Licence 3 - Mathématiques
DS - 19 Juin 2017
Géométrie 6

Aucun document n'est autorisé

$\mathcal{P}$ sera l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire usuel $\langle (x,y),(x',y')\rangle = xx' + yy'$, de sa structure affine canonique et du repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ avec $\overrightarrow{i} = (1,0)$ et $\overrightarrow{j} = (0,1)$.

Exercice 1

On note f l'application affine de $\mathcal{P}$ dans lui-même qui à tout point M de coordonnées (x,y) associe le point M' de coordonnées (x',y') données par :

$$(*) \qquad \begin{cases} x' = 2x + y + 2 \\ y' = x + y + 3. \end{cases}$$

1 - Donner la direction $\overrightarrow{f}$ de f ainsi que la matrice A de $\overrightarrow{f}$ dans la base $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.

2 - Montrer que A a deux valeurs propres distinctes λ et μ ($\lambda > \mu > 0$) et en déduire qu'il existe une base $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ dans laquelle la matrice D de $\overrightarrow{f}$ est diagonale. (Il n'est pas demandé de déterminer explicitement $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.)

3 - Montrer que la base $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ est orthogonale. (*Remarquer que la matrice A est symétrique, et donc vérifie $\langle A(\overrightarrow{\xi}),\overrightarrow{\zeta}\rangle = \langle \overrightarrow{\xi}, A(\overrightarrow{\zeta})\rangle$ pour tous vecteurs $\overrightarrow{\xi}$ et $\overrightarrow{\zeta}$.*)

4 - Montrer que f n'est pas une similitude du plan euclidien $\mathcal{P}$.

5 - Montrer que f a un et un seul point fixe ; on le notera ω.

6 - Quelle est l'image Γ' par f du cercle Γ de centre ω et de rayon $\rho = 1$?

Exercice 2

Soient Ax et Ay deux demi-droites telles que l'angle (Ax, By) soit de mesure $\frac{\pi}{3}$. Sur Ax et Ay on choisit respectivement deux points B et C tels $AB = AC = a$ (a étant un nombre réel strictement positif).

1 - Si M est un point intérieur à ce triangle, on note d_1 sa distance au côté AB, d_2 celle au côté BC et d_3 celle au côté CA.

Montrer que la quantité $\delta = d_1 + d_2 + d_3$ est une constante indépendante de la position de M à l'intérieur du triangle ABC. (*Évaluer de deux manières différentes l'aire du triangle ABC.*)

2 - Cette fois-ci M est à l'extérieur de ABC mais à l'intérieur de l'angle (Ax, Ay) (il est conseillé de faire un dessin) et d_1, d_2 et d_3 sont ses distances respectives aux droites (AB), (BC) et (CA).

Montrer que la quantité $\delta' = d_1 - d_2 + d_3$ est une constante indépendante de la position de M comme choisi. (*Utiliser la question 1.*)

Exercice 3

Dans le repère $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ les coordonnées d'un point variable M seront notées (x,y).

1 - Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M dont les coordonnées x et y vérifient l'équation :

$$y^2 = -4x^2 + 8x + 2y - 1.$$

Montrer que $\mathcal{E}$ est une ellipse dont on déterminera le centre ω, les paramètres $2a$ (grand axe), $2b$ (petit axe) ainsi que les foyers F et F'. Dessiner cette ellipse.

2 - Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des points M dont les coordonnées x et y vérifient l'équation :

$$y^2 = \frac{1}{4}\left(x^2 + 2x - 8y - 7\right).$$

i) Montrer que $\mathcal{H}$ est une hyperbole dont on déterminera le centre ω et les foyers F et F'.

ii) Dessiner l'hyperbole $\mathcal{H}$ ainsi que ses deux asymptotes.

Il sera tenu compte de la clarté de la rédaction et des dessins.

