MEÉF 1 - Mathématiques

DS2 - 2 octobre 2017

Mathématiques fondamentales

Exercice 1

Soient $a \in]0,1[$ et $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$. On définit la suite (x_n) par $x_0 = a$ et $x_n = f(x_{n-1})$ pour ≥ 1.

1. Donner le sens de variation de f et tracer son graphe Γ.
2. Montrer que la suite (x_n) est bornée.
3. Montrer que la suite $u_k = x_{2k}$ $(k = 0, 1, \cdots)$ est croissante et que la suite $v_k = x_{2k+1}$ $(k = 0, 1, \cdots)$ est décroissante. (Indication : utiliser la fonction $\phi = f \circ f$ et s'assurer que $x_0 \leq x_2$ et $x_3 \leq x_1$.)
4. En déduire (des questions 2 et 3) que les suites (u_k) et (v_k) convergent vers des limites qu'on notera respectivement ℓ_0 et ℓ_1.
5. Montrer que ℓ_0 et ℓ_1 vérifient les relations $\ell_1 = f(\ell_0)$ et $\ell_0 = f(\ell_1)$.
6. En déduire que la suite (x_n) converge vers une limite ℓ qu'on déterminera.

Exercice 2

L'objet de cet exercice est de montrer que l'équation algébrique $x^3 - 2x - 5 = 0$ admet une unique solution réelle et comment approcher cette solution. Notons $P(x)$ le polynôme $x^3 - 2x - 5$.

1. Donner le tableau de variation de la fonction $x \in \mathbb{R} \longmapsto P(x) \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une solution unique réelle α et que $\alpha \in [2,3]$.
   Soit $\phi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction définie par $\phi(x) = (2x+5)^{\frac{1}{3}}$
3. Montrer que $\phi([2,3]) \subset [2,3]$ et qu'il existe $k \in]0,1[$ tel que ϕ soit k-contractante.
4. Montrer que α est le point fixe de ϕ.
5. On choisit x_0 dans $[2,3]$ et on pose $x_n = \phi(x_{n-1})$ pour tout $n \geq 1$. Expliquer pourquoi la suite (x_n) converge vers α.
6. À partir de quel rang n, x_n est-elle une valeur approchée de α à 10^{-3} près ?

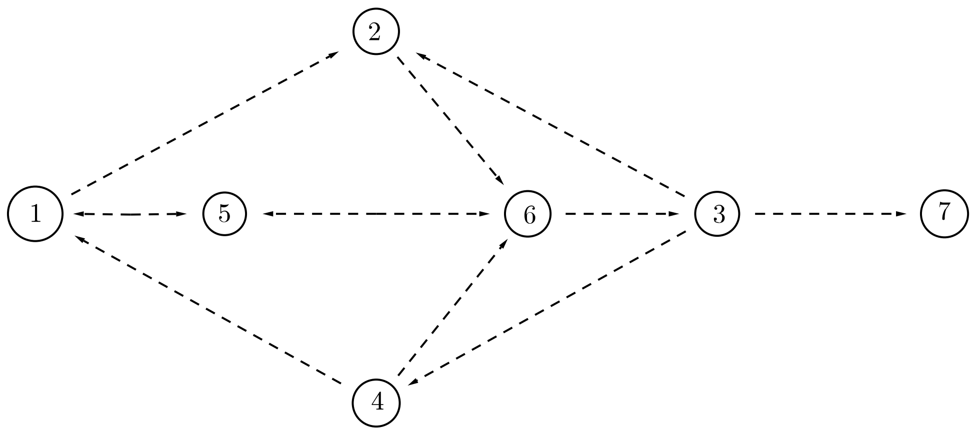
PROBLÈME

Soit n un entier naturel non nul. On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'anneau des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ; I_n sera la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Le produit d'une matrice A (à n lignes et p colonnes) par une matrice B (à p lignes et q colonnes) sera noté $A \cdot B$.

