

# *Le feuilletage aire-périmètre sur l'espace des triangles*

AZIZ EL KACIMI

LAMAV - Université de Valenciennes

Exposé au Groupe de travail en géométrie

Lundi 9 février 2015

## On se situe dans un espace euclidien.

Soit  $ABC$  un triangle. Peut-on le déformer en un autre triangle  $A'B'C'$  tel que les conditions qui suivent soient satisfaites ?

- 1  $ABC$  et  $A'B'C'$  ne sont pas isométriques.
- 2  $ABC$  et  $A'B'C'$  ont même périmètre.
- 3  $ABC$  et  $A'B'C'$  ont même aire.

C'est une formulation générale d'une question que **Geoffrey Letellier**, étudiant à Lille I, a posée à son enseignant **Valerio Vassallo** et qui me l'a posée à son tour. C'est ce qui m'a amené à la construction de ce feuilletage.

## On se situe dans un espace euclidien.

Soit  $ABC$  un triangle. Peut-on le déformer en un autre triangle  $A'B'C'$  tel que les conditions qui suivent soient satisfaites ?

- ①  $ABC$  et  $A'B'C'$  ne sont pas isométriques.
- ②  $ABC$  et  $A'B'C'$  ont même périmètre.
- ③  $ABC$  et  $A'B'C'$  ont même aire.

C'est une formulation générale d'une question que Geoffrey Letellier, étudiant à Lille I, a posée à son enseignant Valerio Vassallo et qui me l'a posée à son tour. C'est ce qui m'a amené à la construction de ce feuilletage.

## On se situe dans un espace euclidien.

Soit  $ABC$  un triangle. Peut-on le déformer en un autre triangle  $A'B'C'$  tel que les conditions qui suivent soient satisfaites ?

- 1  $ABC$  et  $A'B'C'$  ne sont pas isométriques.
- 2  $ABC$  et  $A'B'C'$  ont même périmètre.
- 3  $ABC$  et  $A'B'C'$  ont même aire.

C'est une formulation générale d'une question que Geoffrey Letellier, étudiant à Lille I, a posée à son enseignant Valerio Vassallo et qui me l'a posée à son tour. C'est ce qui m'a amené à la construction de ce feuilletage.

## On se situe dans un espace euclidien.

Soit  $ABC$  un triangle. Peut-on le déformer en un autre triangle  $A'B'C'$  tel que les conditions qui suivent soient satisfaites ?

- 1  $ABC$  et  $A'B'C'$  ne sont pas isométriques.
- 2  $ABC$  et  $A'B'C'$  ont même périmètre.
- 3  $ABC$  et  $A'B'C'$  ont même aire.

C'est une formulation générale d'une question que Geoffrey Letellier, étudiant à Lille I, a posée à son enseignant Valerio Vassallo et qui me l'a posée à son tour. C'est ce qui m'a amené à la construction de ce feuilletage.

## On se situe dans un espace euclidien.

Soit  $ABC$  un triangle. Peut-on le déformer en un autre triangle  $A'B'C'$  tel que les conditions qui suivent soient satisfaites ?

- 1  $ABC$  et  $A'B'C'$  ne sont pas isométriques.
- 2  $ABC$  et  $A'B'C'$  ont même périmètre.
- 3  $ABC$  et  $A'B'C'$  ont même aire.

C'est une formulation générale d'une question que Geoffrey Letellier, étudiant à Lille I, a posée à son enseignant Valerio Vassallo et qui me l'a posée à son tour. C'est ce qui m'a amené à la construction de ce feuilletage.

## On se situe dans un espace euclidien.

Soit  $ABC$  un triangle. Peut-on le déformer en un autre triangle  $A'B'C'$  tel que les conditions qui suivent soient satisfaites ?

- 1  $ABC$  et  $A'B'C'$  ne sont pas isométriques.
- 2  $ABC$  et  $A'B'C'$  ont même périmètre.
- 3  $ABC$  et  $A'B'C'$  ont même aire.

C'est une formulation générale d'une question que **Geoffrey Letellier**, étudiant à Lille I, a posée à son enseignant **Valerio Vassallo** et qui me l'a posée à son tour. C'est ce qui m'a amené à la construction de ce feuilletage.

# 1. Préliminaires

## 1.1. L'espace des triangles

Se donner un triangle (dans n'importe quel espace euclidien, de dimension finie ou non), c'est se donner trois nombres réels positifs ou nuls  $x$ ,  $y$  et  $z$ , tels que :

$$(1) \quad \begin{cases} x \leq y + z \\ y \leq z + x \\ z \leq x + y \end{cases}$$

représentant les mesures des côtés.

On adoptera la notation  $\langle xyz \rangle$  pour la distinguer de celle qu'on utilise habituellement :  $XYZ$  où les points  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  sont les sommets.

# 1. Préliminaires

## 1.1. L'espace des triangles

Se donner un triangle (dans n'importe quel espace euclidien, de dimension finie ou non), c'est se donner trois nombres réels positifs ou nuls  $x$ ,  $y$  et  $z$ , tels que :

$$(1) \quad \begin{cases} x \leq y + z \\ y \leq z + x \\ z \leq x + y \end{cases}$$

représentant les mesures des côtés.

On adoptera la notation  $\langle xyz \rangle$  pour la distinguer de celle qu'on utilise habituellement :  $XYZ$  où les points  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  sont les sommets.

# 1. Préliminaires

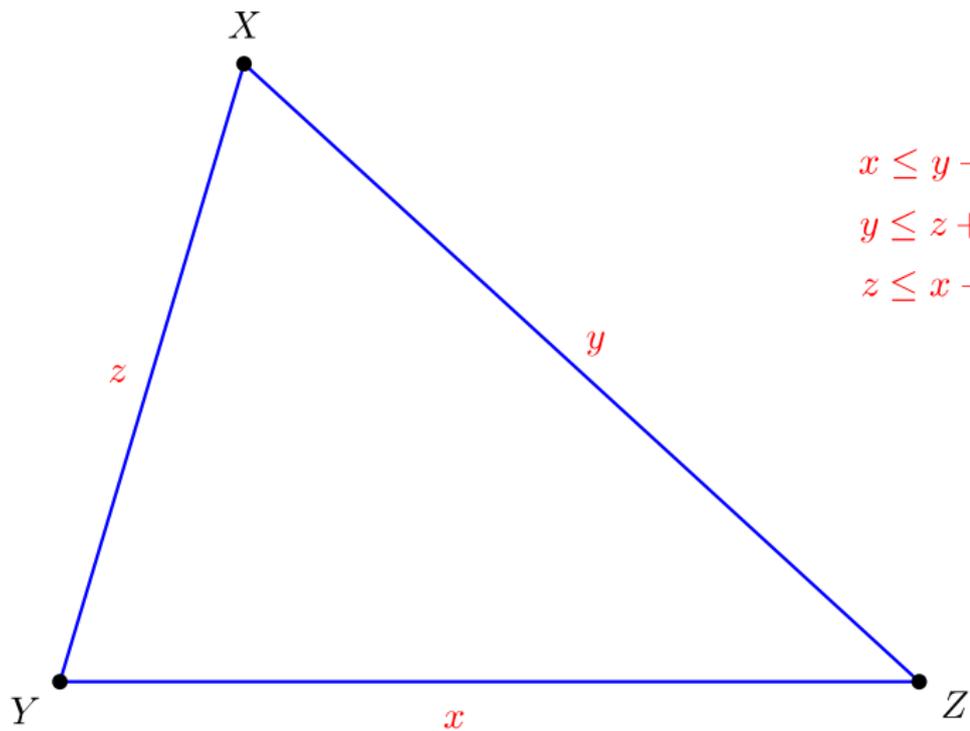
## 1.1. L'espace des triangles

Se donner un triangle (dans n'importe quel espace euclidien, de dimension finie ou non), c'est se donner trois nombres réels positifs ou nuls  $x$ ,  $y$  et  $z$ , tels que :

$$(1) \quad \begin{cases} x \leq y + z \\ y \leq z + x \\ z \leq x + y \end{cases}$$

représentant les mesures des côtés.

