UNIVERSITÉ DE VALENCIENNES

Licence de Mathématiques - 3ème Année

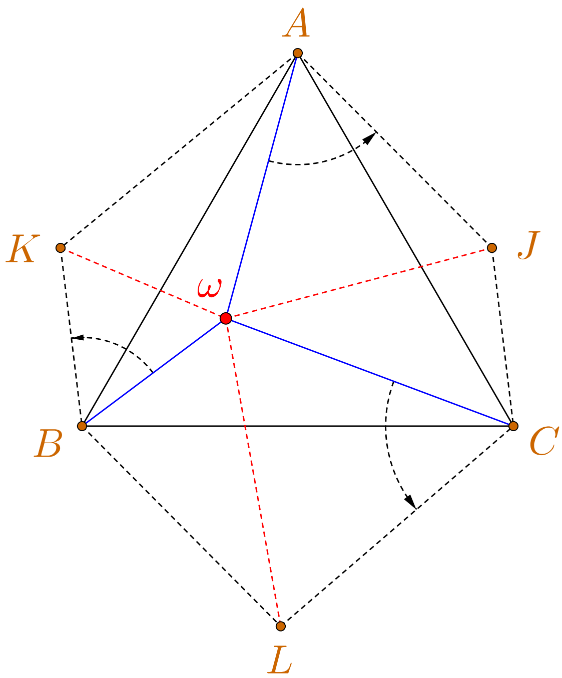
GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE ÉLÉMENTAIRE

CORRIGÉS DE DEVOIRS SURVEILLÉS

---

par

Aziz EL KACIMI



Le problème (a, b, c)

JUIN 2017

Licence 3 - Mathématiques
DS - 15 mars 2016
Géométrie 6

Dans tout ce texte $\mathcal{P}$ sera un plan affine euclidien (dirigé par un plan vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{V}}$) muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Exercice 1

On note f l'application affine de $\mathcal{P}$ dans lui-même qui à tout point M de coordonnées (x, y) associe le point M' de coordonnées (x', y') données par :

$$\begin{cases} x' = x - y - 1 \\ \\ y' = x + y + 1. \end{cases}$$

1 - Donner la direction $\overrightarrow{f}$ de f ainsi que la matrice A de $\overrightarrow{f}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

2 - Montrer que f a un et un seul point fixe ; on le notera ω.

3 - Montrer que f est une similitude du plan euclidien $\mathcal{P}$ dont on précisera le centre (s'il y en a un), le rapport k et l'angle θ.

4 - Quell est l'image Δ' par f de la droite Δ d'équation $2x + y - 1 = 0$?

5 - Quell est l'image Γ' par f du cercle Γ centré à l'origine et de rayon $\rho = 1$?

Exercice 2

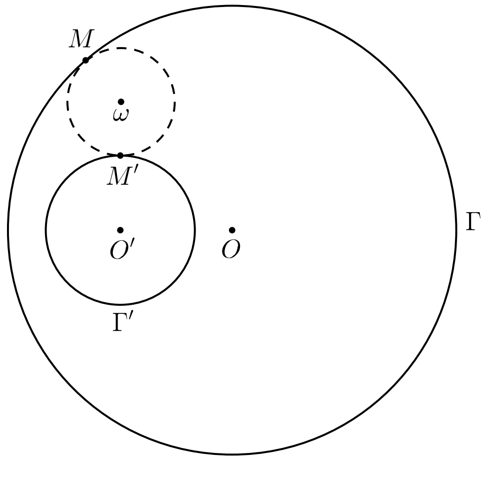
Deux cercles Γ et Γ' se coupent en deux points distincts A et B. Une droite passant par A coupe Γ en M et Γ' en M'. Une doite passant par B coupe Γ en N et Γ' en N'.

Montrer que les deux droites (MN) et $(M'N')$ sont parallèles.

Exercice 3

Soient Γ et Γ' deux cercles de centres respectifs distincts O et O' et de rayons respectifs $\rho > 0$ et $\rho' > 0$. On suppose que Γ et Γ' ne se coupent pas et que Γ' est à l'intérieur de Γ. Soit $\mathcal{C}$ un cercle tangent intérieurement à Γ en M et extérieurement à Γ' en M' (voir figure ci-dessous).

Où varie le centre ω du cercle $\mathcal{C}$ lorsque ce dernier varie mais en vérifiant toujours les conditions susmentionnées ?



Corrigé

Exercice 1

1 - Écrivons l'expression de f sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La direction $\overrightarrow{f}$ de f est donc l'application $\overrightarrow{f}(x, y) = (x - y, x + y)$ de matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2 - Un point fixe ω a ses coordonnées (x_0, y_0) qui vérifient le système linéaire :

$$\begin{cases} x_0 - y_0 - 1 = x_0 \\ x_0 + y_0 + 1 = y_0. \end{cases}$$

Les solutions sont de façon évidente $x_0 = -1$ et $y_0 = -1$. Donc $\omega = (-1, -1)$ est un point fixe et il est unique.

3 - Considérons le nouveau repère $(\omega; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Les coordonnées de $M = (x, y)$ y deviennent $X = x + 1$ et $Y = y + 1$; de même celles de son transformé $M' = (x', y')$ sont $X' = x' + 1$ et $Y' = y' + 1$. Le système :

$$\begin{cases} x' = x - y - 1 \\ \\ y' = x + y + 1. \end{cases}$$

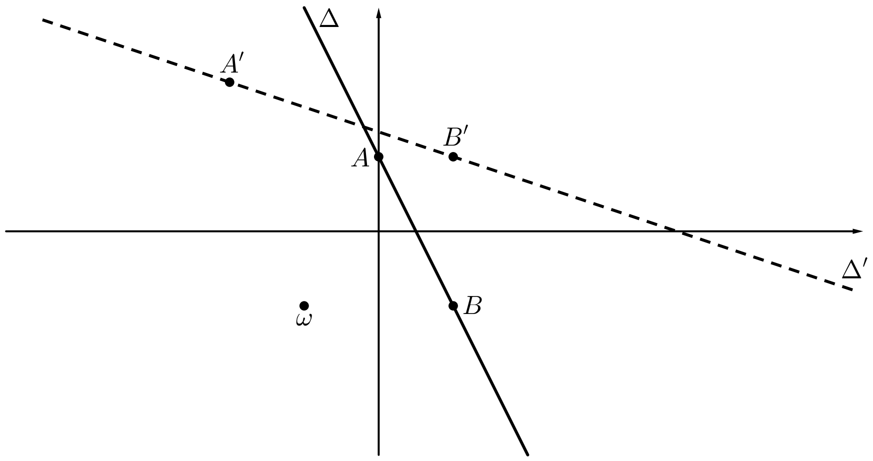
est exactement le même que $\begin{cases} x' + 1 = (x + 1) - (y + 1) \\ \\ y' + 1 = (x + 1) + (y + 1) \end{cases}$ c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

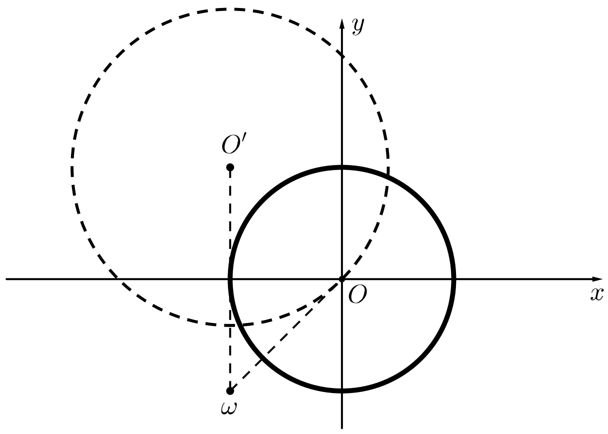
On voit donc qu'on passe de M à M' par la rotation de centre ω et d'angle $\theta = \frac{\pi}{4}$ suivie de l'homothétie de centre ω et de rapport $k = \sqrt{2}$. La transformation f est donc la similitude de centre ω, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

4 - Une similitude transforme une droite en une droite. Pour déterminer Δ', il suffit donc de connaître les transformés respectifs A' et B' de deux points A et B de Δ, par exemple $A = (0, 1)$ et $B = (1, -1)$. Un calcul immédiat donne $A' = (-2, 2)$ et $B' = (1, 1)$. L'équation de Δ' est donc :

$$x + 3y - 4 = 0.$$



5 - La similitude f transforme Γ en le cercle Γ' de centre $O' = f(O) = (-1, 1)$ et de rayon $\rho' = \sqrt{2}$. Il suffit donc de repérer le point O' pour avoir complètement Γ (voir dessin ci-dessous).



Exercice 2

Comme le quadrilatère $ABNM$ est inscrit dans Γ, ses angles opposés sont supplémentaires. En particulier :

$$\widehat{AMN} + \widehat{ABN} = \pi.$$

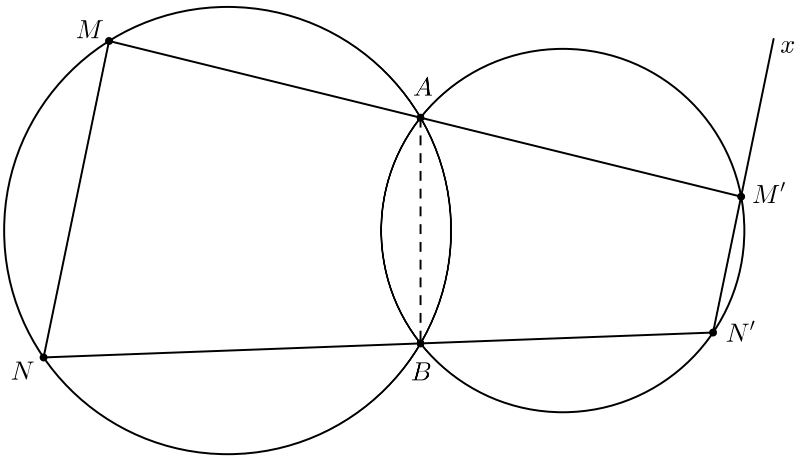
Et comme :

$$\widehat{ABN} + \widehat{ABN'} = \pi,$$

on a :

$$\widehat{AMN} = \widehat{ABN'}.$$

De même, Comme le quadrilatère $ABN'M'$ est inscrit dans Γ', on a $\widehat{ABN'} + \widehat{AM'N'} = \pi$. On en déduit que $\widehat{ABN'} = \widehat{AM'x}$ (*cf.* dessin ci-dessous pour voir ce que représente x). Par suite $\widehat{AMN} = \widehat{AM'x}$, ce qui implique que les droites (MN) et $(M'N')$ sont parallèles.