On dira qu'une suite de vecteurs $X^k = (x_1^k, \cdots, x_n^k)$ (indexée par $k \in \mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}^n$ converge vers le vecteur $X = (x_1, \cdots, x_n)$ si, pour tout $i = 1, \cdots, n$, la suite réelle $\left(x_i^k\right)$ converge vers x_i. Un vecteur $P = (p_1, \cdots, p_n)$ est dit *stochastique* si ses composantes vérifient $p_i \geq 0$ pour tout $i = 1, \cdots, n$ et $p_1 + \cdots + p_n = 1$. Soit $A^k = \left(a_{ij}^k\right)$ une suite dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A = (a_{ij})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; on dit que la suite (A^k) converge vers A si, pour tous $i, j = 1, \cdots, n$, la suite réelle $\left(a_{ij}^k\right)$ converge vers a_{ij}.

Un *graphe* est la donnée d'un ensemble fini de points appelés *sommets* reliés par des *arêtes*. Si toutes les arêtes sont orientées, on dira que le graphe est *orienté*. Dans un graphe orienté, un sommet j est dit *voisin* d'un sommet i s'il existe une arête orientée de i vers j. Par exemple, sur le graphe ci-dessous, le sommet 1 a pour voisins 2, 4 et 5 ; le sommet 3 a pour voisins 2, 4 et 7 ; 6 n'est pas voisin de 3 ; 7 n'a aucun voisin.



Marche aléatoire sur un graphe

Soit G un graphe orienté ayant n sommets numérotés de 1 à n. Un point M se balade aléatoirement sur les sommets de G au cours d'étapes ; le nombre d'étapes peut tendre vers l'infini. À chaque étape, le point se déplace, avec la même probabilité, du sommet où il se trouve vers un sommet voisin. Ceci entraîne notamment que la probabilité de passer du sommet i vers le voisin j ne dépend pas du rang de l'étape.

Pour $i, j = 1, ..., n$, on note a_{ij} la probabilité de passage du point M du sommet i au sommet j ; s'il n'y a pas d'arête de i vers j, a_{ij} vaut évidemment 0. On note A la matrice (a_{ij}) ; on l'appelle *matrice de transition* du graphe G.

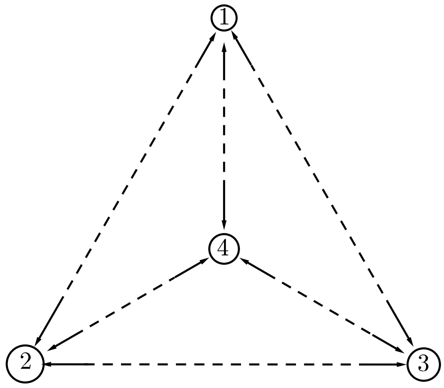
Pour $k \in \mathbb{N}$, on note p_i^k la probabilité que le point M se trouve au sommet i à l'étape de rang k et P^k le vecteur $(p_1^k, \cdots, p_n^k)$.

I. Résultats généraux

1. Justifier l'égalité $p_1^k + \cdots + p_n^k = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $P^{k+1} = P^k \cdot A$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
3. En déduire une expression de P^k en fonction de k, P^0 et la matrice A, pour $k \in \mathbb{N}$.
4. On suppose que la suite de vecteurs (P^k) converge (quand k tend vers $+\infty$) vers un vecteur $P = (p_1, \cdots, p_n)$. Montrer que $p_1 + \cdots + p_n = 1$ et que $P \cdot A = P$.

II. Marche aléatoire sur un tétraèdre

Dans cette section, le graphe G est un tétraèdre (dessiné comme ci-dessous). On suppose que lorsque le point M est sur l'un des sommets, la probabilité qu'il aille vers l'un de ses sommets voisins est la même.



À l'étape $k = 0$, M est sur le sommet 1 et donc $P^0 = (1, 0, 0, 0)$. On pose :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Exprimer la matrice de transition A à l'aide de U.
2. Calculer U^2 et U^3.
3. Montrer qu'il existe deux suites (α_k) et (β_k) telles que, pour tout entier k :

$$U^k = \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k & \beta_k & \beta_k \\ \beta_k & \alpha_k & \beta_k & \beta_k \\ \beta_k & \beta_k & \alpha_k & \beta_k \\ \beta_k & \beta_k & \beta_k & \alpha_k \end{pmatrix}.$$

