Licence 2 - Mathématiques
DS - 6 novembre 2015
Compléments de mathématiques
COURBES PARAMÉTRÉES

Dans ce texte, $\mathbb{E}$ sera l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire $\langle (x,y),(x',y')\rangle = xx' + yy'$ et de la norme qui lui est associée $|(x,y)| = \sqrt{x^2+y^2}$. Le couple de nombres (x,y) désignera aussi bien un vecteur qu'un point.

Exercice 1

On considère la courbe paramétrée $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}$ donnée par $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ avec :

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \frac{t^2}{2} \end{cases}$$

1 - Dire pourquoi la courbe γ est indéfiniment différentiable. Calculer les composantes de son vecteur dérivé $\gamma'(t)$ et montrer que γ est régulière.

2 - La courbe γ est-elle paramétrée par la longueur de l'arc ? (Justifier la réponse.)

3 - Donner les composantes du vecteur unitaire tangent $\overrightarrow{\mathbf{t}}$ de γ en fonction du paramètre t.

4 - On note s la longueur de l'arc donnée par $s(t) = \int_0^t |\gamma'(\theta)| d\theta$. Calculer la dérivée de $\overrightarrow{\mathbf{t}}$ par rapport au paramètre s.

5 - Calculer la courbure κ et le rayon de courbure r en tout point de γ.

Exercice 2

On considère la courbe paramétrée $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}$ donnée par $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ avec :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{(t-1)^3}{3} \\ y(t) = \frac{(t-1)^5}{24} \end{cases}$$

1 - Dire pourquoi γ est indéfiniment différentiable et étudier les variations de ses composantes en fonction du paramètre t.

2 - Étudier la nature des branches infinies de γ.

3 - Y a-t-il des points stationnaires ? Si oui, étudier en détail la nature de chacun d'eux (en justifiant tout bien entendu).

4 - Tracer la courbe γ dans un repère orthonormé. (On fera bien apparaître chacun des points stationnaires.)

Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

CORRIGÉ

Exercice 1

1 - La courbe γ est indéfiniment différentiable car ses composantes $x(t) = t$ et $y(t) = \frac{t^2}{2}$ sont des polynômes en t, donc des fonctions de classe C^∞. Son vecteur vitesse est $\gamma'(t) = (1, t)$, de norme $|\gamma'(t)| = \sqrt{1+t^2}$. Comme celle-ci ne s'annule en aucun point, la représentation est régulière.

2 - Pour $t \neq 0$, on a $|\gamma'(t)| = \sqrt{1+t^2} \neq 1$. Cette paramétrisation n'est donc pas par la longueur de l'arc.

3 - Le vecteur unitaire tangent $\overrightarrow{\mathbf{t}}$ est défini par $\overrightarrow{\mathbf{t}} = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$. Ses composantes sont donc $\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)$.

4 - Rappelons que pour calculer la courbure, on dérive le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{t}}$ par rapport au paramètre s. Ce calcul se fait à l'aide de la formule :

$$\frac{d\overrightarrow{\mathbf{t}}}{ds} = \frac{dt}{ds} \cdot \frac{d\overrightarrow{\mathbf{t}}}{dt} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} \cdot \frac{d\overrightarrow{\mathbf{t}}}{dt} = \frac{1}{|\gamma'(t)|} \cdot \frac{d\overrightarrow{\mathbf{t}}}{dt}$$

En appliquant ceci à $\gamma'(t) = (1, t)$ et $\overrightarrow{\mathbf{t}} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)$, on obtient :

$$\frac{d\overrightarrow{\mathbf{t}}}{ds} = \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{-t}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right).$$