Corrigé

Exercice 1

1 - La direction $\overrightarrow{f}$ de f est l'application de $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ dans lui-même qui au vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (x, y) dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ associe le vecteur $\overrightarrow{u}'$ de coordonnées :

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + y. \end{cases}$$

Sa matrice A dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2 - Les valeurs propres de A (donc de $\overrightarrow{f}$) sont les racines du polynôme en t :

$$\text{dét}\begin{pmatrix} (2-t) & 1 \\ 1 & (1-t) \end{pmatrix} = t^2 - 3t + 1.$$

Ce sont donc $\lambda = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\mu = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Comme ces deux valeurs propres sont distinctes, il existe deux vecteurs linéairement indépendants $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ tels que $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \lambda\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) = \mu\overrightarrow{v}$. Dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ la matrice est $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

3 - Comme la matrice A est symétrique, l'application $\overrightarrow{f}$ l'est aussi. On a donc :

$$\lambda\langle\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle = \langle\lambda\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle = \langle\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}), \overrightarrow{v}\rangle = \langle\overrightarrow{u}, \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})\rangle = \langle\overrightarrow{u}, \mu\overrightarrow{v}\rangle = \mu\langle\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle.$$

On en déduit $(\lambda - \mu)\langle\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle = 0$. Ce qui implique $\langle\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle = 0$ puisque $\lambda \neq \mu$. La base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est donc orthogonale. $\diamondsuit$

Quitte à remplacer $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ par leurs normalisés respectifs $\frac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||}$ et $\frac{\overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{v}||}$, on peut en fait supposer qu'ils sont de norme 1. C'est ce qu'on fera dans toute la suite. Ainsi, la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ sera orthonormée.

4 - L'application affine f est une similitude si, et seulement si, sa direction $\overrightarrow{f}$ l'est. Et si $\overrightarrow{f}$ était une similitude, il existerait une constante $k > 0$ telle que $||\overrightarrow{f}(\overrightarrow{\xi})|| = k||\overrightarrow{\xi}||$ pour tout vecteur $\overrightarrow{\xi}$. Or $||\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})|| = \lambda||\overrightarrow{u}||$ et $||\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})|| = \mu||\overrightarrow{v}||$ avec $\lambda \neq \mu$; donc $\overrightarrow{f}$ n'est pas une similitude et par suite f ne l'est pas non plus. $\diamondsuit$

5 - Le point ω est fixé par f si ses coordonnées (x, y) vérifient le système :

$$\begin{cases} 2x + y + 2 = x \\ x + y + 3 = y. \end{cases}$$

La résolution donne $x = -3$ et $y = 1$. On a donc un unique point fixe $\omega = (-3, 1)$. $\diamondsuit$

6 - Notons (X, Y) les coordonnées d'un point M dans le repère $(\omega; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et (X', Y') celles de

son transformé M' par f (toujours dans le même repère). On a :

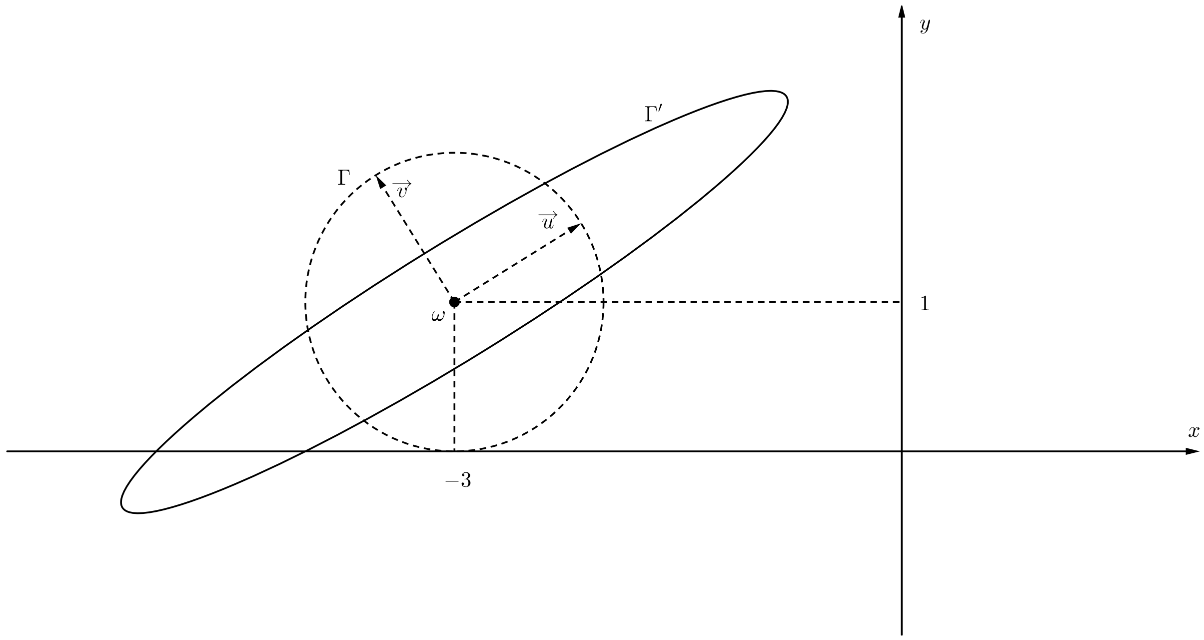
$$\begin{aligned}
X'\overrightarrow{u}+Y'\overrightarrow{v} =& \overrightarrow{\omega M'} \\
=& M'-\omega \\
=& f(M)-f(\omega) \quad (\omega \text{ étant fixé par } f) \\
=& \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\omega M}) \quad (\overrightarrow{f} \text{ étant la direction de } f) \\
=& \overrightarrow{f}(X\overrightarrow{u}+Y\overrightarrow{v}) \\
=& X\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})+Y\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) \\
=& X\lambda\overrightarrow{u}+Y\mu\overrightarrow{v} \quad (\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ étant des vecteurs propres de } \overrightarrow{f}) \\
=& \frac{3+\sqrt{5}}{2}X\overrightarrow{u}+\frac{3-\sqrt{5}}{2}Y\overrightarrow{v}.
\end{aligned}$$