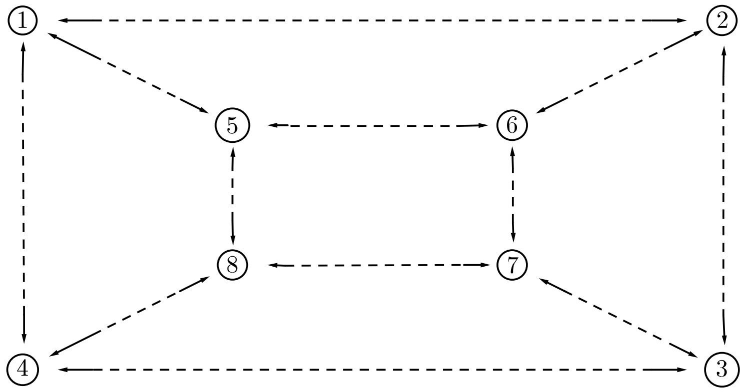
   Montrer que (α_k) et (β_k) vérifient les relations suivantes pour tout k :

$$\begin{cases} \alpha_{k+1} = 3\beta_k \\ \beta_{k+1} = \alpha_k + 2\beta_k. \end{cases}$$

4. En déduire que $\beta_{k+2} = 2\beta_{k+1} + 3\beta_k$ pour tout k.
5. En déduire (de 3 et 4) que, pour tout k, on a $\beta_k = \frac{3^k - (-1)^k}{4}$ et $\alpha_k = \frac{3^k + 3(-1)^k}{4}$.
6. En déduire une expression de P^k pour tout entier naturel k.
7. Montrer que la suite de vecteurs (P^k) converge et déterminer sa limite P.

III. Marche aléatoire sur une pyramide rectangulaire tronquée

Dans toute cette section, G est le graphe ci-dessous.



Au départ le point M est sur le sommet 1 de sorte que $P^0 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ et on suppose que lorsqu'il est sur l'un des sommets du graphe il a la même probabilité de se rendre sur l'un de ses sommets voisins. On partitionne l'ensemble des sommets $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ du graphe G en posant $X = \{1, 3, 6, 8\}$ et $Y = \{2, 4, 5, 7\}$.

1. Donner la matrice A de transition du graphe et calculer $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \cdot A$.
2. Montrer que si le point M se trouve à une étape dans la partie X (resp. Y), il se trouvera à l'étape qui suit dans la partie Y (resp. X).

3. a) Montrer que les coefficients de P^k dont les indices sont dans la partie X sont nuls si k est impair et que les coefficients de P^k dont les indices sont dans la partie Y sont nuls si k est pair.

3. b) La suite (P^k) converge-t-elle ?

IV. <u>Une question générale sur une marche aléatoire</u>

Soit (A^k, P^k) une marche aléatoire sur un graphe G de matrice de transition $A = A^0$ et de vecteur stochastique initial P^0. Parmi les liens logiques habituels *condition nécessaire*, *condition suffisante* et *condition nécessaire et suffisante*, quel est celui qui existe entre les propositions suivantes ?

(i) La suite de vecteurs (P^k) converge.

(ii) Il existe un vecteur stochastique $P = (p_1, \cdots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $P \cdot A = P$.

La réponse, qui devra être soigneusement justifiée, sera présentée sous forme d'une phrase rédigée en français et sous forme d'une proposition mathématique comportant une implication ou une équivalence.

Ce problème est un extrait du sujet de la seconde
épreuve de l'examen du concours du CAPES 2017

Corrigé

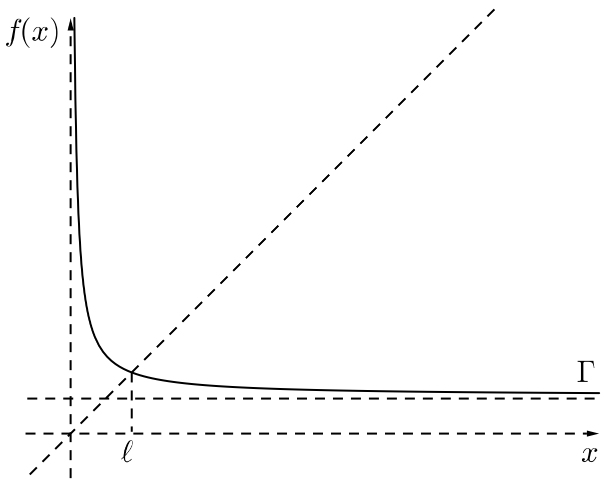
Exercice 1

1. Étude da la fonction f

Tableau de variation

x	0	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		$-\frac{1}{x^2} < 0 \quad \forall x$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ↘	1