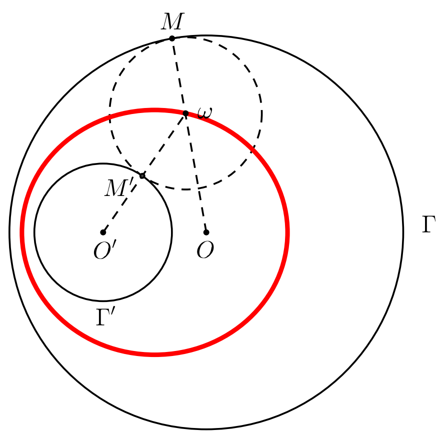


Exercice 3

On suspecte que ω varie sur une ellipse. En tenant compte du fait que les trois points ω, O et M sont alignés et que ω, O' et M' le sont ausi, on a :

$$\begin{aligned}
\omega O + \omega O' &= (OM - \omega M) + (\omega M' + O'M') \\
&= (\omega M' - \omega M) + (OM + O'M') \\
&= OM + O'M' \\
&= \rho + \rho'.
\end{aligned}$$

Effectivement, ω varie sur l'ellipse de foyers O et O' et de grand axe $2a = \rho + \rho'$ (dessinée en rouge ci-dessous).



Licence 3 - Mathématiques
DS - 23 mai 2016
Géométrie 6

Documents non autorisés

Dans tout ce texte $\mathcal{P}$ sera un plan affine euclidien (dirigé par un plan vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{V}}$) muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On convient de noter MN (ou $||\overrightarrow{MN}||$) la distance entre deux points M et N de notre plan affine euclidien $\mathcal{P}$.

Exercice 1

On note f l'application affine de $\mathcal{P}$ dans lui-même qui à tout point M de coordonnées (x, y) associe le point M' de coordonnées (x', y') avec :

$$(*) \qquad \begin{cases} x' = x + \frac{1}{2}y - 1 \\ y' = \frac{1}{2}x + y + 1. \end{cases}$$

1 - Donner la direction $\overrightarrow{f}$ de f ainsi que la matrice A de $\overrightarrow{f}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Montrer que f n'est pas une isométrie du plan euclidien $\mathcal{P}$.

2 - Calculer les valeurs propres λ et μ $(\lambda \leq \mu)$ de A et montrer qu'il existe une base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ dans laquelle la matrice de $\overrightarrow{f}$ est diagonale.

3 - Montrer que f a un et un seul point fixe ; on le notera ω.

Dans le nouveau repère $(\omega, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, notons (X, Y) les coordonnées d'un point M et (X', Y') celles de son tranformé $M' = f(M)$.

4 - Sans utiliser les relations $(*)$, calculer (en justifiant tout bien entendu) (X', Y') en fonction de (X, Y).

Exercice 2

Soient Δ_1 et Δ_2 deux droites affines du plan $\mathcal{P}$. On appelle *distance* entre Δ_1 et Δ_2 le nombre :

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = \inf\{M_1M_2 : M_1 \in \Delta_1 \text{ et } M_2 \in \Delta_2\}.$$

1 - Montrer que si $d(\Delta_1, \Delta_2) > 0$ alors les deux droites Δ_1 et Δ_2 sont parallèles.

On se donne un segment $[AB]$ de longueur 1 et un segment $[CD]$ de longueur $k > 0$. (Ces deux segments nous permettront d'en construire d'autres de longueur 1 ou k.)

2 - Soit Δ une droite. Construire à la règle et au compas une droite Δ' telle que $d(\Delta, \Delta') = k$. (Détailler et justifier toutes les étapes de la construction.)

Soient Δ_1 et Δ_2 deux droites se coupant en un point ω. Pour tout $M \in \mathcal{P}$, on note H_1 et H_2 ses projections orthogonales respectivement sur Δ_1 et Δ_2.

3 - Décrire géométriquement l'ensemble $\Delta = \{M \in \mathcal{P} : MH_1 = kMH_2\}$ et le construire à la règle et au compas.

Exercice 3

Soit Γ un demi-cercle de diamètre $[BC]$. On trace le triangle équilatéral ABC situé dans le demi-plan (délimité par la droite (BC)) qui ne contient pas Γ. Soient M un point du segment $[BC]$ et M' le point de rencontre de Γ avec la droite (AM).

Montrer que $BM = \frac{1}{3}BC$ si, et seulement si, $\text{arc}(BM') = \frac{1}{3}\text{arc}(BC)$.

Corrigé

Exercice 1

1 - La direction $\overrightarrow{f}$ de f est l'application de $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ dans lui-même qui au vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (x, y) dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ associe le vecteur $\overrightarrow{u}'$ de coordonnées :

$$\begin{cases} x' = x + \frac{1}{2}y \\ y' = \frac{1}{2}x + y. \end{cases}$$

Sa matrice dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$. L'application affine f est une isométrie si, et seulement si, sa direction $\overrightarrow{f}$ l'est. Or $||\overrightarrow{i}|| = 1 \neq \frac{\sqrt{5}}{2} = ||\overrightarrow{f}(\overrightarrow{i})||$ qui montre que $\overrightarrow{f}$ n'est pas une isométrie et donc f ne l'est pas non plus. $\diamondsuit$

2 - Les valeurs propres de A (donc de $\overrightarrow{f}$) sont les racines du polynôme en t :

$$\text{dét} \begin{pmatrix} (1-t) & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & (1-t) \end{pmatrix} = (1-t)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2} - t\right)\left(\frac{1}{2} - t\right)$$

c'est-à-dire $\lambda = \frac{1}{2}$ et $\mu = \frac{3}{2}$. Comme les valeurs propres sont distinctes, il existe une base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ dans laquelle la matrice de $\overrightarrow{f}$ est $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$. $\diamondsuit$

3 - Soient (x_0, y_0) les coordonnées d'un point fixe de f (dont on suppose l'existence). Elles doivent satisfaire le système :

$$\begin{cases} x_0 + \frac{1}{2}y_0 - 1 = x_0 \\ \frac{1}{2}x_0 + y_0 + 1 = y_0 \end{cases}$$

dont la résolution immédiate donne l'unique solution $x_0 = -2$ et $y_0 = 2$. Il y a donc un unique point fixe ω dont les coordonnées sont $(-2, 2)$. $\diamondsuit$

4 - Comme (X, Y) et (X', Y') sont les coordonnées respectivement des points M et M' dans le repère $(\omega; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on a $\overrightarrow{\omega M} = X\overrightarrow{u} + Y\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{\omega M'} = X'\overrightarrow{u} + Y'\overrightarrow{v}$. D'où :

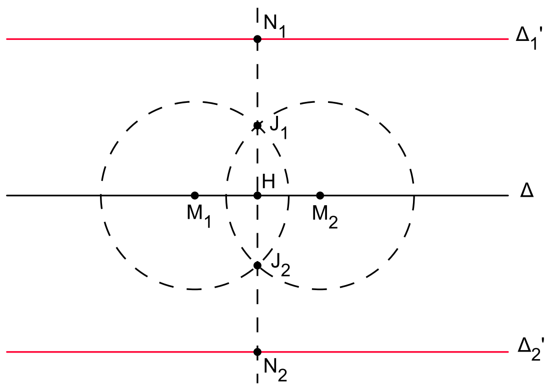
$$\begin{aligned} X'\overrightarrow{u} + Y'\overrightarrow{v} =& \overrightarrow{\omega M'} \\ =& M' - \omega \\ =& f(M) - f(\omega) \ \ (\omega \text{ étant fixé par } f) \\ =& \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\omega M}) \ \ (\overrightarrow{f} \text{ étant la direction de } f) \\ =& \overrightarrow{f}(X\overrightarrow{u} + Y\overrightarrow{v}) \\ =& X\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) + Y\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) \\ =& X\lambda\overrightarrow{u} + Y\mu\overrightarrow{v} \ \ (\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ étant des vecteurs propres de } \overrightarrow{f}) \\ =& \frac{1}{2}X\overrightarrow{u} + \frac{3}{2}Y\overrightarrow{v}. \end{aligned}$$

Ce qui donne $\begin{cases} X' = \frac{1}{2}X \\ \\ Y' = \frac{3}{2}Y. \end{cases}$ $\diamondsuit$

Exercice 2

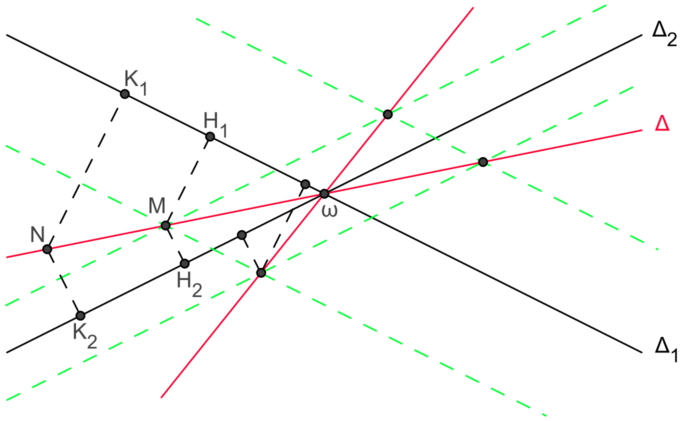
1 - Deux droites dans le plan sont parallèles disjointes, confondues ou sécantes ; ce sont les seules positions relatives possibles et qui s'excluent mutuellement bien entendu. Si Δ_1 et Δ_2 n'étaient pas parallèlles disjointes elles auraient un point commun M ; dans ce cas $d(\Delta_1, \Delta_2) = \inf_{M_1\Delta_1, M_2 \in \Delta_2} d(M_1, M_2) = d(M, M) = 0$, ce qui contredirait l'hypothèse $d(\Delta_1, \Delta_2) > 0$. Les droites Δ_1 et Δ_2 sont donc parallèles disjointes. $\diamondsuit$

2 - Par la première question, les droites cherchées seront parallèles à Δ. Sur celle-ci on prend deux points distincts M_1 et M_2. On trace les cercles de même rayon $\rho > \frac{M_1M_2}{2}$ et de centres respectifs M_1 et M_2 ; ces deux cercles se coupent en deux point J_1 et J_2 et la droite (J_1J_2) coupe perpendiculairement Δ en un point H. Sur (J_1J_2) on construit les points N_1 et N_2 tels que $HN_1 = HN_2 = k$ (on reporte la longueur du segment $[CD]$ qui est donné). Les droites Δ'_1 et Δ'_2 parallèles à Δ et passant respectivement par N_1 et N_2 répondent à la question. $\diamondsuit$



3 - On peut d'abord remarquer que le point ω appartient à l'ensemble cherché Δ. Si M est un autre point de Δ distinct de ω, la droite (ωM) est contenue dans Δ. En effet, soient N un point de (ωM) et K_1, K_2 ses projections orthogonales respectivement sur Δ_1 et Δ_2. Les triangles ωMH_1 et ωNK_1 sont homothétiques (les droites (MH_1) et (NK_1) sont parallèles car toutes deux orthogonales à Δ_1) ; leurs côtés homologues sont donc proportionnels et en particulier on a $\frac{MH_1}{NK_1} = \frac{\omega M}{\omega N}$; de même, les triangles ωMH_2 et ωNK_2 sont homothétiques, d'où $\frac{MH_2}{NK_2} = \frac{\omega M}{\omega N}$. Ces deux égalités nous donnent $\frac{MH_1}{NK_1} = \frac{MH_2}{NK_2}$ c'est-à-dire $k = \frac{MH_1}{MH_2} = \frac{NK_1}{NK_2}$, ce qui montre que $NK_1 = kNK_2$ et donc $N \in \Delta$.