On adoptera la notation  $\langle xyz \rangle$  pour la distinguer de celle qu'on utilise habituellement :  $XYZ$  où les points  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  sont les sommets.



$$x \leq y + z$$

$$y \leq z + x$$

$$z \leq x + y$$

On sait en effet (premier cas d'égalité, comme on dit dans le temps) que  $\langle xyz \rangle$  est isométrique à  $\langle x'y'z' \rangle$  si

$$x = x', \quad y = y', \quad z = z'.$$

(Pour le moment on fera la différence entre un triangle et un autre obtenu par permutation des trois nombres qui le représentent même si, géométriquement, ils sont les mêmes!) Dans toute la suite,  $\lambda$  sera le demi-périmètre :

$$\lambda = \frac{x + y + z}{2}.$$

On sait en effet (premier cas d'égalité, comme on dit dans le temps) que  $\langle xyz \rangle$  est isométrique à  $\langle x'y'z' \rangle$  si

$$x = x', \quad y = y', \quad z = z'.$$

(Pour le moment on fera la différence entre un triangle et un autre obtenu par permutation des trois nombres qui le représentent même si, géométriquement, ils sont les mêmes!)

Dans toute la suite,  $\lambda$  sera le demi-périmètre :

$$\lambda = \frac{x + y + z}{2}.$$

On sait en effet (premier cas d'égalité, comme on dit dans le temps) que  $\langle xyz \rangle$  est isométrique à  $\langle x'y'z' \rangle$  si

$$x = x', \quad y = y', \quad z = z'.$$

(Pour le moment on fera la différence entre un triangle et un autre obtenu par permutation des trois nombres qui le représentent même si, géométriquement, ils sont les mêmes!) Dans toute la suite,  $\lambda$  sera le demi-périmètre :

$$\lambda = \frac{x + y + z}{2}.$$

L'ensemble des triangles  $\mathfrak{T}$  est ainsi une partie de  $\mathbb{R}_+^3$ .  
Décrivons-la explicitement. Aux inégalités (1) sont associées  
trois équations définissant respectivement trois plans :

$$(2) \quad \begin{cases} \Sigma_1 = \{x = y + z\} \\ \Sigma_2 = \{y = z + x\} \\ \Sigma_3 = \{z = x + y\} \end{cases} .$$

Sur la tranche  $\{x + y + z = 2\lambda\}$  de  $\mathbb{R}_+^3$ ,  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  et  $\Sigma_3$  délimitent  
un triangle équilatéral dans  $\mathbb{R}_+^3$  dont les sommets sont  
 $X_\lambda = (0, \lambda, \lambda)$ ,  $Y_\lambda = (\lambda, 0, \lambda)$  et  $Z_\lambda = (\lambda, \lambda, 0)$ ; l'enveloppe  
convexe  $P_\lambda$  (triangle plein) de ces trois points (le triangle  
 $X_\lambda Y_\lambda Z_\lambda$  et son intérieur) représente l'espace des triangles  $\langle xyz \rangle$   
de périmètre  $2\lambda$ .

L'ensemble des triangles  $\mathfrak{T}$  est ainsi une partie de  $\mathbb{R}_+^3$ .  
Décrivons-la explicitement. Aux inégalités (1) sont associées  
trois équations définissant respectivement trois plans :

$$(2) \quad \begin{cases} \Sigma_1 = \{x = y + z\} \\ \Sigma_2 = \{y = z + x\} \\ \Sigma_3 = \{z = x + y\} \end{cases} .$$

Sur la tranche  $\{x + y + z = 2\lambda\}$  de  $\mathbb{R}_+^3$ ,  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  et  $\Sigma_3$  délimitent  
un triangle équilatéral dans  $\mathbb{R}_+^3$  dont les sommets sont  
 $X_\lambda = (0, \lambda, \lambda)$ ,  $Y_\lambda = (\lambda, 0, \lambda)$  et  $Z_\lambda = (\lambda, \lambda, 0)$ ; l'enveloppe  
convexe  $P_\lambda$  (triangle plein) de ces trois points (le triangle  
 $X_\lambda Y_\lambda Z_\lambda$  et son intérieur) représente l'espace des triangles  $\langle xyz \rangle$   
de périmètre  $2\lambda$ .

L'ensemble des triangles  $\mathfrak{T}$  est ainsi une partie de  $\mathbb{R}_+^3$ .  
Décrivons-la explicitement. Aux inégalités (1) sont associées  
trois équations définissant respectivement trois plans :

$$(2) \quad \begin{cases} \Sigma_1 = \{x = y + z\} \\ \Sigma_2 = \{y = z + x\} \\ \Sigma_3 = \{z = x + y\} \end{cases} .$$

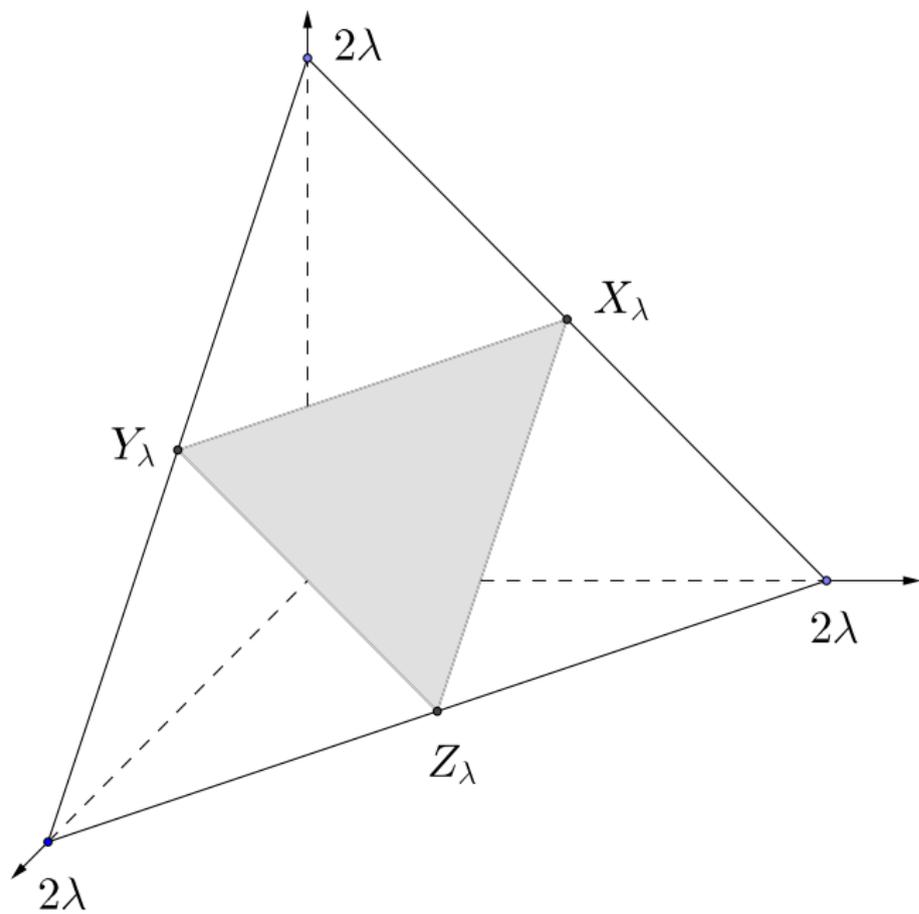
Sur la tranche  $\{x + y + z = 2\lambda\}$  de  $\mathbb{R}_+^3$ ,  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  et  $\Sigma_3$  délimitent  
un triangle équilatéral dans  $\mathbb{R}_+^3$  dont les sommets sont  
 $X_\lambda = (0, \lambda, \lambda)$ ,  $Y_\lambda = (\lambda, 0, \lambda)$  et  $Z_\lambda = (\lambda, \lambda, 0)$ ; l'enveloppe  
convexe  $P_\lambda$  (triangle plein) de ces trois points (le triangle  
 $X_\lambda Y_\lambda Z_\lambda$  et son intérieur) représente l'espace des triangles  $\langle xyz \rangle$   
de périmètre  $2\lambda$ .