Ce qui donne $X'=\lambda X=\frac{3+\sqrt{5}}{2}X$ et $Y'=\mu Y=\frac{3-\sqrt{5}}{2}Y$. (D'où $X=\frac{X'}{\lambda}$ et $Y=\frac{Y'}{\mu}$). $\diamondsuit$

Dans le repère orthonormé $(\omega;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ le cercle Γ a pour équation $X^2+Y^2=1$. Son transformé Γ' par f a pour équation $\left(\frac{X'}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{Y'}{\mu}\right)^2=1$, c'est-à-dire :

$$\frac{X'^2}{\lambda^2}+\frac{Y'^2}{\mu^2}=1.$$

C'est donc l'ellipse centrée en ω de grand axe $2a=2\lambda$ et de petit axe $2b=2\mu$. $\diamondsuit$



Exercice 2

1 - Comme l'angle $\widehat{BAC}$ vaut $\frac{\pi}{3}$ et que $AB=BC$, le triangle ABC est équilatéral. Son aire $\mathcal{A}(ABC)$ vaut donc $\frac{h\cdot BC}{2}$ où h est la hauteur (de ABC). Mais elle est aussi égale à la somme des aires des triangles MAB, MBC et MCA *i.e.* :

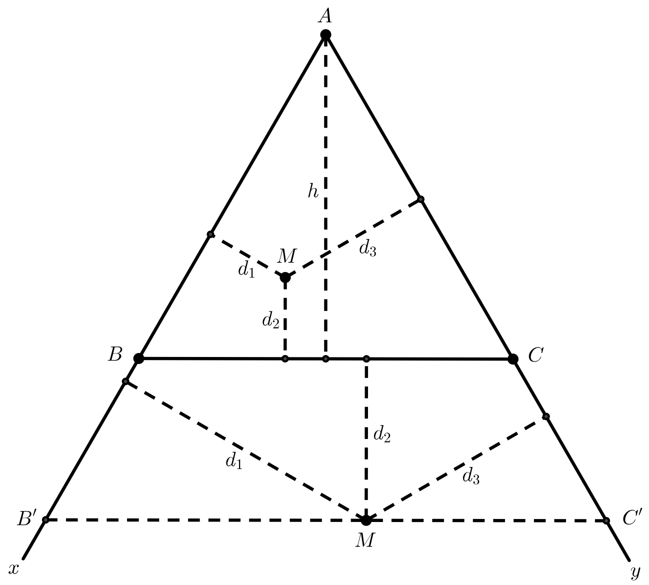
$$\mathcal{A}(ABC)=\frac{d_1\cdot AB}{2}+\frac{d_2\cdot BC}{2}+\frac{d_3\cdot CA}{2}=\frac{(d_1+d_2+d_3)\cdot BC}{2}.$$