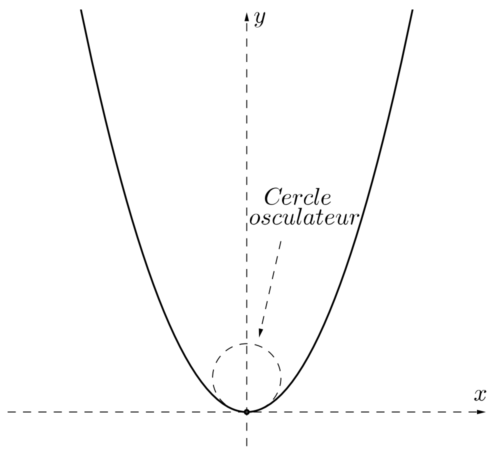
5 - Comme le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{n}} = \left(\frac{-t}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)$ est unitaire, la courbure de la courbe γ au point $\gamma(t)$ est :

$$\kappa(t) = \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Son inverse est le rayon de courbure :

$$r(t) = (1+t^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Ci-dessous la représentation géométrique de la courbe γ. On y voit aussi le cercle osculateur au point $\gamma(0) = (0, 0)$. Il a pour centre le point $(0, 1)$ et pour rayon $r = 1$.



Exercice 2

1 - La courbe γ est indéfiniment différentiable. En effet, ses composantes $x(t) = \frac{(t-1)^3}{3}$ et $y(t) = \frac{(t-1)^5}{24}$ sont des polynômes en t, donc des fonctions de classe C^∞. Leurs dérivées respectives sont :

$$x'(t) = (t-1)^2 \quad \text{et} \quad y'(t) = \frac{5}{24}(t-1)^4.$$

Ci-dessous le tableau regroupant les variations respectivement des fontions x et y.

t	$-\infty$		1		$+\infty$
x'		$+$	0	$+$	
x	$-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

2 - On a $\lim\limits_{|t|\to+\infty} |x(t)| = \lim\limits_{|t|\to+\infty} |y(t)| = +\infty$ et $\lim\limits_{|t|\to+\infty} \dfrac{|y(t)|}{|x(t)|} = +\infty$. Donc γ admet une *branche parabolique* dans la direction y aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$.

3 - Les dérivées $x'(t)$ et $y'(t)$ s'annulent simultanément en $t = 1$. Donc le point $\gamma(1) = (0,0)$ est un *point stationnaire*. Pour les dérivées d'ordre supérieur, on a :

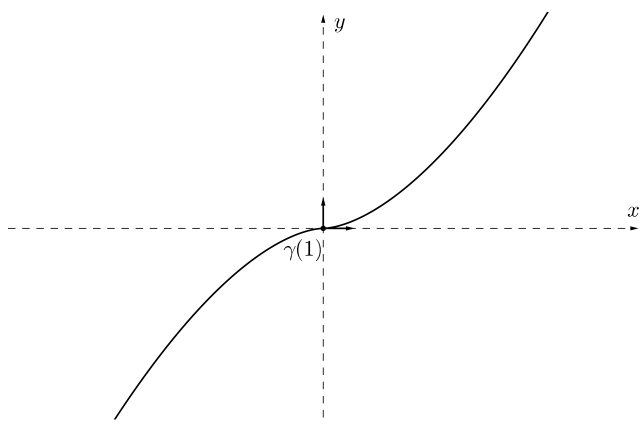
$$\gamma''(1) = (0,0) \qquad \gamma'''(1) = (2,0), \qquad \gamma^{(4)}(1) = (0,0) \qquad \text{et} \qquad \gamma^{(5)}(1) = (0,5).$$

Les vecteurs $\overrightarrow{u} = \gamma'''(1) = (2,0)$ et $\overrightarrow{v} = \gamma^{(5)}(1) = (0,5)$ forment une base, et dans le repère $(\gamma(1); \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ la courbe γ s'écrit, pour h assez petit :

$$\gamma(1+h) = \frac{h^3}{3!}\overrightarrow{u} + \frac{h^5}{5!}\overrightarrow{v} + h^5\overrightarrow{\sigma}(h)$$

où $\overrightarrow{\sigma}(h)$ est un vecteur qui tend vers $\overrightarrow{0}$ quand h tend vers 0. Le point $\gamma(1)$ est un *point d'inflexion.*

4 - Voici la représentation géométrique de la courbe γ :



A. El Kacimi