Licence 2 - Mathématiques
DS - 4 novembre 2016
Compléments de mathématiques
COURBES PARAMÉTRÉES

Dans ce texte, $\mathbb{E}$ sera l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire $\langle (x,y),(x',y')\rangle = xx' + yy'$ et de la norme qui lui est associée $|(x,y)| = \sqrt{x^2+y^2}$. Le couple de nombres (x,y) désignera aussi bien un vecteur qu'un point.

Exercice 1

On considère la courbe paramétrée $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}$ donnée par $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ avec :

$$\begin{cases} x(t) = 1 - \frac{t^2}{2} \\ \\ y(t) = t \end{cases}$$

1 - Dire pourquoi la courbe γ est indéfiniment différentiable. Calculer les composantes de son vecteur dérivé $\gamma'(t)$ et montrer que γ est régulière.

2 - La courbe γ est-elle paramétrée par la longueur de l'arc ? (Justifier la réponse.)

3 - Donner les composantes du vecteur unitaire tangent $\overrightarrow{\mathbf{t}}$ de γ en fonction du paramètre t.

4 - On note s la longueur de l'arc donnée par :

$$s(t) = \int_0^t |\gamma'(\theta)| d\theta.$$

Calculer la dérivée de $\overrightarrow{\mathbf{t}}$ par rapport au paramètre s.

5 - Calculer la courbure κ et le rayon de courbure r en tout point de γ.

Exercice 2

On considère la courbe paramétrée $\gamma : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{E}$ donnée par $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ avec :

$$\begin{cases} x(t) = 1 + \frac{1}{t} \\ \\ y(t) = t + \frac{1}{2t^2} \end{cases}$$

1 - Dire pourquoi γ est indéfiniment différentiable et étudier les variations de ses composantes en fonction du paramètre t.

2 - Étudier la nature des branches infinies de γ.

3 - Y a-t-il des points stationnaires ?

4 - Tracer la courbe γ dans un repère orthonormé. (On fera bien apparaître les asymptotes.)

Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

CORRIGÉ

Exercice 1

1 - La courbe γ est indéfiniment différentiable car ses composantes $x(t) = 1 - \frac{t^2}{2}$ et $y(t) = t$ sont des polynômes en t, donc des fonctions de classe C^∞. Son vecteur vitesse est $\gamma'(t) = (-t, 1)$, de norme $|\gamma'(t)| = \sqrt{t^2+1}$. Comme cette norme ne s'annule en aucun point, la représentation est régulière.

2 - Pour $t \neq 0$, on a $|\gamma'(t)| = \sqrt{t^2+1} \neq 1$. Cette paramétrisation n'est donc pas par la longueur de l'arc.

3 - Le vecteur unitaire tangent $\overrightarrow{\mathbf{t}}$ est défini par $\overrightarrow{\mathbf{t}} = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$. Ses composantes sont donc $\left(\frac{-t}{\sqrt{t^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\right)$.

4 - Rappelons que pour calculer la courbure, on dérive le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{t}}$ par rapport au paramètre s donné par $s(t) = \int_{t_0}^{t} |\gamma'(\theta)| d\theta$. Ce calcul se fait à l'aide de la formule :

$$\frac{d\overrightarrow{\mathbf{t}}}{ds} = \frac{dt}{ds} \cdot \frac{d\overrightarrow{\mathbf{t}}}{dt} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} \cdot \frac{d\overrightarrow{\mathbf{t}}}{dt} = \frac{1}{|\gamma'(t)|} \cdot \frac{d\overrightarrow{\mathbf{t}}}{dt}$$

En appliquant ceci à $\gamma'(t) = (-t, 1)$ et $\overrightarrow{\mathbf{t}} = \left(\frac{-t}{\sqrt{t^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\right)$, on obtient :

$$\frac{d\overrightarrow{\mathbf{t}}}{ds} = \frac{1}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{-1}{\sqrt{t^2+1}}, \frac{-t}{\sqrt{t^2+1}}\right).$$

