MEÉF 1 - Mathématiques
DS4 - 18 décembre 2017
Mathématiques fondamentales

Exercice 1

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. On suppose que tous ses angles ont une mesure dans $]0, \pi[$. On dira qu'un quadrilatère $MNPQ$ est *strictement inscrit* dans $ABCD$ si chacun des segments ouverts $]AB[$, $]BC[$, $]CD[$ et $]DA[$ porte un et un seul sommet de $MNPQ$, par exemple $M \in]AB[$, $N \in]BC[$, $P \in]CD[$ et $Q \in]DA[$.

On suppose que $ABCD$ est un rectangle de longueur $AB = CD = a$ et de largeur $AD = BC = b$ avec $0 < b < a$ et on se donne un quadrilatère $MNPQ$ strictement inscrit dans $ABCD$.

Dans les questions 1 et 2, et dans ces questions seulement, les points M, N, P et Q sont tels que $BM = BN = DP = DQ = x$ où $x \in]0, b[$.

1. Quelle est la nature du quadrilatère $MNPQ$. Calculer son aire $\mathcal{A}$ en fonction des grandeurs a, b et x. Pour quelle valeur de x cette aire est-elle maximale ? Donner la valeur de son maximum.

2. Écrire l'équation que doit satisfaire x pour que $MNPQ$ soit un losange. Traduire cela en fonction du rapport $k = \frac{a}{b}$.

3. Montrer qu'il existe une infinité de losanges $MNPQ$ strictement inscrits dans $ABCD$ et donner un procédé pour les construire géométriquement.

Exercice 2

1. a) Déterminer trois nombres réels positifs x, y et z dont la somme est 1 et formant une progression arithmétique de raison $\frac{1}{4}$.

1. b) Déterminer trois nombres réels positifs x, y et z dont la somme est 1 et formant une progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

On considère deux variables aléatoires X et Y sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que X et Y sont indépendantes et que :

i) X prend les valeurs 3, 1 et 2 avec des probabilités respectives formant une progression arithmétique de raison $\frac{1}{4}$;

ii) Y prend les valeurs 2, 1 et 0 avec des probabilités respectives formant une progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

2. a) Calculer les espérances mathématiques $E(X)$ et $E(Y)$.

2. b) Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire $Z = XY$.

2. c) Calculer $E(Z)$ et en déduire $E(XY + 2Y - X)$.

Problème

On munit le plan $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$ de son produit scalaire usuel $\langle (x, y), (x', y') \rangle = xx' + yy'$ et de son repère orthonormé canonique $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ où $\overrightarrow{i} = (1, 0)$ et $\overrightarrow{j} = (0, 1)$. On identifie $\mathbb{R}^2$ au plan complexe $\mathbb{C}$ via la bijection $\mathbb{R}$-linéaire $(x, y) \longmapsto z = x + iy$.

Partie I

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $T_\alpha : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ l'application affine qui au point M de coordonnées (x, y) associe le point M' de coordonnées (x', y') :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \alpha y \\ y' = \alpha x - \frac{1}{2}y. \end{cases}$$

1. Montrer que T_α est une bijection et qu'elle admet un unique point invariant que l'on déterminera.

2. Montrer qu'il existe une unique valeur de α pour laquelle T_α est une homothétie qu'on notera h. En donner le centre et le rapport.

3. Montrer qu'il existe deux valeurs de α pour lesquelles T_α est une isométrie. Montrer que ces isométries sont réciproques l'une de l'autre. On les notera r et r^{-1}.

4. Montrer que les affixes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ respectivement de M et M' vérifient une relation de la forme $z' = az$ où a est un nombre complexe qu'on déterminera en fonction de α. En déduire que T_α est une similitude dont on donnera le centre, le rapport ρ et l'angle θ (qu'on caractérisera par son cosinus et son sinus).