Quand on fait varier  $\lambda$  en  $\lambda'$ , on obtient un autre triangle plein  $P_{\lambda'}$ , transformé de  $P_{\lambda}$  par l'homothétie de centre l'origine et de rapport  $k = \frac{\lambda'}{\lambda}$ . Ainsi, l'espace  $\mathfrak{T}$  est *feuilleté* par ces triangles;  $\mathfrak{T}$  est en fait le cône de sommet l'origine et de base n'importe lequel de ces triangles pleins  $P_{\lambda}$ , par exemple  $P_1$  :

$$(3) \quad \mathfrak{T} = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}_+} \lambda P_1 = \{\lambda X : X \in P_1 \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}_+\}.$$

Quand on fait varier  $\lambda$  en  $\lambda'$ , on obtient un autre triangle plein  $P_{\lambda'}$ , transformé de  $P_{\lambda}$  par l'homothétie de centre l'origine et de rapport  $k = \frac{\lambda'}{\lambda}$ . Ainsi, l'espace  $\mathfrak{T}$  est *feuilleté* par ces triangles;  $\mathfrak{T}$  est en fait le cône de sommet l'origine et de base n'importe lequel de ces triangles pleins  $P_{\lambda}$ , par exemple  $P_1$  :

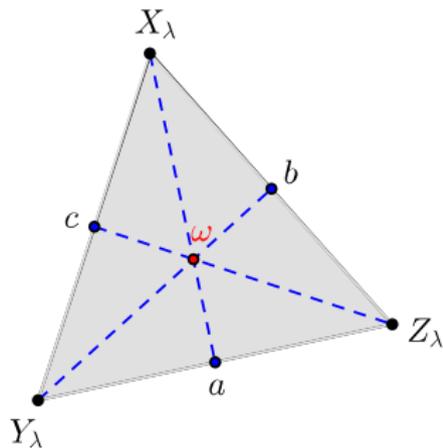
$$(3) \quad \mathfrak{T} = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}_+} \lambda P_1 = \{\lambda X : X \in P_1 \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}_+\}.$$



- Segment  $[X_\lambda Y_\lambda] : z = x + y$   
 $X_\lambda \quad y \quad Z_\lambda \quad x \quad Y_\lambda$   

- Point  $c : z = \lambda, x = \lambda/2, y = \lambda/2$   
 $X_\lambda \quad Z_\lambda \quad Y_\lambda$   

- Segment  $[Z_\lambda c] : \text{Triangles isocèles}$   
 $x = y$
- Point  $\omega : \text{Triangle équilatéral}$



Pour une situation particulière qui va apparaître par la suite, nous aurons besoin du lemme ci-dessous donnant la nature du triangle qui maximise l'aire quand le périmètre est prescrit.

**1.2. Lemme.** *On se donne une famille de triangles  $ABC$  ayant tous le même périmètre  $2\lambda$ . Parmi tous ces triangles, celui qui maximise l'aire est le triangle équilatéral.*

**Preuve.** Fixons la base  $BC$  et posons  $q = 2\lambda - BC$ ;  $q$  est une constante et  $A$  se balade de façon à ce que  $AB + AC = q$ , donc il est sur l'ellipse de foyers  $B$  et  $C$  et de grand axe  $q$ . L'aire de  $ABC$  est maximale lorsque la hauteur issue de  $A$  l'est, c'est-à-dire lorsque  $ABC$  est isocèle.

Pour une situation particulière qui va apparaître par la suite, nous aurons besoin du lemme ci-dessous donnant la nature du triangle qui maximise l'aire quand le périmètre est prescrit.

**1.2. Lemme.** *On se donne une famille de triangles  $ABC$  ayant tous le même périmètre  $2\lambda$ . Parmi tous ces triangles, celui qui maximise l'aire est le triangle équilatéral.*

**Preuve.** Fixons la base  $BC$  et posons  $q = 2\lambda - BC$ ;  $q$  est une constante et  $A$  se balade de façon à ce que  $AB + AC = q$ , donc il est sur l'ellipse de foyers  $B$  et  $C$  et de grand axe  $q$ . L'aire de  $ABC$  est maximale lorsque la hauteur issue de  $A$  l'est, c'est-à-dire lorsque  $ABC$  est isocèle.

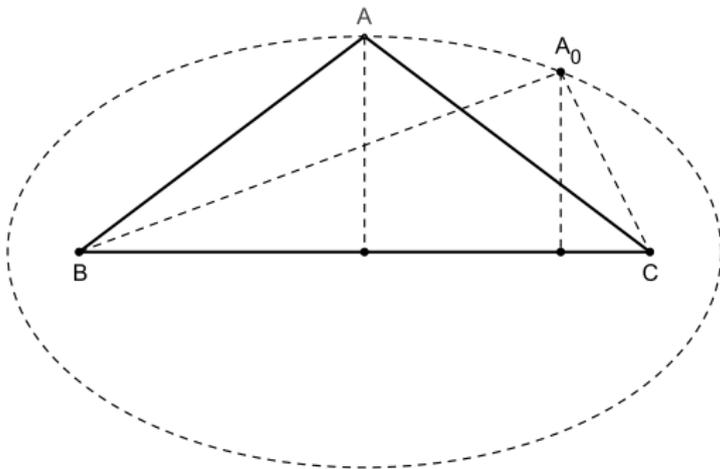
Pour une situation particulière qui va apparaître par la suite, nous aurons besoin du lemme ci-dessous donnant la nature du triangle qui maximise l'aire quand le périmètre est prescrit.

**1.2. Lemme.** *On se donne une famille de triangles  $ABC$  ayant tous le même périmètre  $2\lambda$ . Parmi tous ces triangles, celui qui maximise l'aire est le triangle équilatéral.*

**Preuve.** Fixons la base  $BC$  et posons  $q = 2\lambda - BC$ ;  $q$  est une constante et  $A$  se balade de façon à ce que  $AB + AC = q$ , donc il est sur l'ellipse de foyers  $B$  et  $C$  et de grand axe  $q$ . L'aire de  $ABC$  est maximale lorsque la hauteur issue de  $A$  l'est, c'est-à-dire lorsque  $ABC$  est isocèle.

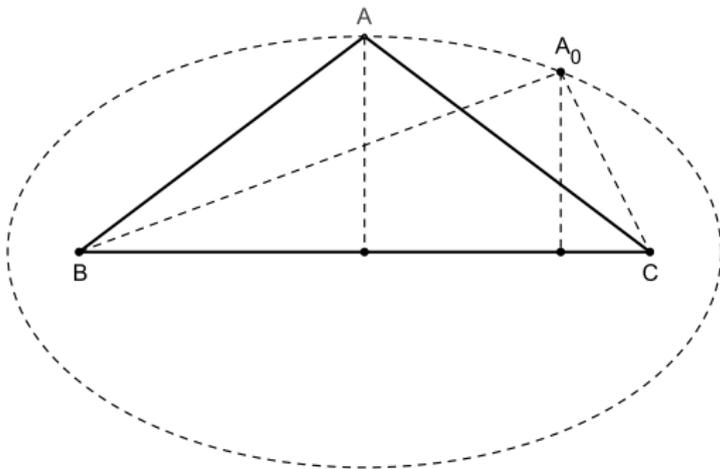
**Affirmation.** Si  $ABC$  n'est pas équilatéral, il ne peut pas maximiser l'aire.

En effet, il aura deux côtés non égaux, disons  $A_0B$  et  $A_0C$ . Si on fixe  $BC$ , le triangle  $A_0BC$  a une aire strictement inférieure à celle du triangle dont le sommet  $A$  est celui de l'ellipse ci-dessous. Ce qui démontre le lemme.



**Affirmation.** Si  $ABC$  n'est pas équilatéral, il ne peut pas maximiser l'aire.

En effet, il aura deux côtés non égaux, disons  $A_0B$  et  $A_0C$ . Si on fixe  $BC$ , le triangle  $A_0BC$  a une aire strictement inférieure à celle du triangle dont le sommet  $A$  est celui de l'ellipse ci-dessous. Ce qui démontre le lemme.



## 2. Deux feuilletages sur $\mathfrak{T}$

### 2.1. Le feuilletage périmètre $\mathcal{P}$

Chacune de ses feuilles  $P_\lambda$  (où  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ) est définie par l'équation  $p(x, y, z) = 2\lambda$  où  $p$  est la fonction périmètre :

$$p(x, y, z) = x + y + z.$$

Nous avons déjà vu que la surface de niveau  $P_\lambda$  est l'enveloppe convexe du triangle  $X_\lambda Y_\lambda Z_\lambda$ . Lorsque  $\lambda = 0$ ,  $P_0$  est le point  $(0, 0, 0)$  de  $\mathbb{R}_+^3$ .

Nous avons donc un feuilletage  $\mathcal{P}$  singulier sur  $\mathfrak{T}$  dont les feuilles régulières sont les surfaces  $P_\lambda$  ( $\lambda > 0$ ). Évidemment, en dehors de  $P_0$ ,  $\mathcal{P}$  est trivial puisque isomorphe au feuilletage produit  $P_1 \times \mathbb{R}_+^*$ .

## 2. Deux feuilletages sur $\mathfrak{T}$

### 2.1. Le feuilletage périmètre $\mathcal{P}$

Chacune de ses feuilles  $P_\lambda$  (où  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ) est définie par l'équation  $p(x, y, z) = 2\lambda$  où  $p$  est la fonction périmètre :

$$p(x, y, z) = x + y + z.$$

Nous avons déjà vu que la surface de niveau  $P_\lambda$  est l'enveloppe convexe du triangle  $X_\lambda Y_\lambda Z_\lambda$ . Lorsque  $\lambda = 0$ ,  $P_0$  est le point  $(0, 0, 0)$  de  $\mathbb{R}_+^3$ .