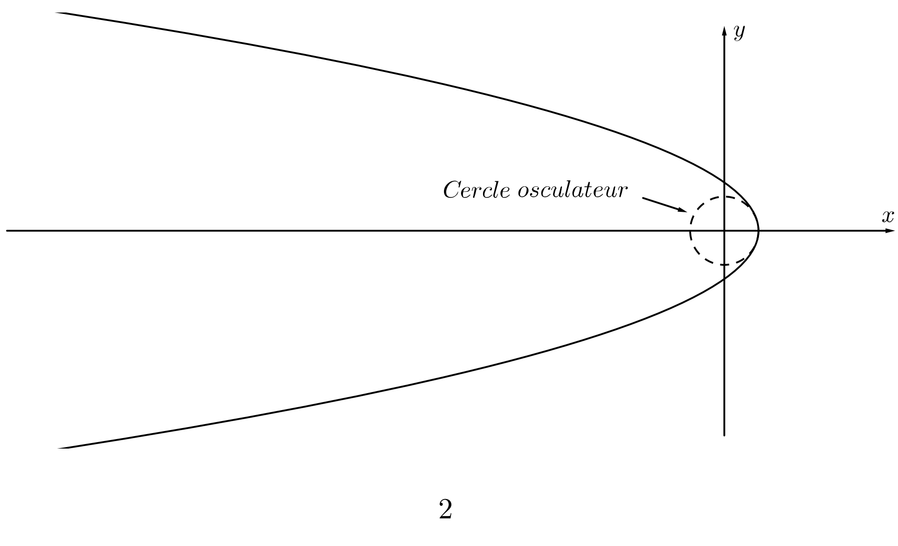
5 - Comme le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{n}} = \left(\frac{-1}{\sqrt{t^2+1}}, \frac{-t}{\sqrt{t^2+1}}\right)$ est unitaire, la courbure de la courbe γ au point $\gamma(t)$ est :

$$\kappa(t) = \frac{1}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Son inverse est le rayon de courbure :

$$r(t) = (t^2+1)^{\frac{3}{2}}.$$

Ci-dessous la représentation géométrique de la courbe γ. On y voit aussi le cercle osculateur au point $\gamma(0) = (1, 0)$. Il a pour centre le point $(0, 0)$ et pour rayon $r = 1$.



Exercice 2

1 - La courbe γ est indéfiniment différentiable. En effet, ses composantes $x(t) = 1 + \frac{1}{t}$ et $y(t) = t + \frac{1}{2t^2}$ sont des fractions rationnelles en t dont les dénominateurs ne s'annulent que pour $t = 0$ qui est en dehors de leur domaine de définition commun ; elles sont donc des fonctions de classe C^∞. Leurs dérivées respectives sont :

$$x'(t) = -\frac{1}{t^2} \qquad \text{et} \qquad y'(t) = \frac{t^3 - 1}{t^3}.$$

Ci-dessous le tableau regroupant les variations respectivement des fontions x et y.

t	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x'		$-$	‖		$-$		
x	1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$		$\searrow$		1
y'		$+$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$3/2$	$\nearrow$	$+\infty$

2 - On a : $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 1$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$; $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t) = 1$ et $\lim\limits_{t\to-\infty} |y(t)| = -\infty$. Donc γ admet pour asymptote verticale la droite d'équation $x = 1$ pour t voisin de $+\infty$ et de $-\infty$. D'autre part $\lim\limits_{t\to0^+} \dfrac{y(t)}{x(t)} = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to0^-} \dfrac{y(t)}{x(t)} = -\infty$. Donc γ admet deux *branches paraboliques* dans la direction y : une quand t tend vers 0 à gauche et une quand t tend vers 0 à droite.

3 - La dérivée $x'(t)$ ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}^*$. Donc tous les points $\gamma(t)$ de la courbe γ sont réguliers *i.e.* γ n'a aucun point stationnaire.

4 - Voici la représentation géométrique de la courbe γ :