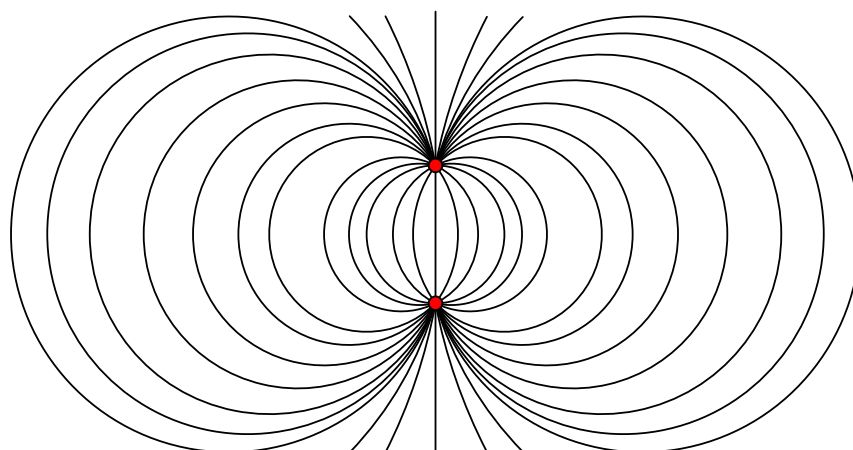


DEUX FRIANDISES EN GÉOMÉTRIE PLANE

Pour bien éduquer le regard géométrique !

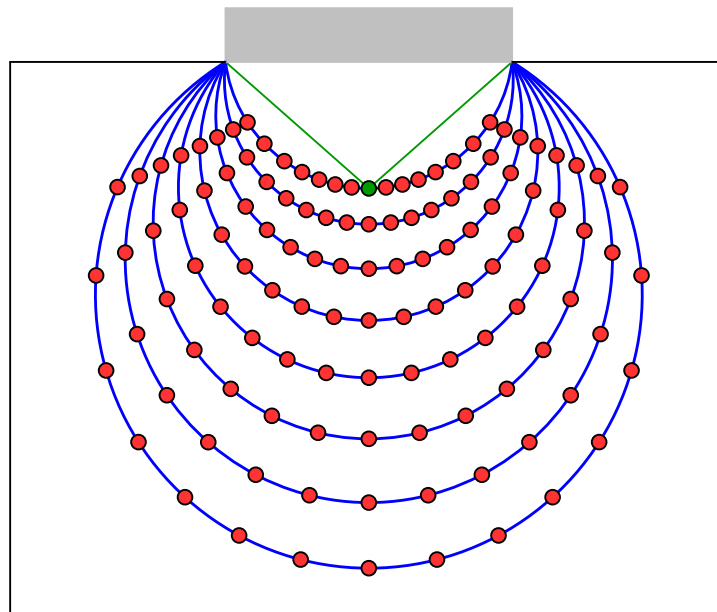
AZIZ EL KACIMI



Première friandise

Ce soir je vais au théâtre où on joue *Le fou de Magdalène*, une pièce de Pascal Moha contant une folle histoire d'amour. Il paraît qu'elle est superbement mise en scène avec, dans le rôle de Magdalène, la belle et gracieuse Devi, sosie parfait de Rym Gaspard qui fut la première actrice à avoir interprété le personnage en 1896. Ce sera drôlement passionnant et pour rien au monde je ne manquerai ce spectacle.

La représentation est annoncée pour vingt heures précises. Je quitte mon domicile vers dix-huit heures et une demi-heure après je suis devant le guichet ; il est déjà ouvert et je suis le premier client. J'achète mon billet et me rends dans la salle ; il n'y a encore personne et je peux donc m'installer où bon me semble. Je me mets alors à parcourir toutes les rangées en quête du siège d'où je pourrais admirer au mieux la scène. Je le trouve, je m'y installe et je n'en bouge plus.