Nous avons donc un feuilletage  $\mathcal{P}$  singulier sur  $\mathfrak{T}$  dont les feuilles régulières sont les surfaces  $P_\lambda$  ( $\lambda > 0$ ). Évidemment, en dehors de  $P_0$ ,  $\mathcal{P}$  est trivial puisque isomorphe au feuilletage produit  $P_1 \times \mathbb{R}_+^*$ .

## 2. Deux feuilletages sur $\mathfrak{T}$

### 2.1. Le feuilletage périmètre $\mathcal{P}$

Chacune de ses feuilles  $P_\lambda$  (où  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ) est définie par l'équation  $\rho(x, y, z) = 2\lambda$  où  $\rho$  est la fonction périmètre :

$$\rho(x, y, z) = x + y + z.$$

Nous avons déjà vu que la surface de niveau  $P_\lambda$  est l'enveloppe convexe du triangle  $X_\lambda Y_\lambda Z_\lambda$ . Lorsque  $\lambda = 0$ ,  $P_0$  est le point  $(0, 0, 0)$  de  $\mathbb{R}_+^3$ .

Nous avons donc un feuilletage  $\mathcal{P}$  singulier sur  $\mathfrak{T}$  dont les feuilles régulières sont les surfaces  $P_\lambda$  ( $\lambda > 0$ ). Évidemment, en dehors de  $P_0$ ,  $\mathcal{P}$  est trivial puisque isomorphe au feuilletage produit  $P_1 \times \mathbb{R}_+^*$ .

## 2. Deux feuilletages sur $\mathfrak{T}$

### 2.1. Le feuilletage périmètre $\mathcal{P}$

Chacune de ses feuilles  $P_\lambda$  (où  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ) est définie par l'équation  $\rho(x, y, z) = 2\lambda$  où  $\rho$  est la fonction périmètre :

$$\rho(x, y, z) = x + y + z.$$

Nous avons déjà vu que la surface de niveau  $P_\lambda$  est l'enveloppe convexe du triangle  $X_\lambda Y_\lambda Z_\lambda$ . Lorsque  $\lambda = 0$ ,  $P_0$  est le point  $(0, 0, 0)$  de  $\mathbb{R}_+^3$ .

Nous avons donc un feuilletage  $\mathcal{P}$  singulier sur  $\mathfrak{T}$  dont les feuilles régulières sont les surfaces  $P_\lambda$  ( $\lambda > 0$ ). Évidemment, en dehors de  $P_0$ ,  $\mathcal{P}$  est trivial puisque isomorphe au feuilletage produit  $P_1 \times \mathbb{R}_+^*$ .

## 2. Deux feuilletages sur $\mathfrak{T}$

### 2.1. Le feuilletage périmètre $\mathcal{P}$

Chacune de ses feuilles  $P_\lambda$  (où  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ) est définie par l'équation  $\rho(x, y, z) = 2\lambda$  où  $\rho$  est la fonction périmètre :

$$\rho(x, y, z) = x + y + z.$$

Nous avons déjà vu que la surface de niveau  $P_\lambda$  est l'enveloppe convexe du triangle  $X_\lambda Y_\lambda Z_\lambda$ . Lorsque  $\lambda = 0$ ,  $P_0$  est le point  $(0, 0, 0)$  de  $\mathbb{R}_+^3$ .

Nous avons donc un feuilletage  $\mathcal{P}$  singulier sur  $\mathfrak{T}$  dont les feuilles régulières sont les surfaces  $P_\lambda$  ( $\lambda > 0$ ). Évidemment, en dehors de  $P_0$ ,  $\mathcal{P}$  est trivial puisque isomorphe au feuilletage produit  $P_1 \times \mathbb{R}_+^*$ .

## 2.2. Le feuilletage aire $\mathcal{A}$

Soit  $a : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$  la fonction qui au triangle  $\langle xyz \rangle$  associe son aire. Analytiquement, elle est donnée par la formule de Héron :

$$(4) \quad a = \frac{1}{4} \sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}.$$

Le feuilletage  $\mathcal{A}$  qui nous intéressera sera celui dont les feuilles sont les surfaces de niveau de cette fonction. On peut déjà voir que la feuille  $a(x, y, z) = 0$  est le cône fermé de base les côtés du triangle  $P_1 = X_1 Y_1 Z_1$ . Ceci étant réglé, on ne travaillera plus que sur l'intérieur de  $\mathfrak{T}$  qui est l'ouvert  $\Omega = \mathfrak{T} \cap (\mathbb{R}_+^*)^3$ . Nous regarderons donc la fonction  $a : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ .

## 2.2. Le feuilletage aire $\mathcal{A}$

Soit  $a : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$  la fonction qui au triangle  $\langle xyz \rangle$  associe son aire. Analytiquement, elle est donnée par la formule de Héron :

$$(4) \quad a = \frac{1}{4} \sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}.$$

Le feuilletage  $\mathcal{A}$  qui nous intéressera sera celui dont les feuilles sont les surfaces de niveau de cette fonction. On peut déjà voir que la feuille  $a(x, y, z) = 0$  est le cône fermé de base les côtés du triangle  $P_1 = X_1 Y_1 Z_1$ . Ceci étant réglé, on ne travaillera plus que sur l'intérieur de  $\mathfrak{T}$  qui est l'ouvert  $\Omega = \mathfrak{T} \cap (\mathbb{R}_+^*)^3$ . Nous regarderons donc la fonction  $a : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ .

## 2.2. Le feuilletage aire $\mathcal{A}$

Soit  $a : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$  la fonction qui au triangle  $\langle xyz \rangle$  associe son aire. Analytiquement, elle est donnée par la formule de Héron :

$$(4) \quad a = \frac{1}{4} \sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}.$$

Le feuilletage  $\mathcal{A}$  qui nous intéressera sera celui dont les feuilles sont les surfaces de niveau de cette fonction. On peut déjà voir que la feuille  $a(x, y, z) = 0$  est le cône fermé de base les côtés du triangle  $P_1 = X_1 Y_1 Z_1$ . Ceci étant réglé, on ne travaillera plus que sur l'intérieur de  $\mathfrak{T}$  qui est l'ouvert  $\Omega = \mathfrak{T} \cap (\mathbb{R}_+^*)^3$ . Nous regarderons donc la fonction  $a : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ .

Soit  $a : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$  la fonction qui au triangle  $\langle xyz \rangle$  associe son aire. Analytiquement, elle est donnée par la formule de Héron :

$$(4) \quad a = \frac{1}{4} \sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}.$$

• La surface de niveau  $s$  de la fonction  $a$  sur l'ouvert  $\Omega$  est exactement celle de niveau  $s^2$  de la fonction  $\Phi = a^2$ . L'avantage de travailler avec  $\Phi$  plutôt qu'avec  $a$  est qu'il n'y a plus de racine carrée, ce qui simplifie les calculs, entre autres celui de la différentielle qui joue un rôle fondamental. On considère donc la fonction :

$$(5) \quad \Phi(x, y, z) = \frac{1}{16} (x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z).$$

Soit  $a : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$  la fonction qui au triangle  $\langle xyz \rangle$  associe son aire. Analytiquement, elle est donnée par la formule de Héron :

$$(4) \quad a = \frac{1}{4} \sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}.$$

• La surface de niveau  $s$  de la fonction  $a$  sur l'ouvert  $\Omega$  est exactement celle de niveau  $s^2$  de la fonction  $\Phi = a^2$ . L'avantage de travailler avec  $\Phi$  plutôt qu'avec  $a$  est qu'il n'y a plus de racine carrée, ce qui simplifie les calculs, entre autres celui de la différentielle qui joue un rôle fondamental. On considère donc la fonction :

$$(5) \quad \Phi(x, y, z) = \frac{1}{16} (x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z).$$

Soit  $a : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$  la fonction qui au triangle  $\langle xyz \rangle$  associe son aire. Analytiquement, elle est donnée par la formule de Héron :

$$(4) \quad a = \frac{1}{4} \sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}.$$

• La surface de niveau  $s$  de la fonction  $a$  sur l'ouvert  $\Omega$  est exactement celle de niveau  $s^2$  de la fonction  $\Phi = a^2$ . L'avantage de travailler avec  $\Phi$  plutôt qu'avec  $a$  est qu'il n'y a plus de racine carrée, ce qui simplifie les calculs, entre autres celui de la différentielle qui joue un rôle fondamental. On considère donc la fonction :

$$(5) \quad \Phi(x, y, z) = \frac{1}{16} (x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z).$$