Graphe



2. Comme f est décroissante et que $x_n \geq 1$ pour tout $n \geq 1$, on a $f(x_n) \leq f(1) = 2$. Donc, pour tout $n \geq 2$, le terme x_n est dans l'intervalle $[1, 2]$; ceci implique que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est bornée.

3. Comme f est décroissante (strictement), la fonction $\phi(x) = f \circ f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$ est strictement croissante. D'autre part $x_2 - x_0 = \frac{2a+1}{a+1} - a = \frac{-a^2+a+1}{a+1}$ est strictement positif pour $0 < a < 1$. Par suite $x_0 < x_2$ implique $x_2 = \phi(x_0) < \phi(x_2) = x_4$ et ainsi de suite. La suite $u_k = x_{2k}$ est donc strictement croissante. De la même manière, on montre que la suite $v_k = x_{2k+1}$ est strictement décroissante.

4. La suite (u_k) étant bornée, elle est en particulier majorée ; comme en plus elle est croissante, elle converge vers une limite notée ℓ_0. De même, La suite (v_k) étant bornée,

elle est minorée ; comme en plus elle est décroissante, elle converge vers une limite ℓ_1.

5. De façon immédiate, on peut voir que $v_k = f(u_k)$. Comme f est continue on a $\ell_1 = \lim_k v_k = f(\lim_k u_k) = f(\ell_0)$. Par un raisonnement du même type on montre que $\ell_0 = f(\ell_1)$.

6. Par la question 5, on a $\ell_0 = 1 + \frac{1}{\ell_1}$ et $\ell_1 = 1 + \frac{1}{\ell_0}$. Un calcul simple permet de montrer que ces deux relations imposent $\ell_0 = \ell_1$. Ceci montre que la suite (x_n) converge et a pour limite l'unique solution positive ℓ de l'équation $1 + \frac{1}{x} = x$, c'est-à-dire le nombre d'or $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 2

1. Étude da la fonction P

Tableau de variation

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{2}{3}}$		$\sqrt{\frac{2}{3}}$		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	b	$\searrow$	c	$\nearrow$	$+\infty$

2. D'après ce qui précède, la fonction P admet un maximum local $f(-a) = b < 0$ en $-a = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ et un minimum local $f(a) = c < 0$ en a. Elle est strictement croissante sur l'intervalle $[a, +\infty[$ (remarquons que $a < 2$) et telle que $f(2) = -1 < 0$ et $f(3) = 16 > 0$. Elle s'annule donc une seule fois en un point $\alpha \in]2, 3[$.

3. La fonction ϕ a pour dérivée $\phi'(x) = \frac{2}{3(2x+5)^{\frac{2}{3}}}$ qui est strictement positive sur l'intervalle $[2, 3]$ et donc ϕ y est strictement croissante. Comme on a $\phi(2) = 9^{\frac{1}{3}} > 2$ et $\phi(3) = 11^{\frac{1}{3}} < 3$, $\phi([2, 3]) \subset [2, 3]$ *i.e.* ϕ est une application de $[2, 3]$ dans $[2, 3]$. Montrons qu'elle est contractante. La dérivée ϕ' atteint son maximum au point $x = 2$; il vaut $k = \frac{2}{3^{\frac{5}{3}}}$ et est dans l'intervalle $]0, 1[$. D'après le théorème des accroissement finis, on a, pour tous $x, y \in [2, 3]$:

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq \sup_{c \in [2,3]} |\phi'(c)| \cdot |x - y| = k|x - y|$$

c'est-à-dire ϕ est contractante de facteur k.

4. L'espace métrique $[2, 3]$ est complet et $\phi : [2, 3] \longrightarrow [2, 3]$ est une application contractante ; ϕ admet donc un point fixe $x \in [2, 3]$ c'est-à-dire x vérifie $x = (2x + 5)^{\frac{1}{3}}$ ou $x^3 - 2x - 5 = 0$. Par suite $x = \alpha$ puisque α est l'unique solution réelle de l'équation $x^3 - 2x - 5 = 0$.