Salle de spectacle

Mais je suis loin d'imaginer où cela allait m'embarquer : ma curiosité géométrique est insaisissable et le moindre motif sur lequel mes yeux promeneurs se fixent me plonge instantanément dans des réflexions en dehors de la réalité où je me trouve. Cette fois-ci encore je n'y échappe pas. Je commence à me poser des questions : « Pourquoi ce siège au centre de la première rangée me donne-t-il le meilleur angle de vue ? Comment ferais-je si au lieu de toutes ces rangées et ces sièges il n'y avait qu'un simple banc ? – Pas de panique ! me répond la voix, il suffit de bien poser le problème, fournir une petite dose de travail et jeter un bon *regard géométrique* sur des dessins clairs et précis ! »

La sagesse a parlé. Suivez-moi alors, je vous emmene découvrir une petite parcelle de mon jardin géométrique !

OÙ DOIS-JE M'ASSEOIR SUR LE BANC POUR BIEN VOIR ?

Tout se passe dans le plan euclidien \mathbb{E} dont un modèle est \mathbb{R}^2 muni de sa structure affine canonique et de son produit scalaire usuel. Dans le dessin ci-dessous une scène de théâtre est représentée par un segment AB de longueur d .

Problème. *Où faut-il prendre place (repérée par un point M) sur un banc M_0M_1 dans la salle de spectacle pour avoir le plus grand angle de vue ?*

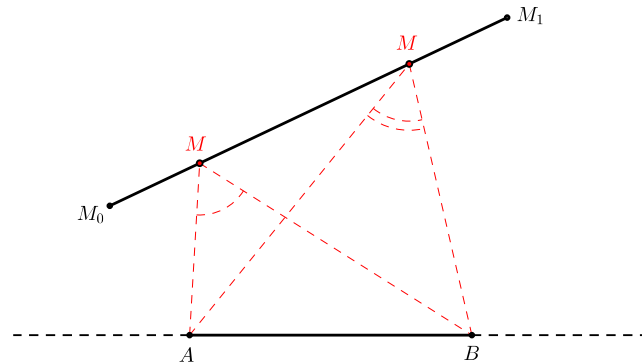


Figure 1

Bien qu'élémentaire, la résolution de ce problème n'est pas immédiate et fait appel à quelques outils relativement importants de la géométrie euclidienne plane.

1. Feuilletage angle

1.1. Soit Ω l'ouvert $\mathbb{E} \setminus \{A, B\}$. On note θ l'angle orienté $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$; c'est une "fonction" $\theta : M \in \Omega \mapsto \theta(M) \in [0, 2\pi]$. Comme on le voit sur le dessin ci-dessous, $\theta \in]0, \pi[$ si M est dans le demi-plan ouvert du côté droit de la droite (AB) et $\theta \in]\pi, 2\pi[$ si M est dans le demi-plan ouvert du côté gauche ; $\theta = \pi$ si M est sur le segment ouvert $\delta_0 =]AB[$.

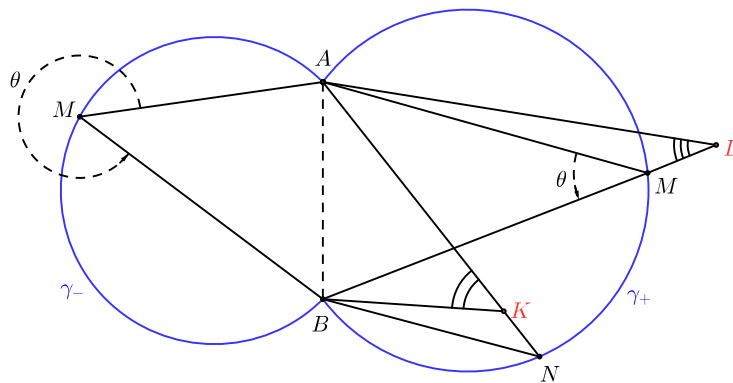


Figure 2

Lorsqu'on prescrit une valeur pour θ , par exemple dans $]0, \pi[$, le point M reste sur un arc de cercle γ_+ . Tout point à l'intérieur donne un angle plus grand, par exemple \widehat{AKB} et tout point à l'extérieur donne un angle plus petit, par exemple \widehat{ALB} . Ces propriétés seront importantes pour la résolution de notre problème.