Soit  $a : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$  la fonction qui au triangle  $\langle xyz \rangle$  associe son aire. Analytiquement, elle est donnée par la formule de Héron :

$$(4) \quad a = \frac{1}{4} \sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}.$$

• La surface de niveau  $s$  de la fonction  $a$  sur l'ouvert  $\Omega$  est exactement celle de niveau  $s^2$  de la fonction  $\Phi = a^2$ . L'avantage de travailler avec  $\Phi$  plutôt qu'avec  $a$  est qu'il n'y a plus de racine carrée, ce qui simplifie les calculs, entre autres celui de la différentielle qui joue un rôle fondamental. On considère donc la fonction :

$$(5) \quad \Phi(x, y, z) = \frac{1}{16} (x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z).$$

Soit  $a : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$  la fonction qui au triangle  $\langle xyz \rangle$  associe son aire. Analytiquement, elle est donnée par la formule de Héron :

$$(4) \quad a = \frac{1}{4} \sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}.$$

• La surface de niveau  $s$  de la fonction  $a$  sur l'ouvert  $\Omega$  est exactement celle de niveau  $s^2$  de la fonction  $\Phi = a^2$ . L'avantage de travailler avec  $\Phi$  plutôt qu'avec  $a$  est qu'il n'y a plus de racine carrée, ce qui simplifie les calculs, entre autres celui de la différentielle qui joue un rôle fondamental. On considère donc la fonction :

$$(5) \quad \Phi(x, y, z) = \frac{1}{16} (x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z).$$

- La différentielle de  $\Phi$  s'écrit  $d\Phi = \frac{1}{16}\{Adx + Bdy + Cdz\}$  où  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont les fonctions données comme suit :

$$(6) \quad \begin{aligned} A(x, y, z) = & (-x + y + z)(x - y + z)(x + y - z) \\ & - (x + y + z)(x - y + z)(x + y - z) \\ & + (x + y + z)(-x + y + z)(x + y - z) \\ & + (x + y + z)(-x + y + z)(x - y + z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(x, y, z) = & (-x + y + z)(x - y + z)(x + y - z) \\ & + (x + y + z)(x - y + z)(x + y - z) \\ & - (x + y + z)(-x + y + z)(x + y - z) \\ & + (x + y + z)(-x + y + z)(x - y + z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(x, y, z) = & (-x + y + z)(x - y + z)(x + y - z) \\ & + (x + y + z)(x - y + z)(x + y - z) \\ & + (x + y + z)(-x + y + z)(x + y - z) \\ & - (x + y + z)(-x + y + z)(x - y + z) \end{aligned}$$

- La différentielle de  $\Phi$  s'écrit  $d\Phi = \frac{1}{16}\{Adx + Bdy + Cdz\}$  où  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont les fonctions données comme suit :

$$(6) \quad \begin{aligned} A(x, y, z) = & (-x + y + z)(x - y + z)(x + y - z) \\ & - (x + y + z)(x - y + z)(x + y - z) \\ & + (x + y + z)(-x + y + z)(x + y - z) \\ & + (x + y + z)(-x + y + z)(x - y + z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(x, y, z) = & (-x + y + z)(x - y + z)(x + y - z) \\ & + (x + y + z)(x - y + z)(x + y - z) \\ & - (x + y + z)(-x + y + z)(x + y - z) \\ & + (x + y + z)(-x + y + z)(x - y + z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(x, y, z) = & (-x + y + z)(x - y + z)(x + y - z) \\ & + (x + y + z)(x - y + z)(x + y - z) \\ & + (x + y + z)(-x + y + z)(x + y - z) \\ & - (x + y + z)(-x + y + z)(x - y + z) \end{aligned}$$

Un calcul facile mais long montre que ces trois fonctions  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont nulles simultanément que si  $x = y = z = 0$ , ce qui ne peut pas se produire car  $(0, 0, 0)$  n'est pas dans  $\Omega$ .

• À périmètre fixé  $2\lambda$ , la fonction aire  $a$  est maximale, et donc la fonction  $\Phi$  aussi, lorsque  $x = y = z = \frac{2}{3}\lambda$ ; en ce point  $\Phi$  vaut  $\frac{\lambda^4}{27}$ . Ce sont les valeurs prises par la fonction  $\Phi$  sur la demi-droite  $\Delta$  d'équations  $x = y = z$ .

On se met maintenant dans l'ouvert  $\Omega_* = \Omega \setminus \Delta$ . Pour tout  $u = (x, y, z) \in \Omega_*$ , la différentielle  $d_u\Phi$  est de rang 1; donc l'ensemble de niveau de  $\Phi$  passant par ce point est une surface régulière  $A$ , c'est même une surface algébrique de degré 4 (on dit une *quartique*). Elle a pour équation :

$$(x + y + z)(-x + y + z)(x - y + z)(x + y - z) = 16\Phi(u).$$

Un calcul facile mais long montre que ces trois fonctions  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont nulles simultanément que si  $x = y = z = 0$ , ce qui ne peut pas se produire car  $(0, 0, 0)$  n'est pas dans  $\Omega$ .

• À périmètre fixé  $2\lambda$ , la fonction aire  $a$  est maximale, et donc la fonction  $\Phi$  aussi, lorsque  $x = y = z = \frac{2}{3}\lambda$ ; en ce point  $\Phi$  vaut  $\frac{\lambda^4}{27}$ . Ce sont les valeurs prises par la fonction  $\Phi$  sur la demi-droite  $\Delta$  d'équations  $x = y = z$ .

On se met maintenant dans l'ouvert  $\Omega_* = \Omega \setminus \Delta$ . Pour tout  $u = (x, y, z) \in \Omega_*$ , la différentielle  $d_u\Phi$  est de rang 1; donc l'ensemble de niveau de  $\Phi$  passant par ce point est une surface régulière  $A$ , c'est même une surface algébrique de degré 4 (on dit une *quartique*). Elle a pour équation :

$$(x + y + z)(-x + y + z)(x - y + z)(x + y - z) = 16\Phi(u).$$

Un calcul facile mais long montre que ces trois fonctions  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont nulles simultanément que si  $x = y = z = 0$ , ce qui ne peut pas se produire car  $(0, 0, 0)$  n'est pas dans  $\Omega$ .

• À périmètre fixé  $2\lambda$ , la fonction aire  $a$  est maximale, et donc la fonction  $\Phi$  aussi, lorsque  $x = y = z = \frac{2}{3}\lambda$ ; en ce point  $\Phi$  vaut  $\frac{\lambda^4}{27}$ . Ce sont les valeurs prises par la fonction  $\Phi$  sur la demi-droite  $\Delta$  d'équations  $x = y = z$ .

On se met maintenant dans l'ouvert  $\Omega_* = \Omega \setminus \Delta$ . Pour tout  $u = (x, y, z) \in \Omega_*$ , la différentielle  $d_u\Phi$  est de rang 1; donc l'ensemble de niveau de  $\Phi$  passant par ce point est une surface régulière  $A$ , c'est même une surface algébrique de degré 4 (on dit une *quartique*). Elle a pour équation :

$$(x + y + z)(-x + y + z)(x - y + z)(x + y - z) = 16\Phi(u).$$

Un calcul facile mais long montre que ces trois fonctions  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont nulles simultanément que si  $x = y = z = 0$ , ce qui ne peut pas se produire car  $(0, 0, 0)$  n'est pas dans  $\Omega$ .

• À périmètre fixé  $2\lambda$ , la fonction aire  $a$  est maximale, et donc la fonction  $\Phi$  aussi, lorsque  $x = y = z = \frac{2}{3}\lambda$ ; en ce point  $\Phi$  vaut  $\frac{\lambda^4}{27}$ . Ce sont les valeurs prises par la fonction  $\Phi$  sur la demi-droite  $\Delta$  d'équations  $x = y = z$ .