5. La convergence de la suite (x_n) vers α est une simple conséquence des questions 3 et 4 qu'on vient de traiter.

6. Comme (x_n) converge vers α, il suffit de trouver $n \geq 0$ tel que $|x_n - \alpha| \leq 10^{-3}$; x_n sera alors la valeur approchée à 10^{-3} près qu'on cherche. On a, en se rappelant que α est le point fixe de ϕ :

$$|x_n - \alpha| \leq k|x_{n-1} - \alpha| \leq \cdots \leq k^n|x_0 - \alpha| \leq k^n.$$

La dernière égalité se justifie par le fait que $x_0, \alpha \in [2, 3]$ et donc $|x_0 - \alpha| \leq 3 - 2 = 1$. Il suffit alors de choisir n tel que que $k^n \leq 10^{-3}$, c'est-à-dire $\left(\frac{2}{3^{\frac{5}{3}}}\right)^n \leq 10^{-3}$. La résolution donne :

$$n \geq \frac{3\text{Log}(10)}{\frac{5}{3}\text{Log}(3) - \text{Log}(2)} \simeq 6,070591.$$

Pour $n \geq 7$, x_n donne une valeur approchée de α à $1/1000$ près.

PROBLÈME

Désignons par Ω l'ensemble $\{1, \cdots, n\}$ des sommets du graphe sur lesquels se balade le point M au cours de sa marche aléatoire.

Section I

1. Pour $i \in \Omega$, soit E_i^k l'événement "M est sur i à l'étape k". Alors $P(E_i^k) = p_i^k$ et $\{E_1^k, \cdots, E_n^k\}$ est une partition de Ω. Donc, de façon évidente $1 = P(\Omega) = p_1^k + \cdots + p_n^k$.

2. Soient $i, j \in \Omega$ et C_{ij}^k l'événement "M part de i vers j à l'étape k". À l'étape k, M est au moins sur l'un des sommets $1, \cdots, n$; la probabilité de l'événement E_j^{k+1} est donc celle de la réunion disjointe des événements $E_1^k \cap C_{1j}^k, \cdots, E_n^k \cap C_{nj}^k$. Comme E_i^k et C_{ij}^k sont indépendants pour tout i, on a $P(E_j^{k+1}) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i^k)P(C_{ij}^k) = \sum_{i=1}^{n} p_i^k a_{ij}^k$ qui n'est rien d'autre que la $j^{\text{ème}}$ composante du vecteur $P^{k+1} = P^k \cdot A$.

3. Pour $k = 0$, $A^0 = I_n$ et on a $P^0 = P^0 \cdot A^0$. Pour $k \geq 1$ on a, d'après ce qui précède, $P^k = P^{k-1} \cdot A$. Donc :

$$P^k = P^{k-1} \cdot A = (P^{k-2} \cdot A) \cdot A = P^{k-2} \cdot A^2 = \cdots = P^0 \cdot A^k.$$

4. La suite P^k converge vers $P = (p_1, \cdots, p_n)$, donc pour tout $i = 1, \cdots, n$, p_i^k converge vers p_i. Comme $p_1^k + \cdots + p_n^k = 1$ pour tout k, la suite $(p_1^k + \cdots + p_n^k)_k$ est constante et donc sa limite est 1, *i.e.* $p_1 + \cdots + p_n = 1$. D'autre part on a :

$$P = \lim_{k\to+\infty} P^{k+1} = \lim_{k\to+\infty}(P^k \cdot A) = (\lim_{k\to+\infty} P^k) \cdot A = P \cdot A.$$

Section II

1. De chaque sommet du tétraèdre partent, avec la même probabilité, trois arêtes vers les trois autres sommets. La matrice de transition du graphe en question est donc :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}U.$$

2. Calcul des matrices U^2 et U^3. On a :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = U$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = U^2$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 6 \end{pmatrix} = U^3$$