1.2. Lorsqu'on fait varier θ dans $]0, 2\pi[$, l'arc de cercle correspondant varie dans $\Omega_0 = \Omega$ privé des deux demi-droites $\delta_+ = \{x = 0 \text{ et } y > \frac{d}{2}\}$ et $\delta_- = \{x = 0 \text{ et } y < -\frac{d}{2}\}$. On obtient ainsi une famille de courbes disjointes et recouvrant l'ouvert Ω ; toutes sont des arcs de cercles sauf celle correspondant à $\theta = \pi$ qui se réduit au segment ouvert $]AB[$. Ainsi, ces arcs de cercles, le segment $]AB[$ et les deux demi-droites $\delta_+ = \{x = 0 \text{ et } y > \frac{d}{2}\}$ et $\delta_- = \{x = 0 \text{ et } y < -\frac{d}{2}\}$ sont les *feuilles* d'un *feuilletage* \mathcal{F} sur l'ouvert Ω appelé *feuilletage-angle*.

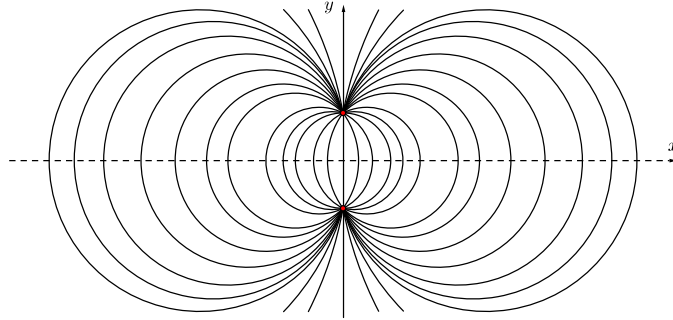


Figure 3

On peut le décrire d'une autre manière : en faisant apparaître ses feuilles comme les *courbes de niveau* d'une certaine "fonction" analytique (réelle) sur l'ouvert Ω . On se référera à la figure ci-dessous.

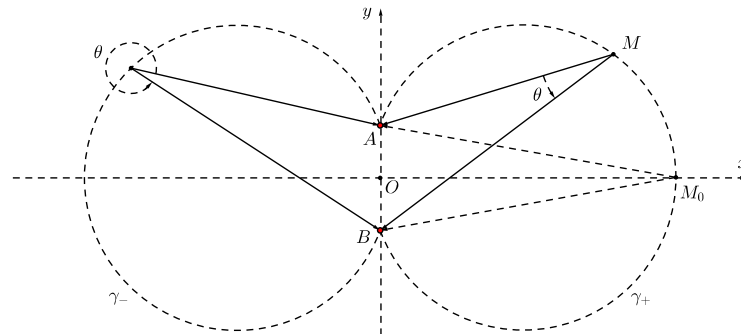


Figure 4

Quelle que soit la position de M sur l'arc de cercle γ_+ , sa mesure θ vaut celle de l'angle $\widehat{AM_0B}$. Et cette dernière se calcule facilement. En effet, on a $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2} - \widehat{OAM_0}$. Mais $\text{tg}(\widehat{OAM_0}) = \frac{OM_0}{OA} = \frac{2x}{d}$ et par suite : $\theta(x) = \pi - 2\text{Arctg}\left(\frac{2x}{d}\right)$. Ainsi, sur l'ouvert Ω_0 , les feuilles de \mathcal{F} sont les courbes de niveau de la fonction :

$$\theta : M \in \Omega_0 \mapsto \theta(M) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \in]0, 2\pi[.$$

(L'espace des feuilles Ω_0/\mathcal{F} peut-être représenté par l'axe des abscisses sur lequel θ est une fonction bien définie.) On voit immédiatement que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \theta(x) = 2\pi$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x) = 0$.

Quand $|x|$ tend vers $+\infty$ les arcs γ_+ et γ_- explosent en les deux demi-droites δ_+ et δ_- .

Si on veut voir θ comme une fonction sur Ω , on doit calculer sa limite lorsque M tend vers $\delta_+ \cup \delta_-$; mais cette limite est 0 du côté $x > 0$ et 2π du côté $x < 0$. Sur

Ω , la fonction θ est donc *multiforme*. Ôter les deux demi-droites δ_+ et δ_- pour obtenir Ω_0 c'est faire des *coupures* sur Ω et restreindre θ à Ω_0 tel qu'on l'a fait, c'est en donner une *détermination*. On peut vérifier facilement que deux déterminations diffèrent par un multiple entier (relatif) de 2π . Ainsi, si on voit θ comme ayant ses valeurs dans le cercle $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (en composant avec la projection canonique $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$), alors $\theta : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^1$ est parfaitement définie. C'est une submersion dont les fibres sont les feuilles du feuilletage \mathcal{F} sur Ω .