Pour construire l'ensemble Δ, il suffit de construire les points M qui sont à la distance 1 de Δ_2 et à la distance k de Δ_1. Il y en a quatre a priori : ce sont les intersections des deux droites qui sont à la distance 1 de Δ_2 et des deux droites qui sont à la distance k de Δ_1. Les diagonales du parallélogramme formé par ces quatre points se coupent au point ω ; donc l'ensemble Δ qu'on cherche est la réunion des deux droites qui portent ces diagonales. $\diamondsuit$

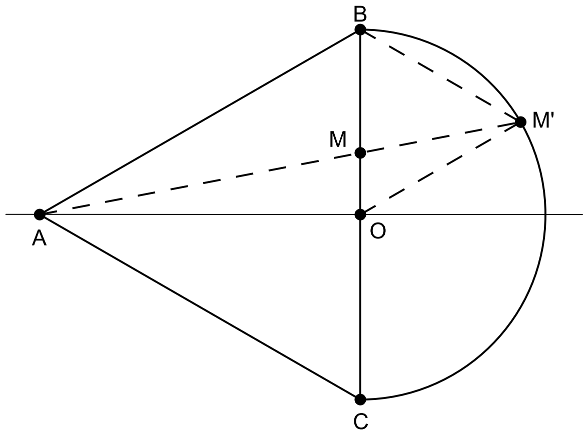


Exercice 3

Posons $BO = \ell > 0$ (où O est le centre du demi-cercle Γ) et notons t la longueur du segment BM. Soit $\theta : t \in [0, \ell] \longmapsto \theta(t) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ l'application qui à t associe la valeur de l'angle $\widehat{M'OB}$; θ est clairement une bijection. Donc pour répondre à la question, il suffit de montrer que $\theta^{-1}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}\ell$ (ce qui est équivalent à $\theta\left(\frac{2}{3}\ell\right) = \frac{\pi}{3}$). Pour $\theta(t) = \widehat{BOM'} = \frac{\pi}{3}$, la droite (OM') est parallèle à (AB). Les triangles ABM et $M'OM$ sont semblables (troisième cas de similitude) ; ce qui donne $\frac{AB}{OM'} = \frac{MB}{MO} = 2$. Par suite :

$$t = \theta^{-1}\left(\frac{\pi}{3}\right) = BM = \frac{MB}{BO} = \frac{2}{3}\ell.$$

Le point M est donc tel que $BM = \frac{BC}{3}$. ♢



Licence 3 - Mathématiques
DS de rattrapage - 27 Juin 2016
Géométrie 6

Documents non autorisés

Dans tout ce texte $\mathcal{P}$ sera un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On convient de noter MN la distance entre deux points M et N.

Exercice 1

On note f l'application affine de $\mathcal{P}$ dans lui-même qui à tout point M de coordonnées (x, y) associe le point M' de coordonnées (x', y') avec :

$$\begin{cases} x' = x - y - 1 \\ y' = x + y. \end{cases}$$

1 - Donner la direction $\overrightarrow{f}$ de f ainsi que la matrice A de $\overrightarrow{f}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

2 - Montrer que f a un point fixe ω dont on déterminera les coordonnées (x_0, y_0).

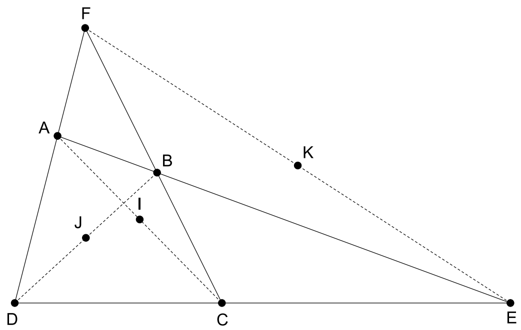
3 - Montrer que f est une similitude du plan $\mathcal{P}$ dont on précisera le centre, le rapport k et l'angle θ.

4 - Sans faire de calcul et en usant d'un raisonnement purement géométrique, montrer que la matrice A n'a aucune valeur propre réelle.

5 - Déterminer la figure Γ' transformée du cercle Γ de centre l'origine O et de rayon $\rho = 1$.

Exercice 2

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que les droites (AB) et (CD) se coupent en E et (AD) et (BC) se coupent en F (*cf.* figure). (On dira que $ABCD$ est un *quadrilatère complet.*) On note I, J et K les milieux respectifs des segments $[AC]$, $[BD]$ et $[EF]$. L'objet de l'exercice est de démontrer le Théorème de Newton : *les trois points I, J et K sont alignés.*



Soient G et H les points du plan tels que les quadrilatères $FDGB$ et $FAHC$ soient des parallélogrammes. Soient h l'homothétie de centre E qui envoie le point D sur C, h' l'homothétie de même centre qui envoie B sur A et $\phi = h \circ h'$.

1 - Montrer que ϕ transforme la droite (BG) en la droite (HC).

2 - Quelle est l'image de la droite (DG) par ϕ ? En déduire le point $\phi(G)$.

3 - Montrer que les points E, G et H sont alignés.

4 - Soit f l'homothétie de centre F et de rapport $\frac{1}{2}$. Quelles sont les images des points G et H par f ? En déduire le résultat (*i.e.* la conclusion du théorème de Newton).

Corrigé

Exercice 1

1 - La direction $\overrightarrow{f}$ de f est l'application de $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ dans lui-même qui au vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (x, y) associe le vecteur $\overrightarrow{u}'$ de coordonnées $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y. \end{cases}$ Sa matrice dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. ♢

2 - Les coordonnées (x_0, y_0) d'un point fixe doivent vérifier le système linéaire :

$$\begin{cases} x_0 - y_0 - 1 = x_0 \\ x_0 + y_0 = y_0. \end{cases}$$

Celui-ci admet une solution unique $x_0 = 0$ et $y_0 = -1$. L'application f admet donc un seul point fixe qui est $\omega = (0, -1)$. ♢

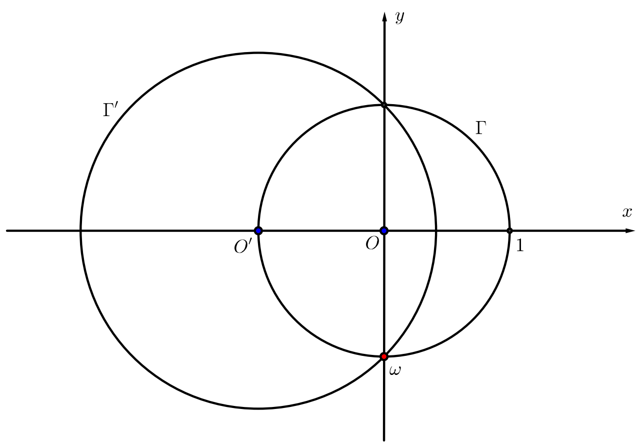
3 - L'application affine f est une similitude si, et seulement si, sa direction $\overrightarrow{f}$ l'est. Or la matrice de cette dernière s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}.$$

Donc $\overrightarrow{f}$ est une similitude de centre O, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{4}$. Par suite f est aussi une similitide de centre son point fixe ω, de rapport $k = \sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$. ♢

4 - Dire que A a une valeur propre réelle λ, c'est dire qu'il existe un vecteur non nul $\overrightarrow{u}$ tel que $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \lambda \overrightarrow{u}$. Or l'angle $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})\right) = \frac{\pi}{4}$ puisque $\overrightarrow{f}$ est une similitude d'angle $\frac{\pi}{4}$. Donc l'égalité $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \lambda \overrightarrow{u}$ n'est jamais possible. Par suite la matrice A n'a aucune valeur propre réelle. ♢

5 - Une similitude f de rapport k transforme un cercle Γ de centre Ω et de rayon ρ en le cercle de centre $\Omega' = f(\Omega)$ et de rayon $\rho' = k\rho$. Donc la figure Γ' est le cercle de centre $O' = f(O) = (-1, 0)$ et de rayon $\rho' = \sqrt{2}$.



$\diamondsuit$

Exercice 2

1 - L'homothétie h' envoie la droite (BG) sur une droite qui lui est parallèle et passant par le point $A = h'(B)$; c'est donc la droite (AD). Celle-ci se transforme par h en une droite qui lui est parallèle et qui passe par $C = h(D)$; c'est donc la droite (HC). En résumé on a $\phi((BG)) = (HC)$. $\diamondsuit$

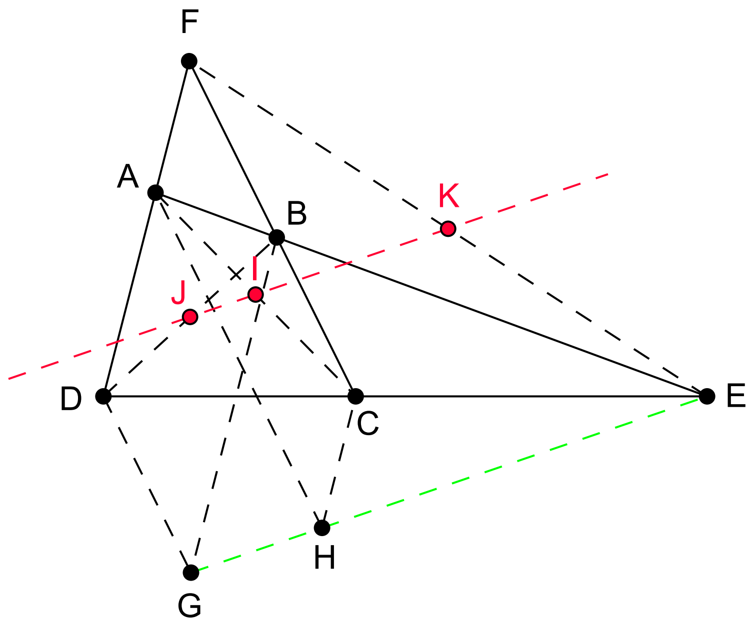
2 - Comme h et h' ont même centre (le point E), elles commutent ; on a donc aussi $\phi = h' \circ h$. L'homothétie h envoie la droite (DG) sur une droite qui lui est parallèle et passant par le point $C = h(D)$; c'est donc la droite (BC). Celle-ci se transforme par h' en une droite qui lui est parallèle et qui passe par $A = h'(B)$; c'est donc la droite (AH). En résumé on a $\phi((DG)) = (AH)$.

