Licence 3 - Mathématiques
DS - 8 Mars 2018
Géométrie 6

Aucun document n'est autorisé

$\mathcal{P}$ sera l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire usuel $\langle (x,y),(x',y')\rangle = xx' + yy'$, de sa structure affine canonique et du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ avec $\overrightarrow{i} = (1,0)$ et $\overrightarrow{j} = (0,1)$.

Exercice 1

On note f l'application affine de $\mathcal{P}$ dans lui-même qui à tout point M de coordonnées (x,y) associe le point M' de coordonnées (x',y') données par :

$$(1) \qquad \begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = x + y - 1. \end{cases}$$

1 - Montrer que f est une bijection du plan $\mathcal{P}$ en donnant explicitement son application réciproque $f^{-1}(x',y') = (x,y)$.

2 - Montrer que f a un unique point fixe ω qu'on déterminera.

3 - Montrer que f est la composée d'une rotation r centrée en O dont précisera l'angle θ, d'une homothétie h centrée aussi en O dont on pécisera le rapport k et d'une translation τ dont on présisera le vecteur $\overrightarrow{u}$.

4 - On note Δ la droite d'équation $x = 1$. Quelle est la figure Δ' transformée de Δ par l'application f ?

5 - Quelle est la figure Γ' transformée par l'application f du cercle Γ d'équation $x^2 + y^2 = 2$?

Exercice 2

Soit $ABCD$ un rectangle de longueur $AB = CD = a$ et de largeur $BC = DA = b$. On note σ la réflexion d'axe la droite (AC) et on pose $B' = \sigma(B)$ et $D' = \sigma(D)$.

1 - Quelle est la nature du quadrilatère $AD'CB'$?

On note E l'intersection des droites (AB') et (CD) et F celle des droites (AB) et (CD').

2 - Montrer que F est l'image de E par la réflexion σ.

3 - Montrer que le quadrilatère $AECF$ est un losange.

4 - Calculer l'aire du losange $AECF$ en fonction de a et b.

Exercice 3

Soient k un réel strictment positif et $ABCD$ un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle Γ de rayon $\rho > 0$. On note $\mathcal{I}$ l'inversion de pôle A et de puissance k et B', C' et D' les inverses respectifs des points B, C et D.

1 - Montrer que les points B', C' et D' sont alignés et que C' appartient au segment $[B'D']$.

On note Δ la droite portant les points B', C' et D'.

2 - Étudier, en fonction de k et ρ, le nombre de points d'intersection de Δ avec le cercle Γ.

3 - En remarquant que $B'D' = B'C' + C'D'$ et en appliquant la propriété étudiée en cours rappelée ci-dessous, établir l'égalité :

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD.$$

C'est le *Théorème de Ptolémée.* (On fera le dessin sur lequel on raisonnera dans le cas où Δ n'intersecte pas Γ.)

Rappel de cours. Soit $\mathcal{I}$ une inversion de pôle O et de puissance $k \neq 0$. Pour tous points M et N distincts de O, d'inverses respectifs M' et N', on a $M'N' = \frac{|k|}{OM \cdot ON} MN$.

Il sera tenu compte de la clarté de la rédaction et des dessins.

Corrigé

Exercice 1

1 - Déterminer l'inverse f^{-1} de f revient à calculer les coordonnées (x, y) de M en fonction des coordonnées (x', y') de M', c'est-à-dire résoudre le système linéaire $\begin{cases} x - y + 1 = x' \\ x + y - 1 = y'. \end{cases}$ Ce qui donne immédiatement :

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y' \\ \\ y = -\frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y' + 1. \end{cases}$$

2 - Les coordonnées (x_0, y_0) d'un point fixe ω sont les solutions du système linéaire :

$$\begin{cases} x_0 - y_0 + 1 = x_0 \\ x_0 + y_0 - 1 = y_0 \end{cases}$$

c'est-à-dire (résolution immédiate) $x_0 = 1$ et $y_0 = 1$. Comme elles sont uniques, le point fixe $\omega = (1, 1)$ est unique.

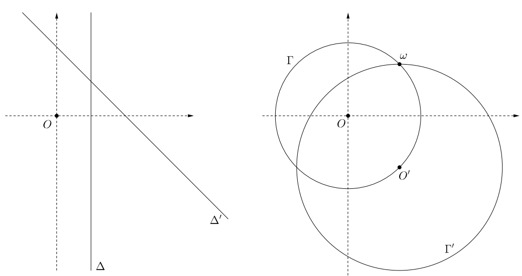
3 - Les relations (1) de l'énoncé peuvent s'écrire comme suit :

$$(3) \qquad (x', y') = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y, \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\right) + (1, -1).$$

On voit alors que le point M' s'obtient en appliquant successivement à M la rotation de centre O et d'angle $\theta = \frac{\pi}{4}$, l'homothétie de centre O et de rapport $k = \sqrt{2}$ et la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(1, -1)$.