1.3. Remarque. L'ouvert Ω n'est pas simplement connexe : son groupe fondamental est le groupe libre à deux générateurs $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ engendré, par exemple, par deux cercles de centres respectifs A et B , chacun de rayon $\varepsilon < \frac{d}{2}$.

2. Solution du problème

On ne considérera que le demi-plan $\mathbb{E}^+ = \{(x, y) \in \mathbb{E} : x > 0\}$ puisque c'est là que se trouve notre salle de spectacle et où les choses se passent de manière effective. Notons \mathcal{F}^+ la restriction du feuilletage \mathcal{F} à l'ouvert \mathbb{E}^+ . On a une bijection $\theta \in]0, \pi[\mapsto \gamma(\theta) \in \mathcal{F}^+$ associant à chaque angle θ sa courbe de niveau $\gamma(\theta)$. Convenons de dire que la feuille γ est *plus petite* que la feuille γ' (et on écrit $\gamma \leq \gamma'$) si le rayon de l'arc γ est plus petit que celui de γ' .

On cherche la position du point M sur le segment $[M_0M_1]$ (le banc dans \mathbb{E}^+) telle que l'angle de vue $\theta = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ soit maximal. Un simple regard sur la figure 3, combiné à ce qu'on a dit dans la sous-section 1.1, montre qu'il suffit à cet effet de reconnaître la feuille γ (elle est unique) du feuilletage \mathcal{F}^+ qui touche $[M_0M_1]$ en un seul point et telle que les autres points de ce même segment $[M_0M_1]$ soient à l'extérieur de γ . Il y a quelques cas à distinguer en fonction de la position de $[M_0M_1]$ "relativement" à $[AB]$.

2.1. Les points A, B, M_0 et M_1 sont non cocycliques

Dans ce cas même, il y a deux situations géométriques différentes. Soient γ_0 le cercle passant par A, B et M_0 et γ_1 celui passant par A, B et M_1 . (Ces deux cercles sont bien entendu distincts.)

- i) La feuille γ_0 est plus petite que γ_1 et le segment $[M_0M_1]$ est à l'extérieur de γ_0 (voir dessin ci-dessous). La position cherchée est alors le point M_0 .

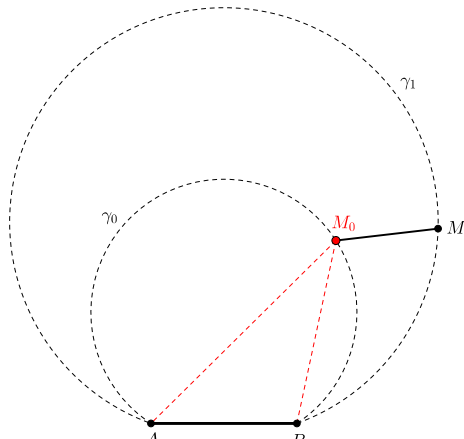


Figure 5

- ii) La feuille γ_0 est plus petite que γ_1 et recoupe le segment $[M_0M_1]$ en un autre point N . La position cherchée est le point M du segment ouvert $]M_0N[$ en lequel un cercle passant par A et B est tangent à la droite (M_0M_1) . (On construit M de la même façon que dans la sous-section 2.2 qui suit.)

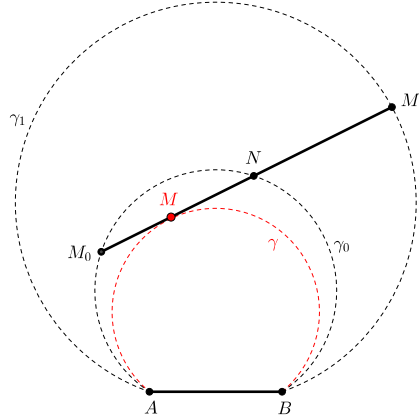


Figure 6

2.2. Les points A, B, M_0 et M_1 sont sur un cercle Γ

Dans cette situation la position qu'on cherche est donnée par le point M dans l'intervalle ouvert $]M_0M_1[$ où la droite (M_0M_1) est tangente au feuilletage \mathcal{F} ; le problème consistera donc à chercher la feuille en laquelle il y a cette tangence. Sa construction géométrique est donnée ci-dessous.