Comme on vient de le voir $\phi((BG)) = (HC)$ et $\phi((DG)) = (AH)$. On a donc :

$$\phi(G) = \phi((BG) \cap (DG)) = (HC) \cap (AH) = H.$$

3 - L'homothétie ϕ est centrée en E et envoie le point G sur le point H ; les trois points E, H et G sont donc alignés. $\diamondsuit$

4 - Le quadrilatère $FDGB$ est un parallélogramme, donc ses diagonales $[DB]$ et $[FG]$ se coupent en un point qui est leur milieu commun et qui n'est rien d'autre que le point J (milieu de $[DB]$ par hypothèse). Donc $f(G) = J$. De la même manière on montre que $f(H) = I$. Comme K est le milieu de $[FE]$ on a $f(E) = K$. L'homothétie f transforme donc les trois points alignés H, G et E respectivement en I, J et K. Il en résulte que les points I, J et K sont alignés, ce qui démontre le théorème de Newton. $\diamondsuit$



Licence 3 - Mathématiques
DS - 13 février 2017
Géométrie 6

Aucun document n'est autorisé

Dans tout ce texte, $\mathcal{P}$ sera un plan affine euclidien (dirigé par un plan vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{V}}$) muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Exercice 1

On note f l'application affine de $\mathcal{P}$ dans lui-même qui à tout point M de coordonnées (x, y) associe le point M' de coordonnées (x', y') données par :

$$\begin{cases} x' = \sqrt{3}x - y + 3 - \sqrt{3} \\ y' = x + \sqrt{3}y + 1 - 2\sqrt{3}. \end{cases}$$

1 - Montrer que f a un et un seul point fixe ; on le notera ω.

2 - Dire pourquoi l'application affine f n'est pas linéaire.

3 - Montrer que f est une similitude du plan euclidien $\mathcal{P}$ dont on précisera le centre, le rapport k et l'angle θ.

4 - Quell est l'image Δ' par f de la droite Δ d'équation $x + y = 3$?

5 - Quell est l'image Γ' par f du cercle Γ centré à l'origine et de rayon $\rho = 1$?

Exercice 2

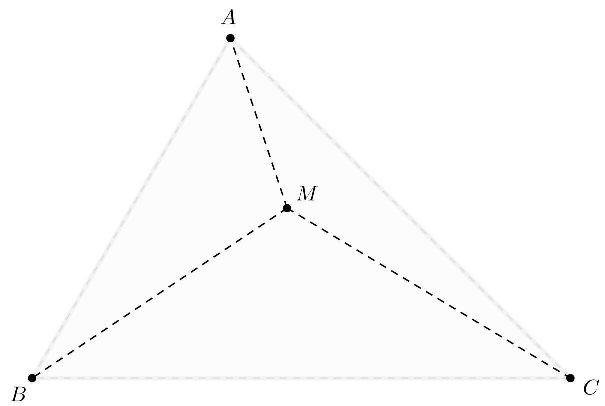
Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe quelconque. La bissectrice de l'angle $\widehat{BAD}$ coupe celles des angles $\widehat{ADC}$ et $\widehat{ABC}$ respectivement en M et N et la bissectrice de $\widehat{BCD}$ coupe celles des angles $\widehat{ADC}$ et $\widehat{ABC}$ respectivement en Q et P.

Montrer que le quadrilatère $MNPQ$ est inscriptible dans un cercle.

Exercice 3

Soit M un point situé à l'intérieur d'un triangle non dégénéré ABC et dont on notera p le périmètre.

Montrer que la somme $MA + MB + MC$ est comprise entre $\frac{p}{2}$ et p.



Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation de la copie.

Corrigé

Exercice 1

1 - Un point fixe ω a ses coordonnées (x_0, y_0) qui vérifient le système linéaire :

$$\begin{cases} \sqrt{3}x_0 - y_0 + 3 - \sqrt{3} = x_0 \\ \\ x_0 + \sqrt{3}y_0 + 1 - 2\sqrt{3} = y_0. \end{cases}$$

Les solutions sont de façon évidente $x_0 = 1$ et $y_0 = 2$. Donc $\omega = (1, 2)$ est un point fixe et il est unique.

2 - Si l'application f était linéaire, elle fixerait l'origine O. Or son seul point fixe (question 1) est le point $\omega = (1, 2)$. Elle n'est donc pas linéaire.

3 - Considérons le nouveau repère $(\omega; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Les coordonnées de $M = (x, y)$ y deviennent $X = x - 1$ et $Y = y - 2$; de même celles de son transformé $M' = (x', y')$ y sont $X' = x' - 1$ et $Y' = y' - 2$. Un calcul simple montre que le système :

$$\begin{cases} x' = \sqrt{3}x - y + 3 - \sqrt{3} \\ \\ y' = x + \sqrt{3}y + 1 - 2\sqrt{3} \end{cases}$$

est exactement le même que :

$$\begin{cases} x' - 1 = \sqrt{3}(x - 1) - (y - 2) \\ y' - 2 = (x - 1) + \sqrt{3}(y - 2) \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

On voit donc qu'on passe de M à M' par la rotation de centre ω et d'angle $\theta = \frac{\pi}{6}$ suivie de l'homothétie de centre ω et de rapport $k = 2$. La transformation f est donc la similitude de centre ω, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

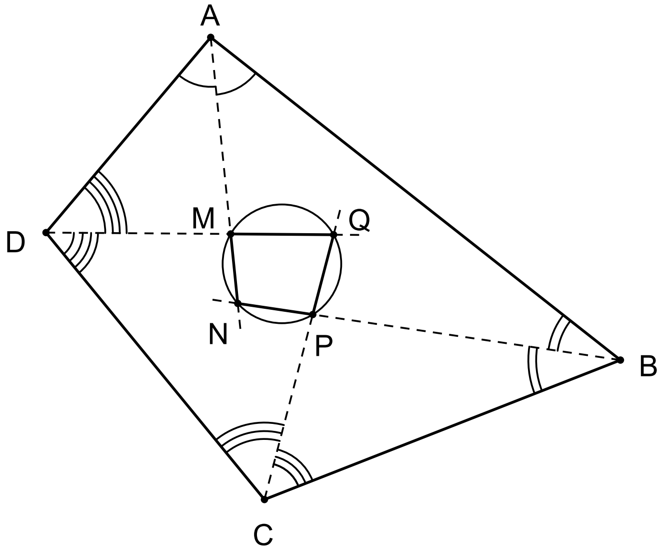
4 - Une similitude transforme une droite en une droite. Pour déterminer Δ', il suffit donc de connaître les transformés respectifs A' et B' de deux points A et B de Δ, par exemple $A = (0, 3)$ et $B = (3, 0)$. Un calcul immédiat donne $A' = (-\sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$ et $B' = (3 + 2\sqrt{3}, 4 - 2\sqrt{3})$. L'équation de Δ' est donc :

$$y = (\sqrt{3} - 2)x + 4 - \sqrt{3}.$$

5 - Le transformé par f du cercle Γ de centre $O = (0, 0)$ et de rayon $\rho = 1$ est le cercle Γ' de centre $O' = f(O)$ et de rayon $\rho' = k\rho$, c'est-à-dire $O' = (3 - \sqrt{3}, 1 - 2\sqrt{3})$ et $\rho' = 2$.

Exercice 2

Faisons d'abord un dessin clair. Il va nous permettre de bien voir comment montrer l'inscriptibilité de notre quadrilatère.



Il suffit de démontrer que deux angles opposés du quadrilatère $MNPQ$, par exemple $\widehat{NMQ}$ et $\widehat{NPQ}$, sont supplémentaires. À cet effet on a :

$$\widehat{NMQ} = \widehat{DMA} = \pi - (\widehat{MAD} + \widehat{MDA}) \text{ et } \widehat{NPQ} = \widehat{CPB} = \pi - (\widehat{PCB} + \widehat{PBC}).$$

D'où :

$$\begin{aligned}\widehat{NMQ} + \widehat{NPQ} &= 2\pi - \left(\widehat{MAD} + \widehat{MDA} + \widehat{PCB} + \widehat{PBC}\right) \\ &= 2\pi - \frac{\widehat{DAB} + \widehat{ABC} + \widehat{BCD} + \widehat{CDA}}{2} \\ &= 2\pi - \pi \\ &= \pi.\end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration. $\diamondsuit$

Exercice 3

• Dans les trois triangles MAB, MBC et MCA on a :

$$\begin{cases} AB \leq MA + MB \\ BC \leq MB + MC \\ CA \leq MC + MA. \end{cases}$$

La somme, membre à membre, de ces trois inégalités donne :

$$p = AB + BC + CA \leq 2(MA + MB + MC),$$

c'est-à-dire :

$$MA + MB + MC \geq \frac{p}{2}.$$

• Notons L le point d'intersection de la droite (BM) avec le segment AC, K celui de (CM) avec AB et N celui (AM) avec BC.