Ce qui donne $d_1+d_2+d_3=h$. $\diamondsuit$

2 - Maintenant le point M est à l'extérieur du triangle ABC mais à l'intérieur de l'angle (Ax, Ay). Par M menons la parallèle au côté BC ; elle coupe les droites (Ax) et (Ay) respectivement en B' et C'. Le triangle $AB'C'$ est alors équilatéral. D'après la première question on a :

$$\mathrm{dist}(M, (AB')) + \mathrm{dist}(M, (B'C')) + \mathrm{dist}(M, (C'A)) = \text{hauteur de } AB'C'$$

i.e. $\mathrm{dist}(M, (AB')) + 0 + \mathrm{dist}(M, (C'A)) = d_1 + d_3 = h + d_2$. (Ici $\mathrm{dist}(M, (B'C')) = 0$ car le point M est sur le côté $B'C'$.) D'où $d_1 - d_2 + d_3 = h$. ♢

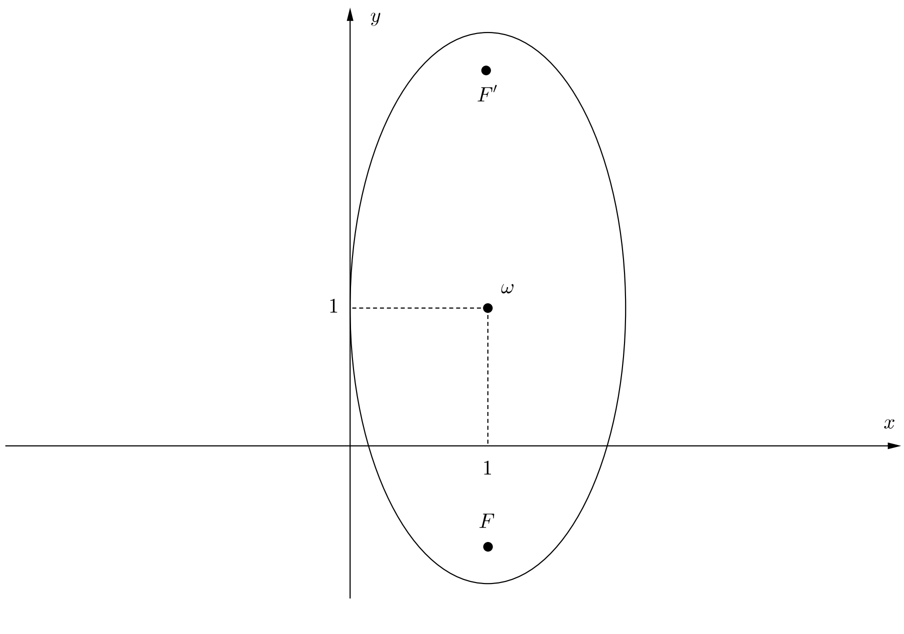


Exercice 3

1 - Un calcul simple permet de mettre l'expression $y^2 = -4x^2 + 8x + 2y - 1$ sous la forme plus réduite, et surtout plus reconnaissable :

$$(x-1)^2 + \frac{(y-1)^2}{4} = 1.$$

Elle décrit l'ellipse $\mathcal{E}$ de centre $\omega = (1, 1)$, de petit axe $2a = 2$, de grand axe $2b = 4$ et de foyers $F = (1, 1 - \sqrt{3})$ et $F' = (1, 1 + \sqrt{3})$.



2 - i) De même, un calcul simple permet de mettre l'expression $y^2 = \frac{1}{4}\left(x^2 + 2x - 8y - 7\right)$ sous la forme plus simple à interpréter :

$$\frac{(x+1)^2}{4} - (y+1)^2 = 1.$$

Cette équation décrit l'hyperbole $\mathcal{H}$ de centre $\omega = (-1, -1)$, de paramètres $a = 2$, $b = 1$ et de foyers $F = (-1 - \sqrt{5}, -1)$ et $F' = (-1 + \sqrt{5}, -1)$.

2 - ii) Les deux asymptotes Δ et Δ' ont pour équations respectives :

$$Y = \frac{1}{2}(X - 1) \quad \text{et} \quad Y = -\frac{1}{2}(X + 3).$$