- i) Si le segment $[M_0M_1]$ est parallèle à la droite (AB) , sa médiatrice est aussi celle du segment $[AB]$. Le cercle γ cherché est celui passant par A et B et tangent à $[M_0M_1]$ en son milieu M .

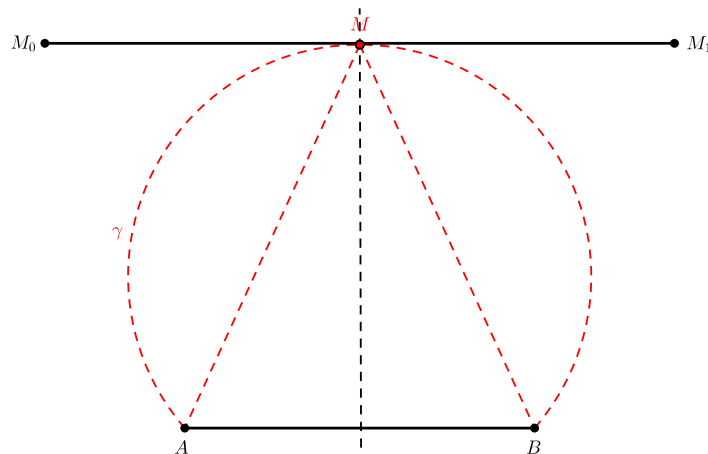


Figure 7

- ii) Si la droite (M_0M_1) n'est pas parallèle à la droite (AB) , elle coupe celle-ci en un point S . Par S on mène la perpendiculaire à (M_0M_1) et de part et d'autre on repère dessus les points A' et B' tels que $SA' = SA$ et $SB' = SB$. Le cercle de diamètre

$[A'B']$ coupe la droite (M_0M_1) en un point M de telle sorte que :

$$SM^2 = SA \cdot SB = p(S, \gamma) = \text{puissance de } S \text{ par rapport à } \gamma.$$

Comme Γ et γ passent tous les deux par les points A et B , la droite (AB) est leur *axe radical*. Donc :

$$SM^2 = p(S, \gamma) = p(S, \Gamma) = SM_0 \cdot SM_1.$$

Par suite $SM_0 < SM < SM_1$. Le point M est donc sur le segment ouvert $]M_0M_1[$. C'est exactement le point qu'on cherche *i.e.* celui en lequel le segment $[M_0M_1]$ est tangent au feuilletage \mathcal{F} , c'est-à-dire la position sur le banc qui donne le plus grand angle de vue sur la scène de spectacle.

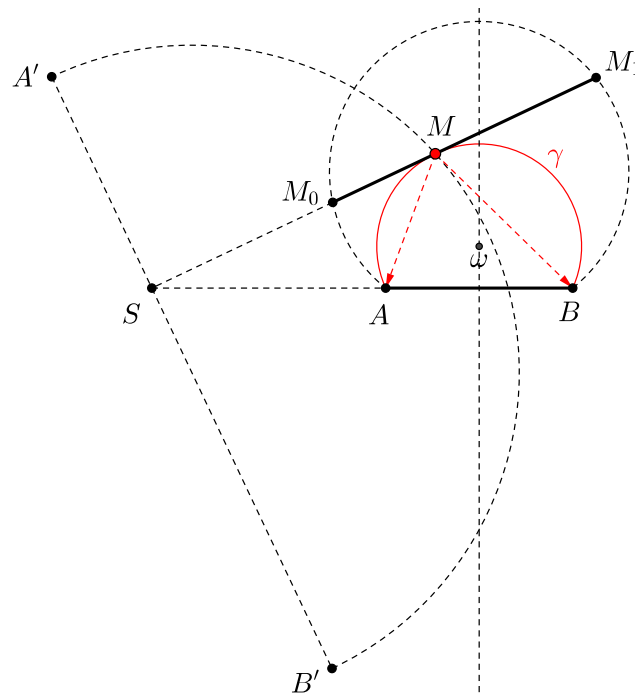


Figure 8

Deuxième friandise

Effilé et d'une petite taille. Sa tête pointue est si haute qu'on dirait qu'elle défie les grands ciels azurés ; et j'ai comme une envie irrésistible de l'arondir pour en faire un pain de sucre. De mon enfance, je me rappelle que par sa forme quelque peu spéciale nous (les gamins de ma ville natale) le tournions en dérision en le surnommant "suppositoire géant". Plus sérieusement, je me souviens aussi qu'il était cette denrée alimentaire dont la variation du prix mesurait celle du coût de la vie d'une population qui se démenait pour survivre de jour en jour. Mais...