Nous utiliserons seulement l'inégalité du triangle et l'égalité $XU + UY = XY$ valable lorsque le point U est sur le segment $[XY]$. Pour suivre le calcul, il est conseillé de regarder en même temps la figure ci-dessous. On a :

$$\begin{aligned} AB + AC &= AB + (AL + LC) \\ &= (AB + AL) + LC \\ &\geq BL + LC \\ &= (MB + ML) + LC \\ &= MB + (ML + LC) \\ &\geq MB + MC \end{aligned}$$

En résumé :

$$AB + AC \geq MB + MC.$$

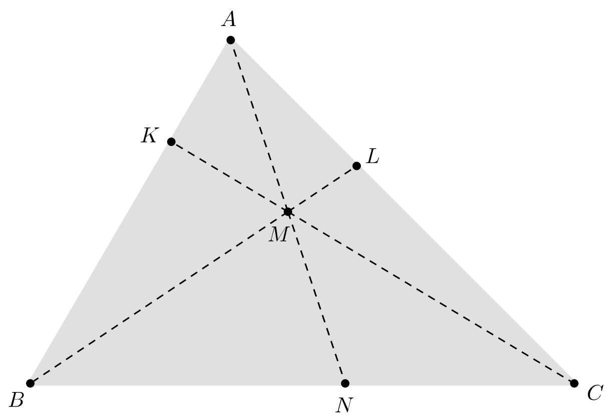
De la même manière, en faisant intervenir les point K et N, on établit les inégalités $CA + CB \geq MA + MB$ et $BA + BC \geq MA + MC$. On a donc les trois inégalités :

$$\begin{cases} AB + AC \geq MB + MC \\ BA + BC \geq MA + MC \\ CA + CB \geq MA + MB. \end{cases}$$

En les sommant membre à membre, on obtient $2(AB+BC+CA) \geq 2(MA+MB+MC)$, c'est-à-dire :

$$MA + MB + MC \leq p.$$

Ce qui termine la démonstration. $\diamondsuit$



Licence 3 - Mathématiques
DS - 7 avril 2017
Géométrie 6

Aucun document n'est autorisé

$\mathcal{P}$ sera l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire usuel $\langle(x,y),(x',y')\rangle = xx'+yy'$, de sa structure affine canonique et du repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ avec $\overrightarrow{i}=(1,0)$ et $\overrightarrow{j}=(0,1)$.

Exercice 1

On note f l'application affine de $\mathcal{P}$ dans lui-même qui à tout point M de coordonnées (x,y) associe le point M' de coordonnées (x',y') données par :

$$(*) \qquad \begin{cases} x' = x+2y+2 \\ y' = 2x+y-2. \end{cases}$$

1 - Donner la direction $\overrightarrow{f}$ de f ainsi que la matrice A de $\overrightarrow{f}$ dans la base $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.

2 - Calculer les valeurs propres λ et μ ($\lambda \leq \mu$) de A et montrer qu'il existe une base $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ (qu'on déterminera explicitement) dans laquelle la nouvelle matrice D de $\overrightarrow{f}$ est diagonale.

3 - Montrer que f n'est pas une isométrie du plan euclidien $\mathcal{P}$.

4 - Montrer que f a un et un seul point fixe ; on le notera ω.

Notons (X,Y) les coordonnées d'un point M dans le nouveau repère $(\omega;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ et (X',Y') celles de son transformé $M'=f(M)$.

5 - Sans utiliser les relations $(*)$, calculer (en justifiant bien entendu) les coordonnées (X',Y') en fonction de (X,Y).

Exercice 2

Soient Γ un cercle de centre O et de rayon $\rho>0$ et S un point extérieur à Γ. On note A et B les points d'intersection de la droite (SO) avec le cecle Γ. (On suppose $SA>SB$ et on pose $k=\frac{SA}{SB}$.) Si $M\in\Gamma$, M_1 sera le point de Γ diamétralement opposé à M. Pour $M\in\Gamma\setminus\{A,B\}$, on notera M' le point d'intersection des droites (AM_1) et (SM).

1 - Quelle est la nature du quadrilatère AM_1BM ?

2 - Quel est le lieu géométrique Γ' où varie M' lorsque M varie sur $\Gamma\setminus\{A,B\}$?

3 - Dessiner (de manière précise et claire) Γ'.

4 - Vers quel point tend M' lorsque $M\in\Gamma\setminus\{A,B\}$ tend vers A ? Même question lorsque M tend vers B.

Exercice 3

Dans le repère $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ les coordonnées d'un point variable M seront notées (x,y).

1 - Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M dont les coordonnées x et y vérifient l'équation : $y^2=\frac{-x^2+6x-5}{4}$.

Montrer que $\mathcal{E}$ est une ellipse dont on déterminera le centre ω, les paramètres $2a$ (grand axe), $2b$ (petit axe) ainsi que les foyers F et F'. Dessiner cette ellipse.

2 - Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des points M dont les coordonnées x et y vérifient l'équation : $y^2=4x^2-8x-12$.

i) Montrer que $\mathcal{H}$ est une hyperbole dont on déterminera le centre ω et les foyers F et F'.

ii) Dessiner l'hyperbole $\mathcal{H}$ ainsi que ses deux asymptotes.

Corrigé

Exercice 1

1 - La direction $\overrightarrow{f}$ de f est l'application de $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ dans lui-même qui au vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (x, y) dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ associe le vecteur $\overrightarrow{u}'$ de coordonnées :

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + y. \end{cases}$$

Sa matrice A dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2 - Les valeurs propres de A (donc de $\overrightarrow{f}$) sont les racines du polynôme en t :

$$\text{dét}\begin{pmatrix} (1-t) & 2 \\ 2 & (1-t) \end{pmatrix} = (1-t)^2 - 4 = (t+1)(t-3).$$

Ce sont donc $\lambda = -1$ et $\mu = 3$. Un calcul immédiat montre que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ sont des vecteurs propres associés respectivement à λ et μ. Dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ l'application linéaire $\overrightarrow{f}$ a pour matrice $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3 - On a $||\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})|| = ||\overrightarrow{3}\overrightarrow{v}|| = 3||\overrightarrow{v}||$. Donc $\overrightarrow{f}$ n'est pas une isométrie et par suite l'application affine f ne l'est pas non plus.

4 - Soient (x_0, y_0) les coordonnées d'un point fixe de f. Elles vérifient le système :

$$\begin{cases} x_0 + 2y_0 + 2 = x_0 \\ 2x_0 + y_0 - 2 = y_0 \end{cases}$$

dont la résolution immédiate donne l'unique solution $x_0 = 1$ et $y_0 = -1$. Il y a donc un unique point fixe ω dont les coordonnées sont $(1, -1)$.

5 - Comme (X, Y) et (X', Y') sont les coordonnées respectivement des points M et M' dans le repère $(\omega; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on a $\overrightarrow{\omega M} = X\overrightarrow{u} + Y\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{\omega M'} = X'\overrightarrow{u} + Y'\overrightarrow{v}$. D'où :

$$\begin{aligned} X'\overrightarrow{u} + Y'\overrightarrow{v} =& \overrightarrow{\omega M'} \\ =& M' - \omega \\ =& f(M) - f(\omega) \ \ (\omega \text{ étant fixé par } f) \\ =& \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\omega M}) \ \ (\overrightarrow{f} \text{ étant la direction de } f) \\ =& \overrightarrow{f}(X\overrightarrow{u} + Y\overrightarrow{v}) \\ =& X\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) + Y\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) \\ =& -X\overrightarrow{u} + 3Y\overrightarrow{v} \ \ (\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ étant des vecteurs propres de } \overrightarrow{f}). \end{aligned}$$

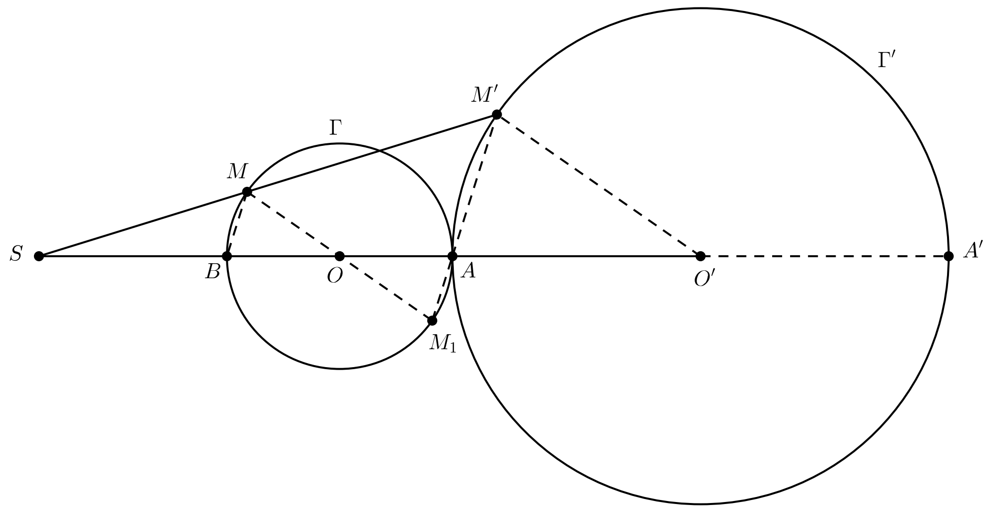
Ce qui donne $X' = -X$ et $Y' = 3Y$. ♢

Exercice 2

1 - Le quadrilatère AM_1BM a pour diagonales les diamètres AB et MM_1 du cercle Γ. C'est donc un rectangle.

2 - Comme AM_1BM est un rectangle, les droites (BM) et (AM_1) sont parallèles. Par suite le triangle SAM' s'obtient à partir du triangle SBM par l'homothétie h de centre S et de rapport $k = \frac{SA}{SB}$. D'où $\overrightarrow{SM'} = k\overrightarrow{SM}$. Le point M' varie donc sur le cercle Γ' de centre O' tel que $\overrightarrow{SO'} = k\overrightarrow{SO}$ et de rayon $\rho' = k\rho$. Plus précisément, lorsque M décrit l'ensemble $\Gamma \setminus \{A, B\}$ tout entier, M' décrit l'ensemble $\Gamma' \setminus \{A', A\}$ tout entier. (Ici A' est le point diamétralement opposé à A dans le cercle Γ'.)

3 - Ci-dessous sont dessinés les objets géométriques qui interviennent dans l'exercice.