3. Les suites en question (α_k) et (β_k) sont telles que u_{ij}^k (coefficient de la matrice U^k) vaut α_k si $i = j$ et β_k si $i \neq j$. C'est ce qu'on voit sur U, U^2 et U^3 ; montrons que c'est vrai à tout rang k. Le produit $U \cdot U^k = U^{k+1}$ est :

$$\begin{pmatrix} 3\beta_k & \alpha_k + 2\beta_k & \alpha_k + 2\beta_k & \alpha_k + 2\beta_k \\ \alpha_k + 2\beta_k & 3\beta_k & \alpha_k + 2\beta_k & \alpha_k + 2\beta_k \\ \alpha_k + 2\beta_k & \alpha_k + 2\beta_k & 3\beta_k & \alpha_k + 2\beta_k \\ \alpha_k + 2\beta_k & \alpha_k + 2\beta_k & \alpha_k + 2\beta_k & 3\beta_k \end{pmatrix}.$$

La matrice U^{k+1} est donc bien de la forme :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{k+1} & \beta_{k+1} & \beta_{k+1} & \beta_{k+1} \\ \beta_{k+1} & \alpha_{k+1} & \beta_{k+1} & \beta_{k+1} \\ \beta_{k+1} & \beta_{k+1} & \alpha_{k+1} & \beta_{k+1} \\ \beta_{k+1} & \beta_{k+1} & \beta_{k+1} & \alpha_{k+1} \end{pmatrix}$$

avec $\alpha_{k+1} = 3\beta_k$ et $\beta_{k+1} = \alpha_k + 2\beta_k$.

4. On a $\beta_{k+2} = 2\beta_{k+1} + \alpha_{k+1} = 2\beta_{k+1} + 3\beta_k$ pour tout k.

5. Il est clair que pour $k = 0$, on a $0 = \beta_0 = \frac{3^0 - (-1)^0}{4}$ et $1 = \alpha_0 = \frac{3^0 + 3(-1)^0}{4}$. Faisons une récurrence sur k ; supposons $\alpha_k = \frac{3^k + 3(-1)^k}{4}$ et $\beta_k = \frac{3^k - (-1)^k}{4}$. Alors :

$$\alpha_{k+1} = 3\beta_k = 3\frac{3^k - (-1)^k}{4} = \frac{3^{k+1} - 3(-1)^k}{4} = \frac{3^{k+1} + 3(-1)^{k+1}}{4}$$

et

$$\beta_{k+1} = \alpha_k + 2\beta_k = \frac{3^k + 3(-1)^k}{4} + 2\frac{3^k - (-1)^k}{4} = \frac{3^{k+1} - (-1)^{k+1}}{4}.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

6. Comme $A = \frac{1}{3}U$, on a $A^k = \frac{1}{3^k}U^k$. Par suite :

$$A^k = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_k}{3^k} & \frac{\beta_k}{3^k} & \frac{\beta_k}{3^k} & \frac{\beta_k}{3^k} \\ \frac{\beta_k}{3^k} & \frac{\alpha_k}{3^k} & \frac{\beta_k}{3^k} & \frac{\beta_k}{3^k} \\ \frac{\beta_k}{3^k} & \frac{\beta_k}{3^k} & \frac{\alpha_k}{3^k} & \frac{\beta_k}{3^k} \\ \frac{\beta_k}{3^k} & \frac{\beta_k}{3^k} & \frac{\beta_k}{3^k} & \frac{\alpha_k}{3^k} \end{pmatrix}$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned}P^k &= P^0 \cdot A \\ &= (1,0,0,0)\cdot A^k = \left(\frac{\alpha_k}{3^k}, \frac{\beta_k}{3^k}, \frac{\beta_k}{3^k}, \frac{\beta_k}{3^k}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(1+\frac{(-1)^k}{3^{k-1}}, 1-\frac{(-1)^k}{3^k}, 1-\frac{(-1)^k}{3^k}, 1-\frac{(-1)^k}{3^k}\right).\end{aligned}$$

7. De façon évidente la suite (P^k) converge vers le vecteur $P = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

Section III

1. De chaque sommet partent trois arêtes. Et comme les voisins d'un sommet ont la même probabilité d'être atteints, par simple observation du graphe, sa matrice de transition (carrée d'ordre 8) s'écrit :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un calcul immédiat montre que le vecteur $P' = (1,1,1,1,1,1,1,1)$ est transformé en lui-même *i.e.* $P' \cdot A = P'$. (Le vecteur P' est fixé par A.)