Je reviens à mon triangle. Je lui colle deux petits ronds tout en haut et le transforme en pingouin, tout beau tout frêle, me dévisageant comme son créateur. Il se fait méfiant, se demandant ce que j'allais en faire. Je ne tarde pas à le mettre au parfum.

- J'ai un petit projet pour toi, lui dis-je.
- Ah ! et lequel, me répond-il.
- Tu sais que ta tête vaut vingt degrés ?
- C'est ce qu'on me dit. Mais quel intérêt a-t-elle ?
- Je vais pouvoir la monnayer !
- La monnayer ?
- Oui ! la monnayer à moins que...
- ... ?
- À moins que tu n'acceptes un jeu avec d'autres de tes semblables ?
- Si je n'ai pas d'autre choix, je joue ! répond-il sans aucune conviction.

Pinguoin est sceptique, perplexe ; et malgré cela, il ne veut pas contrarier mes projets. Mais il n'a aucune envie de subir la moindre souffrance que lui causerait mon expérience. D'une poche invisible, il sort une petite fiole ; il l'ouvre avec hâte et en avale le contenu. Ses yeux tournent, ses longues guiboles titubent et il finit par tomber sur mon canapé en rotin, totalement anesthésié.

Et voilà ! Je clone le petit cochon en dix-sept autres exemplaires, je les range à côté de leur géniteur en plaçant leurs têtes au même point que la sienne. Je pave ainsi le disque ayant cette tête commune pour centre et l'un des dix-huit grands côtés égaux pour rayon. J'ai donc mon cercle magique qui me permettra de calculer mon fameux angle d'ouverture vers... !

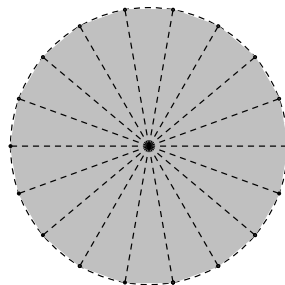


Figure 1

Belle et passionnante petite histoire, n'est-ce pas ? Mais de quoi parle-t-elle ? Et de quel angle s'agit-il ? De celui du problème qui suit que m'a posé un de mes étudiants de Master. En voici la formulation exacte.

LA TÊTE À VINT DEGRÉS

Là aussi, ça se passe dans le plan euclidien \mathbb{E} dont un modèle est \mathbb{R}^2 muni de sa structure affine canonique et de son produit scalaire usuel.

Problème. Soit ABC un triangle isocèle ayant pour angles $\widehat{CAB} = \widehat{CBA} = 80^\circ$ et $\widehat{ACB} = 20^\circ$. Sur le côté AC on prend un point E tel que $\widehat{ABE} = 70^\circ$ et sur le côté BC un point F tel que $\widehat{BAF} = 60^\circ$. Quelle est la mesure de l'angle \widehat{BEF} ?

Tout me paraissait à portée de main – et c'était aussi le sentiment qu'exprimaient au départ les personnes à qui j'avais soumis l'exercice. Je pensais à un simple comptage des mesures des angles déjà visibles et ceux qu'on peut avoir en plus en tirant un trait çà et là. Mais c'était insuffisant et il a fallu déterminer θ autrement. Voici comment ça s'est passé.

Pour mettre le sommet de l'angle cherché sur l'un de ceux du triangle ABC , j'ai mené par B la parallèle à (EF) (qui coupe le côté AC en D). Là, l'angle \widehat{DBF} paraît mesurer dans les 30 degrés et ainsi \widehat{BEF} (qui est égal à \widehat{DBE}) vaudrait $\widehat{DBF} - \widehat{EBF} = 20$ degrés. Inversement, si on prend un point D sur le côté AC tel que $\widehat{DBF} = 30^\circ$, les droites (BD) et (EF) semblent être parallèles. Désormais les deux choses paraissent donc fortement liées. Je me suis alors demandé s'il ne valait pas mieux commencer d'abord par la :

Question préliminaire. Soit toujours ABC un triangle isocèle ayant pour angles $\widehat{CAB} = \widehat{CBA} = 80^\circ$ et $\widehat{ACB} = 20^\circ$. Sur le côté AC on prend un point D tel que $\widehat{ABD} = 50^\circ$ et sur le côté BC un point F tel que $\widehat{BAF} = 60^\circ$. Quelle est la mesure de l'angle \widehat{AFD} ?

