 = 136562596 = (x+1)^2.$$

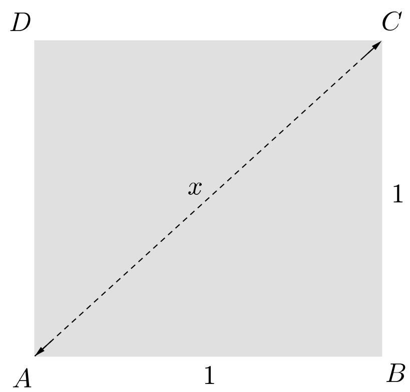
5. Extraction de la racine carrée à 10^{-k} près

Sur l'exemple qu'on vient de traiter on voit que le reste $R = a - x^2 = 1742$ est quand même grand. On pourrait donc avoir besoin de se rapprocher plus de a ; x ne sera plus un entier mais un nombre décimal. On considère alors le nombre $A = a \cdot 10^{2k}$; on en extrait la RCPD X comme on vient de le faire. Ensuite on prend $x = X \cdot 10^{-k}$ et on obtient ainsi la racine carrée par défaut de a à un $\frac{1}{10^k}$ près. Examinons quelques exemples.

5.1. La racine carrée de 2 à 1/1000 près

Le nombre $\sqrt{2}$ a plongé l'humanité dans l'irrationalité !

Nombre rationnel signifie un nombre qu'on peut «compter», c'est-à-dire qu'on peut écrire sous forme d'une fraction $\frac{a}{b}$ avec a et b des entiers naturels ($b \neq 0$). Déjà à une époque très ancienne on savait qu'une longueur représente un «nombre». Mais lequel ? Dans la tête des gens cela ne pouvait être qu'un rationnel. Il a fallu bien regarder ce que dit le *Théorème de Pythagore* appliqué à un carré de côté 1 pour tomber dans la confusion. (Mais ce fut une confusion féconde : elle a donné naissance aux nombres réels !)



Le théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle ABC donne : $AC^2 = AB^2 + BC^2$, c'est-à-dire $x^2 = 2$.

Quel est donc ce nombre x dont le carré vaut 2 ? On peut montrer (un exercice facile) qu'il n'existe aucun couple $(a, b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ tel que $x = \frac{a}{b}$. Il sortait de l'ordinaire et a été donc qualifié d'*irrationnel*. Toutefois on peut en donner une approximation décimale aussi précise que souhaitée à l'aide de l'algorithme d'extraction de la RCPD. Mettons la machine en marche !

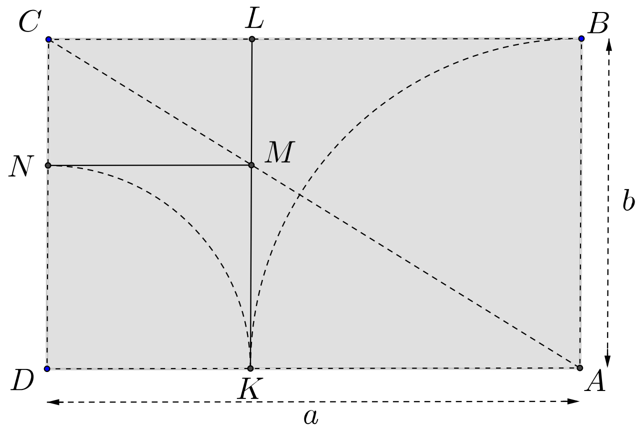
On cherche en fait la RCPD du nombre entier $A = 2.10^6 = 2.000.000$ qu'on divise ensuite par 1.000 pour avoir notre résultat. Les calculs sont résumés ci-dessous.

2.00.00.00	1414
1.00	
4.00	$24 \times 4 = 96$
1.19.00	$281 \times 1 = 281$
6.04	$2824 \times 4 = 11296$

La racine carrée de 2 à 1/1000 près est donc $x = \frac{1.414}{1.000} = 1,414$. $\square$

5.2. Valeur approchée du nombre d'or

Soit $\mathcal{R} = ABCD$ un rectangle de largeur $b > 0$ et de longueur $a > b$. On le coupe en un carré $ABLK$ de côté b et un rectangle $LCDK$ de longueur b et de largeur $a - b$ (*cf.* dessin ci-dessous).



On dira que $\mathcal{R}$ est un *rectangle d'or* s'il est semblable au rectangle $CDKL$ (et donc aussi à $MLCN$ si on répète l'opération...). Cela signifie que les côtés des deux rectangles $\mathcal{R}$ et $CDKL$ sont proportionnels, c'est-à-dire : $\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$. Ce qui donne l'égalité $a^2 = ab + b^2$. On posant $x = \frac{a}{b}$ on arrive à l'équation du second degré $x^2 = x + 1$ dont la solution positive est $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ce nombre est habituellement noté Φ et appelé *nombre d'or*. Sa valeur approchée à 1/1000 passe évidemment par l'extraction de la racine carrée (à 1/1000 près) de 5 qu'on sait faire. On trouve $\Phi = 1,618$. $\square$

Université Polytechnique Hauts-de-France
DMATHS-CERAMATHS
F-59313 Valenciennes Cedex 9 - FRANCE

aziz.elkacimi@uphf.fr

http://perso.numericable.fr/azizelkacimi/