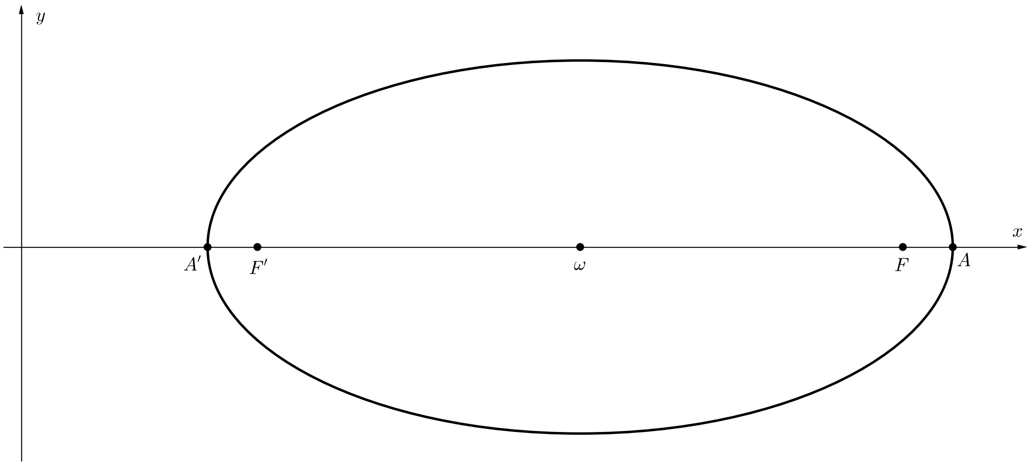
4 - Lorsque M tend vers A, M' tend vers A' (*cf.* dessin ci-dessus) et lorsque M tend vers B, M' tend vers A. On peut donc dire, puisque l'homothétie h est continue, que lorsque M varie sur Γ tout entier, M' varie sur Γ' tout entier. Ce dernier n'est rien d'autre que le cercle de rayon $k\rho$ et tangent extérieurement à Γ au point A. $\diamondsuit$

Exercice 3

1 - Un calcul simple permet de mettre l'expression $y^2 = \frac{-x^2+6x-5}{4}$ sous la forme plus réduite, et surtout plus reconnaissable :

$$\frac{(x-3)^2}{4} + y^2 = 1.$$

Elle décrit l'ellipse $\mathcal{E}$ de centre $\omega = (3, 0)$, de grand axe $2a = AA' = 4$, de petit axe $2b = 2$ et de foyers $F = (3 + \sqrt{3}, 0)$ et $F' = (3 - \sqrt{3}, 0)$.



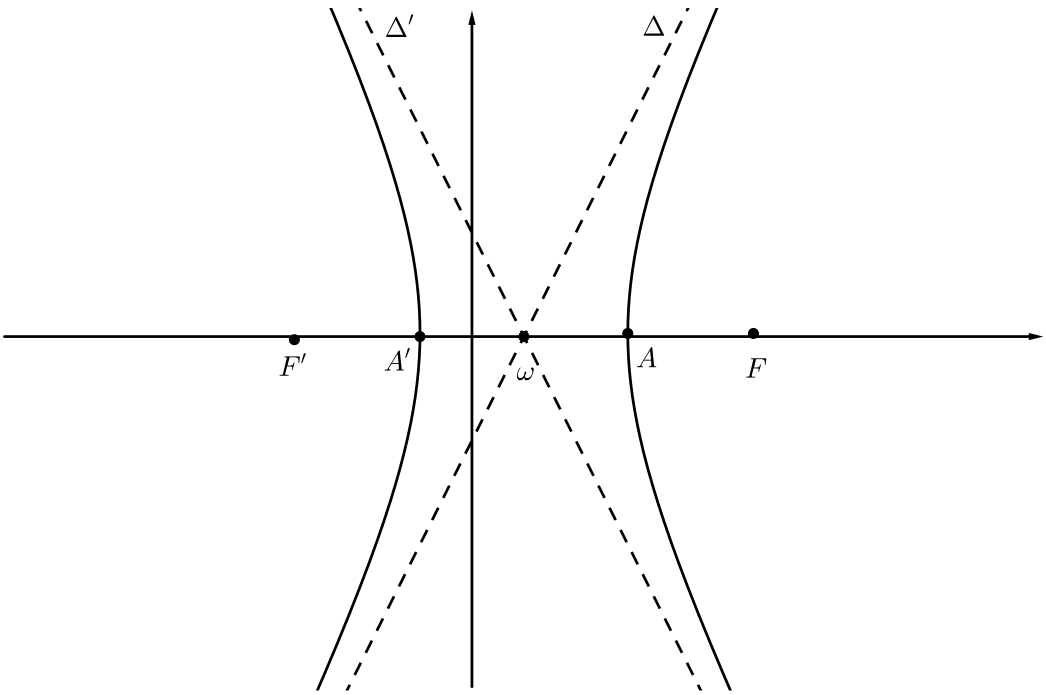
2 - i) De même, un calcul simple permet de mettre l'expression $y^2 = 4x^2 - 8x - 12$ sous la forme plus simple à interpréter :

$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

Cette équation décrit l'hyperbole $\mathcal{H}$ de centre $\omega = (1,0)$, de paramètres $a = 2$, $b = 4$ et de foyers $F = (1 + 2\sqrt{5}, 0)$ et $F' = (1 - 2\sqrt{5}, 0)$.

2 - ii) Les deux asymptotes Δ et Δ' ont pour équations respectives :

$$Y = 2(X-1) \quad \text{et} \quad Y = -2(X-1).$$



Licence 3 - Mathématiques
DS - 19 Juin 2017
Géométrie 6

Aucun document n'est autorisé

$\mathcal{P}$ sera $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire usuel $\langle (x,y),(x',y')\rangle = xx'+yy'$, de sa structure affine canonique et du repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ avec $\overrightarrow{i}=(1,0)$ et $\overrightarrow{j}=(0,1)$.

Exercice 1

On note f l'application affine de $\mathcal{P}$ dans lui-même qui à tout point M de coordonnées (x,y) associe le point M' de coordonnées (x',y') données par :

$$(*)\qquad \begin{cases} x' = 2x+y+2 \\ y' = x+y+3. \end{cases}$$

1 - Donner la direction $\overrightarrow{f}$ de f ainsi que la matrice A de $\overrightarrow{f}$ dans la base $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.

2 - Montrer que A a deux valeurs propres distinctes λ et μ ($\lambda>\mu>0$) et en déduire qu'il existe une base $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ dans laquelle la matrice D de $\overrightarrow{f}$ est diagonale. (Il n'est pas demandé de déterminer explicitement $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.)

3 - Montrer que la base $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ est orthogonale. (*Remarquer que la matrice A est symétrique, et donc vérifie $\langle A(\overrightarrow{\xi}),\overrightarrow{\zeta}\rangle = \langle \overrightarrow{\xi},A(\overrightarrow{\zeta})\rangle$ pour tous vecteurs $\overrightarrow{\xi}$ et $\overrightarrow{\zeta}$.*)

4 - Montrer que f n'est pas une similitude du plan euclidien $\mathcal{P}$.

5 - Montrer que f a un et un seul point fixe ; on le notera ω.

6 - Quelle est l'image Γ' par f du cercle Γ de centre ω et de rayon $\rho=1$?

Exercice 2

Soient Ax et Ay deux demi-droites telles que l'angle (Ax,By) soit de mesure $\frac{\pi}{3}$. Sur Ax et Ay on choisit respectivement deux points B et C tels $AB=AC=a$ (a étant un nombre réel strictement positif).

1 - Si M est un point intérieur à ce triangle, on note d_1 sa distance au côté AB, d_2 celle au côté BC et d_3 celle au côté CA.

Montrer que la quantité $\delta = d_1+d_2+d_3$ est une constante indépendante de la position de M à l'intérieur du triangle ABC. (*Évaluer de deux manières différentes l'aire du triangle ABC.*)

2 - Cette fois-ci M est à l'extérieur de ABC mais à l'intérieur de l'angle (Ax,Ay) (il est conseillé de faire un dessin) et d_1, d_2 et d_3 sont ses distances respectives aux droites (AB), (BC) et (CA).

Montrer que la quantité $\delta' = d_1-d_2+d_3$ est une constante indépendante de la position de M comme choisi. (*Utiliser la question 1.*)

Exercice 3

Dans le repère $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ les coordonnées d'un point variable M seront notées (x,y).

1 - Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M défini par l'équation : $y^2=-4x^2+8x+2y-1$.

Montrer que $\mathcal{E}$ est une ellipse dont on déterminera le centre ω, les paramètres $2a$ (grand axe), $2b$ (petit axe) ainsi que les foyers F et F'. Dessiner cette ellipse.

2 - Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des points M défini par l'équation : $y^2=\frac{1}{4}\left(x^2+2x-8y-7\right)$.

i) Montrer que $\mathcal{H}$ est une hyperbole dont on déterminera le centre ω et les foyers F et F'.

ii) Dessiner l'hyperbole $\mathcal{H}$ ainsi que ses deux asymptotes.

Corrigé

Exercice 1

1 - La direction $\overrightarrow{f}$ de f est l'application de $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ dans lui-même qui au vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (x, y) dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ associe le vecteur $\overrightarrow{u}'$ de coordonnées :

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + y. \end{cases}$$

Sa matrice A dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2 - Les valeurs propres de A (donc de $\overrightarrow{f}$) sont les racines du polynôme en t :

$$\text{dét} \begin{pmatrix} (2-t) & 1 \\ 1 & (1-t) \end{pmatrix} = t^2 - 3t + 1.$$

Ce sont donc $\lambda = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\mu = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Comme λ et μ sont distinctes, il existe deux vecteurs linéairement indépendants $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ tels que $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \lambda\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) = \mu\overrightarrow{v}$. Dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ la matrice est $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

3 - Comme la matrice A est symétrique, l'application $\overrightarrow{f}$ l'est aussi. On a donc :

$$\lambda\langle\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle = \langle\lambda\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle = \langle\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}), \overrightarrow{v}\rangle = \langle\overrightarrow{u}, \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})\rangle = \langle\overrightarrow{u}, \mu\overrightarrow{v}\rangle = \mu\langle\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle.$$

On en déduit $(\lambda - \mu)\langle\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle = 0$. Ce qui implique $\langle\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle = 0$ puisque $\lambda \neq \mu$. La base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est donc orthogonale. ♢

Quitte à remplacer $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ par leurs normalisés respectifs $\frac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||}$ et $\frac{\overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{v}||}$, on peut en fait supposer qu'ils sont de norme 1. C'est ce qu'on fera dans toute la suite. Ainsi, la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ sera orthonormée.