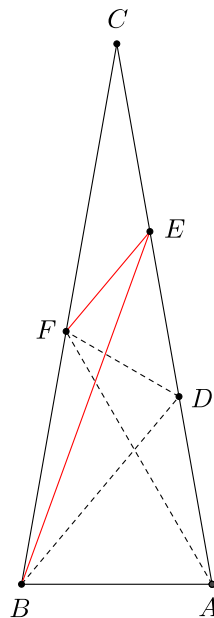


Figure 2

J'ai découvert par la suite dans [Chris Pritchard : *The Changing Shape of Geometry*, Cambridge University Press (2003), exposé de Brian Bolt, page 355] que cette même question a déjà été posée comme exercice en 1916 à une épreuve d'examen d'entrée au

Perterhouse College et au Sydney Sussex College (tous deux à Cambridge au Royaume Uni). Moi personnellement, je l'espérais plus facile mais elle s'avéra tout aussi coriace que le problème lui-même. (D'ailleurs, l'étudiant qui m'a posé le problème initial s'attendait à ce que je le résolve en cinq minutes ! Mais il a dû attendre à cet effet un peu plus de trois semaines !)

J'ai cherché à répondre à cette question en commençant par dessiner diverses figures, telle par exemple celle ci-dessous où je faisais glisser mon regard dans tous les recoins. Je m'emportais en parcourant l'architecture de ses segments et de ses arcs de cercles au moindre indice qui me permettrait d'avoir une toute petite idée pour confirmer (preuve à l'appui) la mesure suspectée de cet angle. Mais rien ne transparissait !

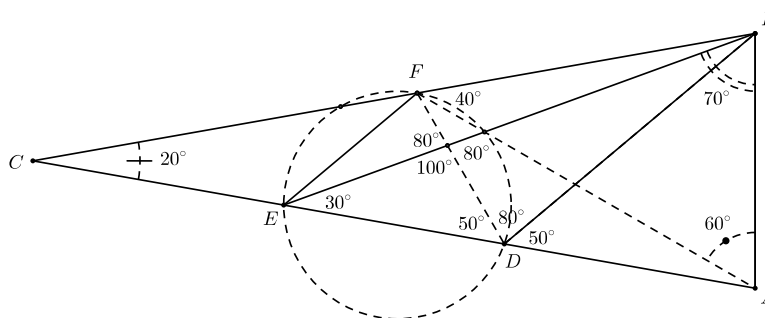


Figure 3

La solution commençait à s'éloigner ! Mais, comme on le voit sur la Figure 3, tous les angles semblent être des multiples de 10° . Je ne lâchai donc pas prise et engageai une dernière tentative : faire intervenir un cercle dans lequel mon angle θ pourrait être obtenu comme combinaison entière (ou demi-entière) d'arcs mesurant 20° . L'un de ceux-là était naturel : le cercle de centre C et de rayon $r = CA = CB$. Il n'est rien d'autre que celui que j'ai pavé par les dix-huit petits cochons CAB pour former mon octadécagone ! Si les droites portant les côtés de l'angle cherché passent toutes les deux par des sommets de celui-ci le calcul sera alors immédiat. Évidemment, une figure claire et bien faite encouragerait la suite du travail. Ce fut effectivement le cas et la voici :