On se met maintenant dans l'ouvert  $\Omega_* = \Omega \setminus \Delta$ . Pour tout  $u = (x, y, z) \in \Omega_*$ , la différentielle  $d_u\Phi$  est de rang 1; donc l'ensemble de niveau de  $\Phi$  passant par ce point est une surface régulière  $A$ , c'est même une surface algébrique de degré 4 (on dit une *quartique*). Elle a pour équation :

$$(x + y + z)(-x + y + z)(x - y + z)(x + y - z) = 16\Phi(u).$$

## 2.3. Quelques remarques

Notons  $G$  le sous-groupe du groupe  $\text{Isom}(\mathbb{R}^3)$  des isométries de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  engendré par la rotation  $r$  d'axe  $\Delta$  et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$  et la réflexion  $\sigma$  par rapport au plan d'équation  $x = y$ . Les restrictions de ses éléments au plan d'équation :

$$x + y + z = 2\lambda$$

est le groupe des isométries du triangle équilatéral  $X_\lambda Y_\lambda Z_\lambda$ . Il laisse l'espace  $\mathfrak{T}$  invariant ainsi que son bord  $\partial\mathfrak{T}$ , la demi-droite  $\Delta$  et les ouverts  $\Omega$  et  $\Omega_*$ . Il agit donc sur  $\mathfrak{T}$  et fixe chaque feuille de  $\mathcal{A}$  individuellement ; il en est de même pour le feuilletage  $\mathcal{P}$ .

## 2.3. Quelques remarques

Notons  $G$  le sous-groupe du groupe  $\text{Isom}(\mathbb{R}^3)$  des isométries de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  engendré par la rotation  $r$  d'axe  $\Delta$  et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$  et la réflexion  $\sigma$  par rapport au plan d'équation  $x = y$ . Les restrictions de ses éléments au plan d'équation :

$$x + y + z = 2\lambda$$

est le groupe des isométries du triangle équilatéral  $X_\lambda Y_\lambda Z_\lambda$ . Il laisse l'espace  $\mathfrak{T}$  invariant ainsi que son bord  $\partial\mathfrak{T}$ , la demi-droite  $\Delta$  et les ouverts  $\Omega$  et  $\Omega_*$ . Il agit donc sur  $\mathfrak{T}$  et fixe chaque feuille de  $\mathcal{A}$  individuellement ; il en est de même pour le feuilletage  $\mathcal{P}$ .

### 2.3. Quelques remarques

Notons  $G$  le sous-groupe du groupe  $\text{Isom}(\mathbb{R}^3)$  des isométries de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  engendré par la rotation  $r$  d'axe  $\Delta$  et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$  et la réflexion  $\sigma$  par rapport au plan d'équation  $x = y$ . Les restrictions de ses éléments au plan d'équation :

$$x + y + z = 2\lambda$$

est le groupe des isométries du triangle équilatéral  $X_\lambda Y_\lambda Z_\lambda$ . Il laisse l'espace  $\mathfrak{T}$  invariant ainsi que son bord  $\partial\mathfrak{T}$ , la demi-droite  $\Delta$  et les ouverts  $\Omega$  et  $\Omega_*$ . Il agit donc sur  $\mathfrak{T}$  et fixe chaque feuille de  $\mathcal{A}$  individuellement ; il en est de même pour le feuilletage  $\mathcal{P}$ .

### 2.3. Quelques remarques

Notons  $G$  le sous-groupe du groupe  $\text{Isom}(\mathbb{R}^3)$  des isométries de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  engendré par la rotation  $r$  d'axe  $\Delta$  et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$  et la réflexion  $\sigma$  par rapport au plan d'équation  $x = y$ . Les restrictions de ses éléments au plan d'équation :

$$x + y + z = 2\lambda$$

est le groupe des isométries du triangle équilatéral  $X_\lambda Y_\lambda Z_\lambda$ . Il laisse l'espace  $\mathfrak{T}$  invariant ainsi que son bord  $\partial\mathfrak{T}$ , la demi-droite  $\Delta$  et les ouverts  $\Omega$  et  $\Omega_*$ . Il agit donc sur  $\mathfrak{T}$  et fixe chaque feuille de  $\mathcal{A}$  individuellement ; il en est de même pour le feuilletage  $\mathcal{P}$ .

### 3. Le feuilletage $\mathcal{F}$ aire-périmètre

#### 3.1. Construction

Soit  $\Psi : \Omega_* \mapsto (\mathbb{R}_+^*)^2$  la fonction définie par  $\Psi(x, y, z) = (p(x, y, z), \Phi(x, y, z))$ . À un facteur multiplicatif constant près, la matrice de sa différentielle en  $u = (x, y, z)$  est :

$$d_u \Psi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ A(u) & B(u) & C(u) \end{pmatrix}$$

où  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont les fonctions données par (6). On peut montrer que ces fonctions ne sont égales que si  $x = y = z$ ; donc pour  $u \in \Omega_*$ ,  $d_u \Psi$  est de rang 2. Par suite, les ensembles de niveau de  $\Psi$  sont des courbes régulières, feuilles d'un feuilletage  $\mathcal{F}_*$  sur  $\Omega_*$ .

### 3. Le feuilletage $\mathcal{F}$ aire-périmètre

#### 3.1. Construction

Soit  $\Psi : \Omega_* \mapsto (\mathbb{R}_+^*)^2$  la fonction définie par  $\Psi(x, y, z) = (p(x, y, z), \Phi(x, y, z))$ . À un facteur multiplicatif constant près, la matrice de sa différentielle en  $u = (x, y, z)$  est :

$$d_u \Psi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ A(u) & B(u) & C(u) \end{pmatrix}$$

où  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont les fonctions données par (6). On peut montrer que ces fonctions ne sont égales que si  $x = y = z$ ; donc pour  $u \in \Omega_*$ ,  $d_u \Psi$  est de rang 2. Par suite, les ensembles de niveau de  $\Psi$  sont des courbes régulières, feuilles d'un feuilletage  $\mathcal{F}_*$  sur  $\Omega_*$ .

### 3. Le feuilletage $\mathcal{F}$ aire-périmètre

#### 3.1. Construction

Soit  $\Psi : \Omega_* \mapsto (\mathbb{R}_+^*)^2$  la fonction définie par  $\Psi(x, y, z) = (p(x, y, z), \Phi(x, y, z))$ . À un facteur multiplicatif constant près, la matrice de sa différentielle en  $u = (x, y, z)$  est :

$$d_u \Psi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ A(u) & B(u) & C(u) \end{pmatrix}$$

où  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont les fonctions données par (6). On peut montrer que ces fonctions ne sont égales que si  $x = y = z$ ; donc pour  $u \in \Omega_*$ ,  $d_u \Psi$  est de rang 2. Par suite, les ensembles de niveau de  $\Psi$  sont des courbes régulières, feuilles d'un feuilletage  $\mathcal{F}_*$  sur  $\Omega_*$ .

## 3.2. Description

Sur  $\mathcal{X}$  on a donc un feuilletage singulier  $\mathcal{F} = \mathcal{P} \cap \mathcal{A}$ . Ses feuilles de dimension 0 sont les points de la demi-droite

$$\left\{ \left( \frac{2}{3}\lambda, \frac{2}{3}\lambda, \frac{2}{3}\lambda \right) : \lambda \in \mathbb{R}_+ \right\}.$$

Parmi les feuilles de dimension égale à 1, il y a les triangles de sommets  $X_\lambda = (0, \lambda, \lambda)$ ,  $Y_\lambda = (\lambda, 0, \lambda)$  et  $Z_\lambda = (\lambda, \lambda, 0)$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ ; toute autre feuille est une courbe d'équation  $\Psi(u) = \text{constante}$  dans l'ouvert  $\Omega_*$ .

Ces courbes feuilletent bien sûr chaque plaque  $P_\lambda$  (feuille de  $\mathcal{P}$ ). Pour bien voir ce que c'est, on projette orthogonalement cette plaque sur le plan  $z = 0$  et on obtient le feuilletage du dessin ci-dessous. Nous allons expliquer ce que tout cela signifie.

## 3.2. Description

Sur  $\mathcal{X}$  on a donc un feuilletage singulier  $\mathcal{F} = \mathcal{P} \cap \mathcal{A}$ . Ses feuilles de dimension 0 sont les points de la demi-droite

$$\left\{ \left( \frac{2}{3}\lambda, \frac{2}{3}\lambda, \frac{2}{3}\lambda \right) : \lambda \in \mathbb{R}_+ \right\}.$$

Parmi les feuilles de dimension égale à 1, il y a les triangles de sommets  $X_\lambda = (0, \lambda, \lambda)$ ,  $Y_\lambda = (\lambda, 0, \lambda)$  et  $Z_\lambda = (\lambda, \lambda, 0)$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ ; toute autre feuille est une courbe d'équation  $\Psi(u) = \text{constante}$  dans l'ouvert  $\Omega_*$ .

Ces courbes feuilletent bien sûr chaque plaque  $P_\lambda$  (feuille de  $\mathcal{P}$ ). Pour bien voir ce que c'est, on projette orthogonalement cette plaque sur le plan  $z = 0$  et on obtient le feuilletage du dessin ci-dessous. Nous allons expliquer ce que tout cela signifie.