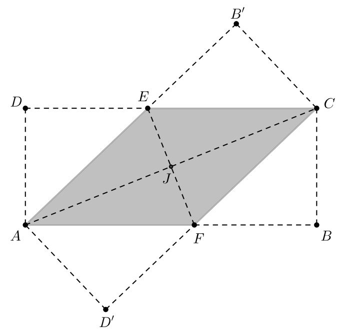
4 - Quand M décrit la droite Δ, le point M' décrira une droite Δ' car f est affine. Comme $x = 1$ et que $x = \frac{1}{2}(x' + y')$ (relations (2)), les coordonnées de M' vérifient $\frac{1}{2}(x' + y') = 1$, c'est-à-dire $x' + y' = 2$. C'est l'équation de la droite Δ'.

5 - L'application affine f est une similitude de rapport $k = \sqrt{2}$; elle envoie donc le cercle Γ de centre O et de rayon $\rho = \sqrt{2}$ sur le cercle Γ' de centre $O' = f(O) = (1, -1)$ et de rayon $\rho' = \sqrt{2}\rho = 2$.



Exercice 2

1 - Le quadrilatère $AD'CB'$ est l'image par la réflexion σ du rectangle $ADCB$. Comme σ est une isométrie, $AD'CB'$ est aussi un rectangle.



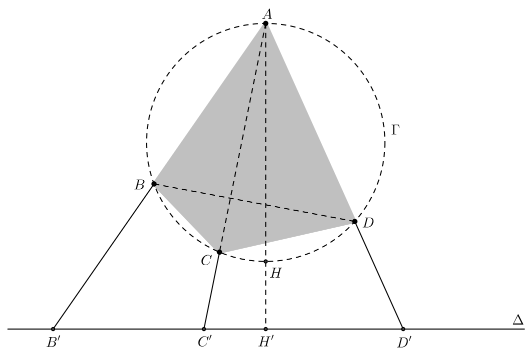
2 - On a $\sigma(A) = A$, $\sigma(C) = C$, $\sigma(D) = D'$ et $\sigma(B') = B$. Donc $\sigma((CD)) = (CD')$ et $\sigma((AB')) = (AB)$; par suite $\sigma(E) = \sigma((CD) \cap (AB')) = (CD') \cap (AB) = F$.

3 - Soit J le point d'intersection des segments $[AC]$ et $[EF]$. Comme les droites (EC) et (AF) sont parallèles et J milieu de $[EF]$, le segment $[AF]$ est l'image de $[CE]$ par l'homothétie de centre J et de rapport -1 ; donc $CE = AF$. Le quadrilatère $AECF$ a ses deux côtés opposés CE et AF parallèles et égaux ; c'est donc un parallélogramme ; comme en plus ses diagonales AC et EF sont perpendiculaires (car F est le symétrique de E par rapport à (AC)), c'est en fait un losange.

4 - Notons θ l'angle $\widehat{JAF} = \widehat{BAC}$. On a $\frac{AJ}{AF} = \cos\theta = \frac{AB}{AC}$; d'où $AF = \frac{AC}{AB} \cdot AJ = \frac{a^2+b^2}{2a}$. Donc l'aire du losange $AECF$ vaut $AF \cdot AD = \frac{b}{2a}(a^2 + b^2)$.

Exercice 3

1 - Le pôle A de l'inversion $\mathcal{I}$ est sur le cercle Γ ; donc l'inverse de Γ est une droite Δ perpendiculaire au diamètre AH et passant par le point H', inverse de H. Comme B, C et D sont sur Γ, leurs inverses B', C' et D' sont sur la droite Δ et donc alignés. En plus de cela C' est sur le segment $[B'D']$ car inverse de C qui est sur l'arc BD (celui qui ne contient pas A).



2 - C'est la position de H' sur la droite (AH) qui nous donnera les points d'intersection de Γ et Δ. Comme H' est l'inverse de H on a $AH \cdot AH' = k$; d'où $AH' = \frac{k}{AH} = \frac{k}{2\rho}$.

- Si $k < 4\rho^2$, H' est à l'intérieur du segment $[AH]$ et donc Δ intersecte Γ en deux points.
- Si $k = 4\rho^2$, H' est confondu avec H et donc Δ est tangente à Γ en H.
- Si $k > 4\rho^2$, H' est à l'extérieur du segment $[AH]$ et donc Δ n'intersecte pas Γ.

3 - Comme les points B', C' et D' sont alignés et C' entre B' et D' on a $B'C' + C'D' = B'D'$. D'autre part $B' = \mathcal{I}(B)$, $C' = \mathcal{I}(C)$ et $D' = \mathcal{I}(D)$, donc $B'C' = \frac{kBC}{AB \cdot AC}$, $C'D' = \frac{kCD}{AC \cdot AD}$ et $B'D' = \frac{kBD}{AB \cdot AD}$. En remplaçant ces quantités dans l'égalité $B'C' + C'D' = B'D'$ on obtient $k\left(\frac{BC}{AB \cdot AC} + \frac{CD}{AC \cdot AD}\right) = \frac{kBD}{AB \cdot AD}$; en simplifiant par k et en multipliant les deux membres par le produit $AB \cdot AC \cdot AD$, on obtient l'égalité cherchée :

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD.$$