4 - L'application affine f est une similitude si, et seulement si, sa direction $\overrightarrow{f}$ l'est. Et si $\overrightarrow{f}$ était une similitude, il existerait une constante $k > 0$ telle que $||\overrightarrow{f}(\overrightarrow{\xi})|| = k||\overrightarrow{\xi}||$ pour tout vecteur $\overrightarrow{\xi}$. Or $||\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})|| = \lambda||\overrightarrow{u}||$ et $||\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})|| = \mu||\overrightarrow{v}||$ avec $\lambda \neq \mu$; donc $\overrightarrow{f}$ n'est pas une similitude et par suite f ne l'est pas non plus. ♢

5 - Le point ω est fixé par f si ses coordonnées (x, y) vérifient le système :

$$\begin{cases} 2x + y + 2 = x \\ x + y + 3 = y. \end{cases}$$

La résolution donne $x = -3$ et $y = 1$. On a donc un unique point fixe $\omega = (-3, 1)$. ♢

6 - Notons (X, Y) les coordonnées d'un point M dans le repère $(\omega; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et (X', Y') celles de son transformé M' par f (toujours dans le même repère). On a :

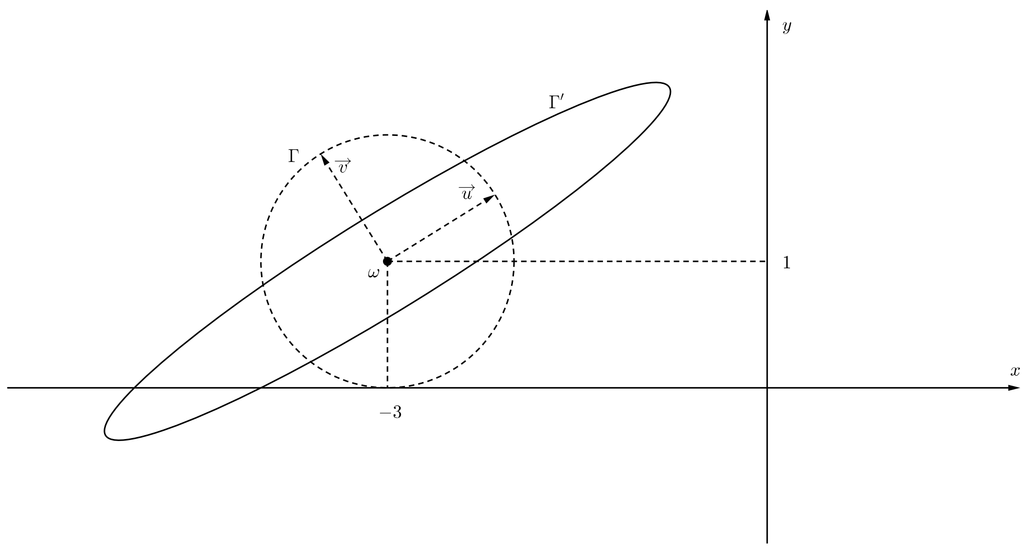
$$\begin{aligned}
X'\overrightarrow{u} + Y'\overrightarrow{v} &= \overrightarrow{\omega M'} \\
&= M' - \omega \\
&= f(M) - f(\omega) \ \ (\omega \text{ étant fixé par } f) \\
&= \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\omega M}) \ \ (\overrightarrow{f} \text{ étant la direction de } f) \\
&= \overrightarrow{f}(X\overrightarrow{u} + Y\overrightarrow{v}) \\
&= X\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) + Y\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) \\
&= X\lambda\overrightarrow{u} + Y\mu\overrightarrow{v} \ \ (\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ étant des vecteurs propres de } \overrightarrow{f}) \\
&= \frac{3+\sqrt{5}}{2}X\overrightarrow{u} + \frac{3-\sqrt{5}}{2}Y\overrightarrow{v}.
\end{aligned}$$

Ce qui donne $X' = \lambda X = \frac{3+\sqrt{5}}{2}X$ et $Y' = \mu Y = \frac{3-\sqrt{5}}{2}Y$. (D'où $X = \frac{X'}{\lambda}$ et $Y = \frac{Y'}{\mu}$). $\diamondsuit$

Dans le repère orthonormé $(\omega; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ le cercle Γ a pour équation $X^2 + Y^2 = 1$. Son transformé Γ' par f a pour équation $\left(\frac{X'}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{Y'}{\mu}\right)^2 = 1$, c'est-à-dire :

$$\frac{X'^2}{\lambda^2} + \frac{Y'^2}{\mu^2} = 1.$$

C'est donc l'ellipse centrée en ω de grand axe $2a = 2\lambda$ et de petit axe $2b = 2\mu$. $\diamondsuit$



Exercice 2

1 - Comme l'angle $\widehat{BAC}$ vaut $\frac{\pi}{3}$ et que $AB = BC$, le triangle ABC est équilatéral. Son aire $\mathcal{A}(ABC)$ vaut donc $\frac{h \cdot BC}{2}$ où h est la hauteur (de ABC). Mais elle est aussi égale à la somme des aires des triangles MAB, MBC et MCA *i.e.* :

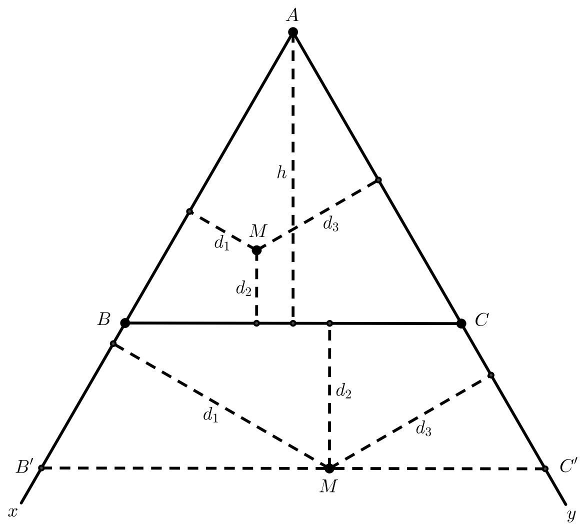
$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{d_1 \cdot AB}{2} + \frac{d_2 \cdot BC}{2} + \frac{d_3 \cdot CA}{2} = \frac{(d_1 + d_2 + d_3) \cdot BC}{2}.$$

Ce qui donne $d_1 + d_2 + d_3 = h$. $\diamondsuit$

2 - Maintenant le point M est à l'extérieur du triangle ABC mais à l'intérieur de l'angle (Ax, Ay). Par M menons la parallèle au côté BC ; elle coupe les droites (Ax) et (Ay) respectivement en B' et C'. Le triangle $AB'C'$ est alors équilatéral. D'après la première question on a :

$$\mathrm{dist}(M,(AB')) + \mathrm{dist}(M,(B'C')) + \mathrm{dist}(M,(C'A)) = \text{hauteur de } AB'C'$$

i.e. $\mathrm{dist}(M,(AB')) + 0 + \mathrm{dist}(M,(C'A)) = d_1 + d_3 = h + d_2$. (Ici $\mathrm{dist}(M,(B'C')) = 0$ car le point M est sur le côté $B'C'$.) D'où $d_1 - d_2 + d_3 = h$. $\diamondsuit$

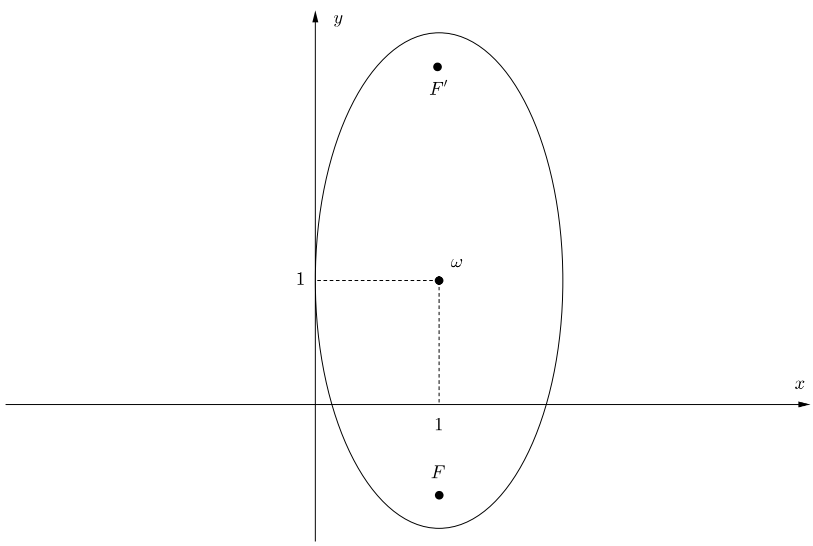


Exercice 3

1 - Un calcul simple permet de mettre l'expression $y^2 = -4x^2 + 8x + 2y - 1$ sous la forme plus réduite, et surtout plus reconnaissable :

$$(x-1)^2 + \frac{(y-1)^2}{4} = 1.$$

Elle décrit l'ellipse $\mathcal{E}$ de centre $\omega = (1,1)$, de petit axe $2a = 2$, de grand axe $2b = 4$ et de foyers $F = (1, 1-\sqrt{3})$ et $F' = (1, 1+\sqrt{3})$.



2 - i) De même, un calcul simple permet de mettre l'expression :

$$y^2 = \frac{1}{4}\left(x^2 + 2x - 8y - 7\right)$$

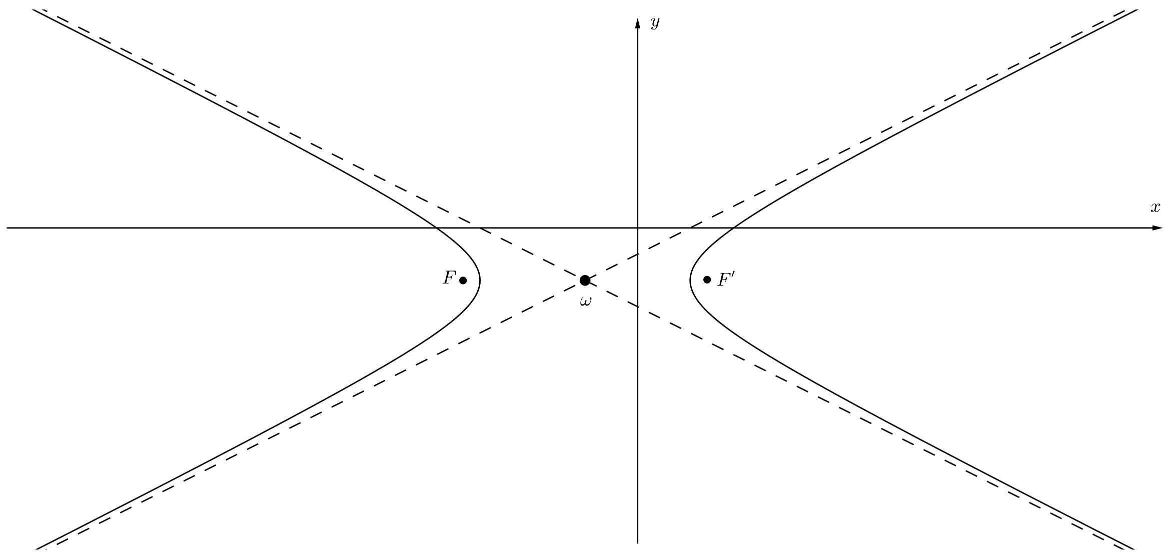
sous la forme plus simple à interpréter :

$$\frac{(x+1)^2}{4} - (y+1)^2 = 1.$$

Cette équation décrit l'hyperbole $\mathcal{H}$ de centre $\omega = (-1, -1)$, de paramètres $a = 2$, $b = 1$ et de foyers $F = (-1 - \sqrt{5}, -1)$ et $F' = (-1 + \sqrt{5}, -1)$.