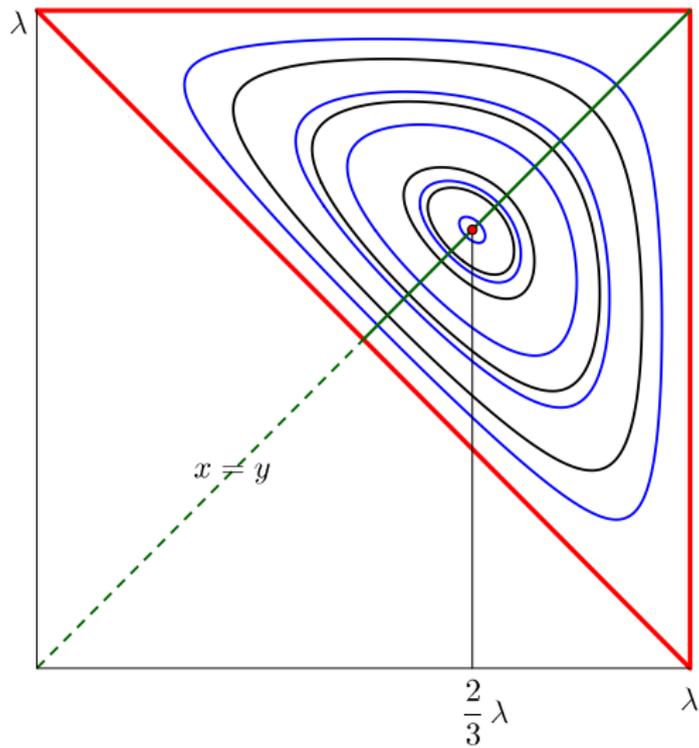
## 3.2. Description

Sur  $\mathcal{X}$  on a donc un feuilletage singulier  $\mathcal{F} = \mathcal{P} \cap \mathcal{A}$ . Ses feuilles de dimension 0 sont les points de la demi-droite

$$\left\{ \left( \frac{2}{3}\lambda, \frac{2}{3}\lambda, \frac{2}{3}\lambda \right) : \lambda \in \mathbb{R}_+ \right\}.$$

Parmi les feuilles de dimension égale à 1, il y a les triangles de sommets  $X_\lambda = (0, \lambda, \lambda)$ ,  $Y_\lambda = (\lambda, 0, \lambda)$  et  $Z_\lambda = (\lambda, \lambda, 0)$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ ; toute autre feuille est une courbe d'équation  $\Psi(u) = \text{constante}$  dans l'ouvert  $\Omega_*$ .

Ces courbes feuilletent bien sûr chaque plaque  $P_\lambda$  (feuille de  $\mathcal{P}$ ). Pour bien voir ce que c'est, on projette orthogonalement cette plaque sur le plan  $z = 0$  et on obtient le feuilletage du dessin ci-dessous. Nous allons expliquer ce que tout cela signifie.



La partie  $\Theta_\lambda$  constituée du triangle rouge et son intérieur est le projeté sur le plan  $z = 0$  de l'ensemble  $P_\lambda$  des triangles  $\langle x_\lambda y_\lambda z_\lambda \rangle$  de périmètre  $2\lambda$ .

Notons que le bord de  $P_\lambda$  est un triangle équilatéral alors que celui de  $\Theta_\lambda$  est un triangle rectangle isocèle.

Le feuilletage  $\mathcal{F}$  sur  $P_\lambda$  est isomorphe au feuilletage du dessin via le difféomorphisme  $f : P_\lambda \rightarrow \Theta_\lambda$  défini par  $f(x, y, z) = (x, y, 0)$  et d'inverse :

$$f^{-1}(x, y, 0) = (x, y, 2\lambda - x - y).$$

La partie  $\Theta_\lambda$  constituée du triangle rouge et son intérieur est le projeté sur le plan  $z = 0$  de l'ensemble  $P_\lambda$  des triangles  $\langle x_\lambda y_\lambda z_\lambda \rangle$  de périmètre  $2\lambda$ .

Notons que le bord de  $P_\lambda$  est un triangle équilatéral alors que celui de  $\Theta_\lambda$  est un triangle rectangle isocèle.

Le feuilletage  $\mathcal{F}$  sur  $P_\lambda$  est isomorphe au feuilletage du dessin via le difféomorphisme  $f : P_\lambda \rightarrow \Theta_\lambda$  défini par  $f(x, y, z) = (x, y, 0)$  et d'inverse :

$$f^{-1}(x, y, 0) = (x, y, 2\lambda - x - y).$$

La partie  $\Theta_\lambda$  constituée du triangle rouge et son intérieur est le projeté sur le plan  $z = 0$  de l'ensemble  $P_\lambda$  des triangles  $\langle x_\lambda y_\lambda z_\lambda \rangle$  de périmètre  $2\lambda$ .

Notons que le bord de  $P_\lambda$  est un triangle équilatéral alors que celui de  $\Theta_\lambda$  est un triangle rectangle isocèle.

Le feuilletage  $\mathcal{F}$  sur  $P_\lambda$  est isomorphe au feuilletage du dessin via le difféomorphisme  $f : P_\lambda \longrightarrow \Theta_\lambda$  défini par  $f(x, y, z) = (x, y, 0)$  et d'inverse :

$$f^{-1}(x, y, 0) = (x, y, 2\lambda - x - y).$$

- Le bord (triangle rouge) correspond aux triangles qui ont une aire nulle : les triangles aplatis *i.e.* ceux pour lesquels on a l'une des égalités  $x = y + z$ ,  $y = z + x$  ou  $z = x + y$ .
- Le point rouge  $\omega$  de coordonnées  $(\frac{2}{3}\lambda, \frac{2}{3}\lambda)$  correspond au triangle équilatéral  $\langle xxx \rangle$  d'aire maximale. Un triangle équilatéral ne peut donc jamais se déformer en un autre triangle (quel qu'il soit) ayant même aire et même périmètre.
- Les courbes noires et bleues (on a alterné les couleurs pour qu'on les voie mieux) forment un feuilletage de  $\Theta_\lambda \setminus \{\omega\}$ , chaque feuille correspond à l'ensemble des triangles ayant même aire. Elle a pour équation :

$$\lambda(2\lambda - x)(2\lambda - y)(x + y) = 8c$$

où  $c$  est une constante variant dans  $]0, \frac{8\lambda^4}{27}[$ .

- Le bord (triangle rouge) correspond aux triangles qui ont une aire nulle : les triangles aplatis *i.e.* ceux pour lesquels on a l'une des égalités  $x = y + z$ ,  $y = z + x$  ou  $z = x + y$ .
- Le point rouge  $\omega$  de coordonnées  $(\frac{2}{3}\lambda, \frac{2}{3}\lambda)$  correspond au triangle équilatéral  $\langle xxx \rangle$  d'aire maximale. Un triangle équilatéral ne peut donc jamais se déformer en un autre triangle (quel qu'il soit) ayant même aire et même périmètre.
- Les courbes noires et bleues (on a alterné les couleurs pour qu'on les voie mieux) forment un feuilletage de  $\Theta_\lambda \setminus \{\omega\}$ , chaque feuille correspond à l'ensemble des triangles ayant même aire. Elle a pour équation :

$$\lambda(2\lambda - x)(2\lambda - y)(x + y) = 8c$$

où  $c$  est une constante variant dans  $]0, \frac{8\lambda^4}{27} [$ .

- Le bord (triangle rouge) correspond aux triangles qui ont une aire nulle : les triangles aplatis *i.e.* ceux pour lesquels on a l'une des égalités  $x = y + z$ ,  $y = z + x$  ou  $z = x + y$ .
- Le point rouge  $\omega$  de coordonnées  $(\frac{2}{3}\lambda, \frac{2}{3}\lambda)$  correspond au triangle équilatéral  $\langle xxx \rangle$  d'aire maximale. Un triangle équilatéral ne peut donc jamais se déformer en un autre triangle (quel qu'il soit) ayant même aire et même périmètre.
- Les courbes noires et bleues (on a alterné les couleurs pour qu'on les voie mieux) forment un feuilletage de  $\Theta_\lambda \setminus \{\omega\}$ , chaque feuille correspond à l'ensemble des triangles ayant même aire. Elle a pour équation :

$$\lambda(2\lambda - x)(2\lambda - y)(x + y) = 8c$$

où  $c$  est une constante variant dans  $]0, \frac{8\lambda^4}{27}[$ .