2. En regardant le graphe on voit que le sommet 1 a pour voisins $\{2,4,5\}$, 3 a pour voisins $\{2,4,7\}$, 6 a pour voisins $\{2,5,7\}$ et 8 a pour voisins $\{4,5,7\}$. Donc si le point M est sur X à une étape, il sera sur Y à l'étape qui suit. De la même manière, on vérifie (encore une fois en regardant le graphe) que si le point M est sur Y à une étape, il sera sur X à l'étape qui suit.

3. a) On aura besoin de l'expression de la matrice A^2. Un calcul simple (qu'on ne détaille pas) donne :

$$A^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Remarque 1 : Si $j \in Y$, les coefficients a_{ij}^2 sont nuls pour $i \in X$. De même, si $j \in X$, les coefficients a_{ij}^2 sont nuls pour $i \in Y$.

Remarque 2 : Le vecteur $P^0 = (1,0,0,0,0,0,0,0)$ est tel que $p_2^0 = p_4^0 = p_5^0 = p_7^0 = 0$ *i.e.* $p_i^0 = 0$ pour $i \in Y$ et le vecteur $P^1 = P^0 \cdot A = \frac{1}{3}(0,1,0,1,1,0,0,0)$ est tel que $p_1^1 = p_3^1 = p_6^1 = p_8^1 = 0$ *i.e.* $p_i^1 = 0$ pour $i \in X$.

Supposons maintenant que $P^{2k} = (p_1^{2k}, \cdots, p_8^{2k})$ a ses composantes p_i^{2k} nulles lorsque $i \in Y$. Soit $j \in Y$ et calculons la composante p_j^{2k+2} de $P^{2k+2} = P^{2k} \cdot A^2$. On a $p_j^{2k+2} = \displaystyle\sum_{i=1}^{8} p_i^{2k} a_{ij}^2$. Mais $p_i^{2k} = 0$ pour $i \in Y$, donc $p_j^{2k+2} = \displaystyle\sum_{i \in X}^{8} p_i^{2k} a_{ij}^2$ qui vaut 0 puisque $a_{ij}^2 = 0$ pour $i \in X$ (et $j \in Y$).

On a donc montré que, pour k pair les composantes du vecteur P^k dont les indices sont dans Y sont nulles. (Le démarrage de la propriété est donné par la remarque 2).

De la même manière, on démontre que, pour k impair les composantes du vecteur P^k dont les indices sont dans X sont nulles. (Le démarrage de la propriété est aussi donné par la remarque 2).

3. b) Supposons que (P^k) converge vers $P = (p_1, \cdots, p_8)$. Alors $p_1 + \cdots + p_8 = 1$. Comme la suite (P^{2k}) est extraite de (P^k), elle converge aussi vers P. On aura $p_i = 0$ pour $i \in Y$. De même, la suite (P^{2k+1}) est extraite de (P^k) donc converge aussi vers P et par suite $p_i = 0$ pour $i \in X$. Finalement on doit avoir $P = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, ce qui n'est pas possible car ça contredit la relation $p_1 + \cdots + p_8 = 1$. La suite (P^k) n'est donc pas convergente.

<u>Section IV</u>

• Si la suite $P^k = P^0 \cdot A^k$ converge, alors il existe un vecteur stochastique $P = (p_1, \cdots, p_n)$ vérifiant $P = P \cdot A$.

C'était l'objet de la question I.4. La réciproque de cette assertion est fausse comme on a l'a vu dans la question III.1 :

Le vecteur $P' = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ vérifie $P' = P' \cdot A$; donc le vecteur stochastique $P = \frac{1}{8} P'$ verifie aussi $P = P \cdot A$ et pourtant la suite (P^k) ne converge pas comme on l'a vu dans la question III.3. b).

• On a : $(i) \Longrightarrow (ii)$. Ou encore : *(ii) est une condition nécessaire pour (i).*

• On n'a pas : $(ii) \Longrightarrow (i)$. Ou encore : *(ii) n'est pas une condition suffisante pour (i).*