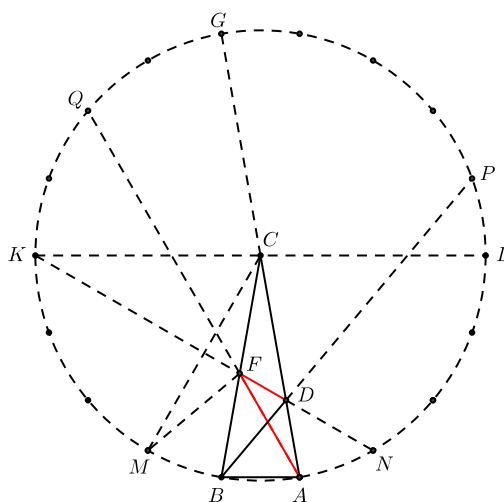


Figure 4

On y va pour une réponse à la question préliminaire. Soient Γ le cercle de centre C et passant par A (donc aussi par B) et \mathcal{P} le polygone régulier à 18 côtés (*) inscrit dans Γ et dont les sommets sont $A_1 = B, A_2 = A, A_3, \dots, A_{18}$. Un arc sous-tendu par un côté $A_i A_{i+1}$ de ce polygone donne un angle inscrit de 10° et un angle au centre (*i.e.* dont le sommet est C) de 20° . Pour simplifier (ne pas trainer les indices dans ces sommets), on pose :

$$N = A_3, \quad L = A_6, \quad P = A_7, \quad G = A_{11}, \quad Q = A_{13}, \quad K = A_{15}, \quad M = A_{18}.$$

• On a $\widehat{PBA} = 50^\circ = \widehat{DBA}$, donc les points B, D et P sont alignés. D'autre part, les droites (KN) et (BP) sont symétriques par rapport à la droite (AC) , elles se coupent donc forcément en D ; par suite les points K, D et N sont alignés.

• On a $\widehat{FCA} = 20^\circ = \widehat{FAC}$, donc le triangle ACF est isocèle de base AC ; d'où $FA = FC$. Mais $FA = FM$ car A et M sont symétriques par rapport à la droite (BF) , donc $FM = FC$ qui signifie que F est sur la médiatrice de MC qui, elle, n'est rien d'autre que la bissectrice de l'angle \widehat{MKL} , c'est-à-dire la droite (KN) . Les points K, D, F et N sont donc alignés.

• Comme $\widehat{FAD} = 20^\circ$ et que les points A, G et D sont alignés, les points A, F et Q le sont aussi. On a finalement :

$$\widehat{AFD} = \frac{1}{2} (\text{arc}(AN) + \text{arc}(QK)) = \frac{1}{2} (20^\circ + 40^\circ) = 30^\circ.$$

Il nous reste à résoudre le problème initial posé. Nous travaillerons sur la figure 2. Une des étapes de notre démarche utilise la solution du Problème préliminaire. On fait donc intervenir le point D de AC tel que $\widehat{ABD} = 50^\circ$. On sait alors que $\widehat{AFD} = 30^\circ$.

• On a $\widehat{FAD} = 20^\circ = \widehat{EBD}$ et $\widehat{AFD} = 30^\circ = \widehat{BED}$; les triangles ADF et BDE sont donc semblables ; par suite les côtés opposés respectivement aux angles égaux sont proportionnels :

$$(1) \quad \frac{AD}{BD} = \frac{DF}{DE} = \frac{AF}{BE} \quad (\text{signalons aussi que } \widehat{ADF} = 130^\circ).$$

• D'autre part $\widehat{ADB} = 50^\circ = \widehat{ABD}$; le triangle ABD est donc isocèle de base DB , d'où $AD = BA$. On obtient alors (à partir de (1) en remplaçant AD par BA) :

$$(2) \quad \frac{BA}{BD} = \frac{DF}{DE} \quad \text{et} \quad \widehat{EDF} = 50^\circ \quad \text{car} \quad \widehat{ADF} = 130^\circ.$$

• Les triangles ABD et DEF sont semblables car $\widehat{ABD} = 50^\circ = \widehat{EDF}$ et $\frac{BA}{BD} = \frac{DF}{DE}$. Comme ABD est isocèle de base BD , DEF l'est aussi et a pour base DE ; par suite $\widehat{DEF} = 50^\circ$. On a finalement :

$$\widehat{BEF} = \widehat{DEF} - \widehat{BED} = 50^\circ - 30^\circ = 20^\circ.$$

(*) Signalons au passage que, d'après le théorème de Gauss-Wantzel, ce polygone ne peut pas être construit à la règle et au compas puisque $18 = 2 \cdot 3^2$ et que 3^2 n'est pas un produit de premiers de Gauss distincts. (Un *premier de Gauss* est un entier premier de la forme $2^p + 1$.)