- Le morceau de diagonale en vert correspond à l'ensemble des triangles isocèles (pour lesquels  $x = y$ ). Dans chacune des feuilles il y a exactement les projetés de deux triangles isocèles  $\langle xxz \rangle$  et  $\langle x'x'z' \rangle$ .
- Geoffrey Letellier a trouvé deux droites de triangles isocèles  $\langle x_\lambda y_\lambda z_\lambda \rangle$  et  $\langle x'_\lambda y'_\lambda z'_\lambda \rangle$  paramétrées par  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  avec :

$$x_\lambda = y_\lambda = \frac{11}{14}\lambda, \quad z_\lambda = \frac{3}{7}\lambda, \quad x'_\lambda = y'_\lambda = \frac{4}{7}\lambda, \quad z'_\lambda = \frac{6}{7}\lambda$$

Elles sont telles que, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  :

$$\begin{cases} \langle x_\lambda x_\lambda z_\lambda \rangle \text{ et } \langle x'_\lambda x'_\lambda z'_\lambda \rangle \text{ ont même périmètre } 2\lambda. \\ \langle x_\lambda x_\lambda z_\lambda \rangle \text{ et } \langle x'_\lambda x'_\lambda z'_\lambda \rangle \text{ ont même aire } \frac{3\lambda^2}{7\sqrt{7}}. \\ \langle x_\lambda x_\lambda z_\lambda \rangle \text{ et } \langle x'_\lambda x'_\lambda z'_\lambda \rangle \text{ ne sont pas isométriques.} \end{cases}$$

- Le morceau de diagonale en vert correspond à l'ensemble des triangles isocèles (pour lesquels  $x = y$ ). Dans chacune des feuilles il y a exactement les projetés de deux triangles isocèles  $\langle xxz \rangle$  et  $\langle x'x'z' \rangle$ .
- Geoffrey Letellier a trouvé deux droites de triangles isocèles  $\langle x_\lambda y_\lambda z_\lambda \rangle$  et  $\langle x'_\lambda y'_\lambda z'_\lambda \rangle$  paramétrées par  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  avec :

$$x_\lambda = y_\lambda = \frac{11}{14}\lambda, \quad z_\lambda = \frac{3}{7}\lambda, \quad x'_\lambda = y'_\lambda = \frac{4}{7}\lambda, \quad z'_\lambda = \frac{6}{7}\lambda$$

Elles sont telles que, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  :

$$\begin{cases} \langle x_\lambda x_\lambda z_\lambda \rangle \text{ et } \langle x'_\lambda x'_\lambda z'_\lambda \rangle \text{ ont même périmètre } 2\lambda. \\ \langle x_\lambda x_\lambda z_\lambda \rangle \text{ et } \langle x'_\lambda x'_\lambda z'_\lambda \rangle \text{ ont même aire } \frac{3\lambda^2}{7\sqrt{7}}. \\ \langle x_\lambda x_\lambda z_\lambda \rangle \text{ et } \langle x'_\lambda x'_\lambda z'_\lambda \rangle \text{ ne sont pas isométriques.} \end{cases}$$

- Le morceau de diagonale en vert correspond à l'ensemble des triangles isocèles (pour lesquels  $x = y$ ). Dans chacune des feuilles il y a exactement les projetés de deux triangles isocèles  $\langle xxz \rangle$  et  $\langle x'x'z' \rangle$ .
- Geoffrey Letellier a trouvé deux droites de triangles isocèles  $\langle x_\lambda y_\lambda z_\lambda \rangle$  et  $\langle x'_\lambda y'_\lambda z'_\lambda \rangle$  paramétrées par  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  avec :

$$x_\lambda = y_\lambda = \frac{11}{14}\lambda, \quad z_\lambda = \frac{3}{7}\lambda, \quad x'_\lambda = y'_\lambda = \frac{4}{7}\lambda, \quad z'_\lambda = \frac{6}{7}\lambda$$

Elles sont telles que, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  :

$$\begin{cases} \langle x_\lambda x_\lambda z_\lambda \rangle \text{ et } \langle x'_\lambda x'_\lambda z'_\lambda \rangle \text{ ont même périmètre } 2\lambda. \\ \langle x_\lambda x_\lambda z_\lambda \rangle \text{ et } \langle x'_\lambda x'_\lambda z'_\lambda \rangle \text{ ont même aire } \frac{3\lambda^2}{7\sqrt{7}}. \\ \langle x_\lambda x_\lambda z_\lambda \rangle \text{ et } \langle x'_\lambda x'_\lambda z'_\lambda \rangle \text{ ne sont pas isométriques.} \end{cases}$$

- Le morceau de diagonale en vert correspond à l'ensemble des triangles isocèles (pour lesquels  $x = y$ ). Dans chacune des feuilles il y a exactement les projetés de deux triangles isocèles  $\langle xxz \rangle$  et  $\langle x'x'z' \rangle$ .
- Geoffrey Letellier a trouvé deux droites de triangles isocèles  $\langle x_\lambda y_\lambda z_\lambda \rangle$  et  $\langle x'_\lambda y'_\lambda z'_\lambda \rangle$  paramétrées par  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  avec :

$$x_\lambda = y_\lambda = \frac{11}{14}\lambda, \quad z_\lambda = \frac{3}{7}\lambda, \quad x'_\lambda = y'_\lambda = \frac{4}{7}\lambda, \quad z'_\lambda = \frac{6}{7}\lambda$$

Elles sont telles que, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  :

$$\begin{cases} \langle x_\lambda x_\lambda z_\lambda \rangle \text{ et } \langle x'_\lambda x'_\lambda z'_\lambda \rangle \text{ ont même périmètre } 2\lambda. \\ \langle x_\lambda x_\lambda z_\lambda \rangle \text{ et } \langle x'_\lambda x'_\lambda z'_\lambda \rangle \text{ ont même aire } \frac{3\lambda^2}{7\sqrt{7}}. \\ \langle x_\lambda x_\lambda z_\lambda \rangle \text{ et } \langle x'_\lambda x'_\lambda z'_\lambda \rangle \text{ ne sont pas isométriques.} \end{cases}$$

- Le morceau de diagonale en vert correspond à l'ensemble des triangles isocèles (pour lesquels  $x = y$ ). Dans chacune des feuilles il y a exactement les projetés de deux triangles isocèles  $\langle xxz \rangle$  et  $\langle x'x'z' \rangle$ .
- Geoffrey Letellier a trouvé deux droites de triangles isocèles  $\langle x_\lambda y_\lambda z_\lambda \rangle$  et  $\langle x'_\lambda y'_\lambda z'_\lambda \rangle$  paramétrées par  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  avec :

$$x_\lambda = y_\lambda = \frac{11}{14}\lambda, \quad z_\lambda = \frac{3}{7}\lambda, \quad x'_\lambda = y'_\lambda = \frac{4}{7}\lambda, \quad z'_\lambda = \frac{6}{7}\lambda$$

Elles sont telles que, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle x_\lambda x_\lambda z_\lambda \rangle \text{ et } \langle x'_\lambda x'_\lambda z'_\lambda \rangle \text{ ont même périmètre } 2\lambda. \\ \langle x_\lambda x_\lambda z_\lambda \rangle \text{ et } \langle x'_\lambda x'_\lambda z'_\lambda \rangle \text{ ont même aire } \frac{3\lambda^2}{7\sqrt{7}}. \\ \langle x_\lambda x_\lambda z_\lambda \rangle \text{ et } \langle x'_\lambda x'_\lambda z'_\lambda \rangle \text{ ne sont pas isométriques.} \end{array} \right.$$

- Par exemple les deux triangles isocèles :

$$x = y = 11, \quad z = 6 \quad \text{et} \quad x' = y' = 8, \quad z' = 12$$

ont même périmètre égal à 28 et même aire égale à  $12\sqrt{7}$ .

- Enfin, on voit sur le dessin que toute la situation n'est invariante que par la réflexion  $\sigma$  (symétrie par rapport à la diagonale  $x = y$ ) alors que sur le triangle  $P_\lambda$  elle est invariante par tout le groupe  $G$ .

- Par exemple les deux triangles isocèles :

$$x = y = 11, \quad z = 6 \quad \text{et} \quad x' = y' = 8, \quad z' = 12$$

ont même périmètre égal à 28 et même aire égale à  $12\sqrt{7}$ .

- Enfin, on voit sur le dessin que toute la situation n'est invariante que par la réflexion  $\sigma$  (symétrie par rapport à la diagonale  $x = y$ ) alors que sur le triangle  $P_\lambda$  elle est invariante par tout le groupe  $G$ .