2 - ii) Les deux asymptotes Δ et Δ' ont pour équations respectives :

$$Y = \frac{1}{2}(X - 1) \quad \text{et} \quad Y = -\frac{1}{2}(X + 3).$$



Licence 3 - Mathématiques
DS - 8 Mars 2018
Géométrie 6

$\mathcal{P}$ sera $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire usuel $\langle (x,y),(x',y')\rangle = xx' + yy'$, de sa structure affine canonique et du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ avec $\overrightarrow{i} = (1,0)$ et $\overrightarrow{j} = (0,1)$.

Exercice 1

On note f l'application affine de $\mathcal{P}$ dans lui-même qui à tout point M de coordonnées (x,y) associe le point M' de coordonnées (x',y') données par :

$$\begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = x + y - 1. \end{cases} \tag{1}$$

1 - Montrer que f est une bijection du plan $\mathcal{P}$ en donnant explicitement son application réciproque $f^{-1}(x',y') = (x,y)$.

2 - Montrer que f a un unique point fixe ω qu'on déterminera.

3 - Montrer que f est la composée d'une rotation r centrée en O dont précisera l'angle θ, d'une homothétie h centrée aussi en O dont on pécisera le rapport k et d'une translation τ dont on présisera le vecteur $\overrightarrow{u}$.

4 - On note Δ la droite d'équation $x = 1$. Quelle est la figure Δ' transformée de Δ par l'application f ?

5 - Quelle est la figure Γ' transformée par l'application f du cercle Γ d'équation $x^2 + y^2 = 2$?

Exercice 2

Soit $ABCD$ un rectangle de longueur $AB = CD = a$ et de largeur $BC = DA = b$. On note σ la réflexion d'axe la droite (AC) et on pose $B' = \sigma(B)$ et $D' = \sigma(D)$.

1 - Quelle est la nature du quadrilatère $AD'CB'$?

On note E l'intersection des droites (AB') et (CD) et F celle des droites (AB) et (CD').

2 - Montrer que F est l'image de E par la réflexion σ.

3 - Montrer que le quadrilatère $AECF$ est un losange.

4 - Calculer l'aire du losange $AECF$ en fonction de a et b.

Exercice 3

Soient k un réel strictment positif et $ABCD$ un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle Γ de rayon $\rho > 0$. On note $\mathcal{I}$ l'inversion de pôle A et de puissance k et B', C' et D' les inverses respectifs des points B, C et D.

1 - Montrer que les points B', C' et D' sont alignés et que C' appartient au segment $[B'D']$.

On note Δ la droite portant les points B', C' et D'.

2 - Étudier, en fonction de k et ρ, le nombre de points d'intersection de Δ avec le cercle Γ.

3 - En remarquant que $B'D' = B'C' + C'D'$ et en appliquant la propriété étudiée en cours rappelée ci-dessous, établir l'égalité : $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$. C'est le *Théorème de Ptolémée.* (On fera le dessin sur lequel on raisonnera dans le cas où Δ n'intersecte pas Γ.)

Rappel de cours. Soit $\mathcal{I}$ une inversion de pôle O et de puissance $k \neq 0$. Pour tous points M et N distincts de O, d'inverses respectifs M' et N', on a $M'N' = \frac{|k|}{OM \cdot ON} MN$.

Corrigé

Exercice 1

1 - Déterminer l'inverse f^{-1} de f revient à calculer les coordonnées (x, y) de M en fonction des coordonnées (x', y') de M', c'est-à-dire résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} x - y + 1 = x' \\ x + y - 1 = y'. \end{cases}$$

Ce qui donne immédiatement :

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y' \\ \\ y = -\frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y' + 1. \end{cases}$$

2 - Les coordonnées (x_0, y_0) d'un point fixe ω sont les solutions du système linéaire :

$$\begin{cases} x_0 - y_0 + 1 = x_0 \\ x_0 + y_0 - 1 = y_0 \end{cases}$$

c'est-à-dire (résolution immédiate) $x_0 = 1$ et $y_0 = 1$. Comme elles sont uniques, le point fixe $\omega = (1, 1)$ est unique.

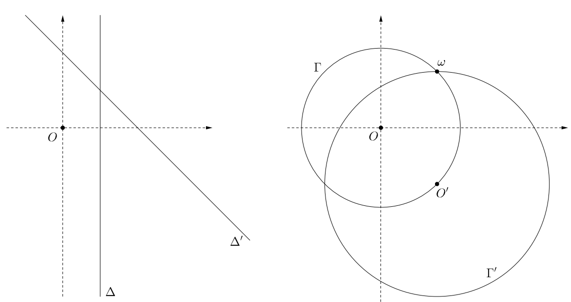
3 - Les relations (1) de l'énoncé peuvent s'écrire comme suit :

$$(3) \qquad (x', y') = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y, \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\right) + (1, -1).$$

On voit alors que le point M' s'obtient en appliquant successivement à M la rotation de centre O et d'angle $\theta = \frac{\pi}{4}$, l'homothétie de centre O et de rapport $k = \sqrt{2}$ et la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(1, -1)$.

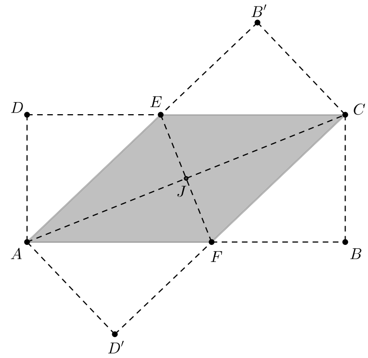
4 - Quand M décrit la droite Δ, le point M' décrira une droite Δ' car f est affine. Comme $x = 1$ et que $x = \frac{1}{2}(x' + y')$ (relations (2)), les coordonnées de M' vérifient $\frac{1}{2}(x' + y') = 1$, c'est-à-dire $x' + y' = 2$. C'est l'équation de la droite Δ'.

5 - L'application affine f est une similitude de rapport $k = \sqrt{2}$; elle envoie donc le cercle Γ de centre O et de rayon $\rho = \sqrt{2}$ sur le cercle Γ' de centre $O' = f(O) = (1, -1)$ et de rayon $\rho' = \sqrt{2}\rho = 2$.



Exercice 2

1 - Le quadrilatère $AD'CB'$ est l'image par la réflexion σ du rectangle $ADCB$. Comme σ est une isométrie, $AD'CB'$ est aussi un rectangle.



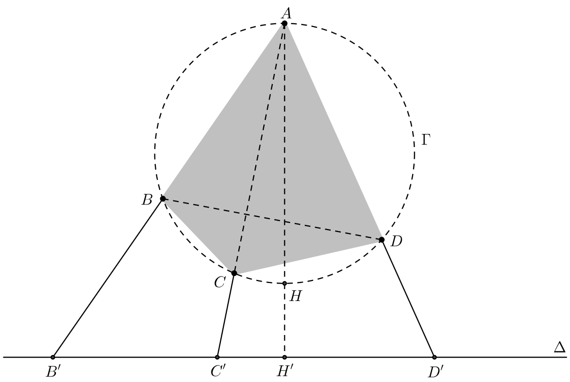
2 - On a $\sigma(A) = A$, $\sigma(C) = C$, $\sigma(D) = D'$ et $\sigma(B') = B$. Donc $\sigma((CD)) = (CD')$ et $\sigma((AB')) = (AB)$; par suite $\sigma(E) = \sigma((CD) \cap (AB')) = (CD') \cap (AB) = F$.

3 - Soit J le point d'intersection des segments $[AC]$ et $[EF]$. Comme les droites (EC) et (AF) sont parallèles et J milieu de $[EF]$, le segment $[AF]$ est l'image de $[CE]$ par l'homothétie de centre J et de rapport -1 ; donc $CE = AF$. Le quadrilatère $AECF$ a ses deux côtés opposés CE et AF parallèles et égaux ; c'est donc un parallélogramme ; comme en plus ses diagonales AC et EF sont perpendiculaires (car F est le symétrique de E par rapport à (AC)), c'est en fait un losange.

4 - Notons θ l'angle $\widehat{JAF} = \widehat{BAC}$. On a $\frac{AJ}{AF} = \cos\theta = \frac{AB}{AC}$; d'où $AF = \frac{AC}{AB} \cdot AJ = \frac{a^2+b^2}{2a}$. Donc l'aire du losange $AECF$ vaut $AF \cdot AD = \frac{b}{2a}(a^2 + b^2)$.

Exercice 3

1 - Le pôle A de l'inversion $\mathcal{I}$ est sur le cercle Γ ; donc l'inverse de Γ est une droite Δ perpendiculaire au diamètre AH et passant par le point H', inverse de H. Comme B, C et D sont sur Γ, leurs inverses B', C' et D' sont sur la droite Δ et donc alignés. En plus de cela C' est sur le segment $[B'D']$ car inverse de C qui est sur l'arc BD (celui qui ne contient pas A).



2 - C'est la position de H' sur la droite (AH) qui nous donnera les points d'intersection de Γ et Δ. Comme H' est l'inverse de H on a $AH \cdot AH' = k$; d'où $AH' = \frac{k}{AH} = \frac{k}{2\rho}$.

- Si $k < 4\rho^2$, H' est à l'intérieur du segment $[AH]$ et donc Δ intersecte Γ en deux points.
- Si $k = 4\rho^2$, H' est confondu avec H et donc Δ est tangente à Γ en H.
- Si $k > 4\rho^2$, H' est à l'extérieur du segment $[AH]$ et donc Δ n'intersecte pas Γ.

3 - Comme les points B', C' et D' sont alignés et C' entre B' et D' on a $B'C' + C'D' = B'D'$. D'autre part $B' = \mathcal{I}(B)$, $C' = \mathcal{I}(C)$ et $D' = \mathcal{I}(D)$, donc $B'C' = \frac{kBC}{AB \cdot AC}$, $C'D' = \frac{kCD}{AC \cdot AD}$ et $B'D' = \frac{kBD}{AB \cdot AD}$. En remplaçant ces quantités dans l'égalité $B'C' + C'D' = B'D'$ on obtient $k\left(\frac{BC}{AB \cdot AC} + \frac{CD}{AC \cdot AD}\right) = \frac{kBD}{AB \cdot AD}$; en simplifiant par k et en multipliant les deux membres par le produit $AB \cdot AC \cdot AD$, on obtient l'égalité cherchée :

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD.$$