5. Donner la valeur de a pour $T_\alpha = h$, $T_\alpha = r$ et $T_\alpha = r^{-1}$. Montrer que r et r^{-1} laissent globalement invariant tout triangle équilatéral ayant O comme centre de gravité (isobarycentre).

Partie II

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$. On note A, B et C les points du plan ayant pour affixes les solutions de cette équation (B et C d'abscisses négatives et B d'ordonnée positive) et par A_1, B_1 et C_1 leurs images respectives par T_α.

Calculer les coordonnées des points A_1, B_1 et C_1 en fonction de α. En déduire que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le point A_1 est sur la droite (BC), B_1 sur la droite (CA) et C_1 sur la droite (AB).

2. Montrer que lorsque α décrit $\mathbb{R}$, le milieu du segment $[B_1C_1]$ décrit une droite que l'on précisera.

3. a) Soit A_2 le transformé de A_1 par T_α. Montrer que les coordonnées du point A_2 sont $x = \frac{1}{4} - \alpha^2$ et $y = -\alpha$.

3. b) Reconnaître et construire la courbe Γ des points A_2 lorsque α varie.

3. c) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{B_1C_1}$ et le vecteur dérivé de $\overrightarrow{OA_2}$, considéré comme une fonction du paramètre α, sont linéairement dépendants. En déduire que la droite (B_1C_1) est la tangente au point A_2 à la courbe Γ.

Partie III

On fixe à présent la valeur du réel α et on définit, par récurrence, la suite d'applications affines : $T_\alpha^0 = I$ (application identité) et pour $n \geq 1$ $\quad T_\alpha^n = \overbrace{T_\alpha \circ \cdots \circ T_\alpha}^{n \text{ fois}}$.

Le point A a toujours pour coordonnées $(1, 0)$. On pose $A_n = T_\alpha^n(A)$ pour $n \geq 0$.

1. Calculer l'affixe z_n de A_n en fonction de a (*cf.* I.4) et démontrer que :

$$z_n = \left(-\frac{1}{2\cos\theta}\right)^n (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

où θ est l'angle de la similitude T_α (*cf.* I.4).

Pour quelles valeurs de θ le module de z_n est-il une fonction décroissante de n ?

2. Calculer $||\overrightarrow{A_pA_{p+1}}||$ en fonction de $p \in \mathbb{N}$ puis $S_n = \sum_{p=0}^{n} ||\overrightarrow{A_pA_{p+1}}||$.

Comment faut-il choisir θ pour que la suite S_n admette une limite S finie quand n tend vers $+\infty$? Donner la valeur de cette limite S.

Corrigé

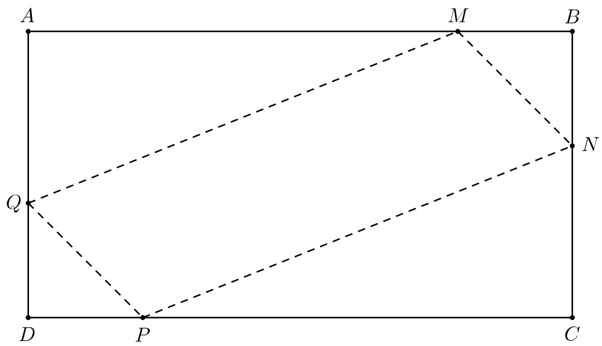
Exercice 1

1. Les deux triangles BMN et DPQ sont rectangles isocèles respectivement en B et D et tels que $BM = BN = x = DP = DQ$; ils sont donc égaux et par suite $MN = PQ$.

Dans les deux triangles AMQ et CNP, rectangles respectivement en A et C, on a par le théorème de Pythagore :

$$MQ = \sqrt{AM^2 + AQ^2} = \sqrt{(a-x)^2 + (b-x)^2} = \sqrt{CP^2 + CN^2} = NP.$$

Le quadrilatère $MNPQ$ a donc ses côtés opposés égaux deux à deux ; par suite c'est un parallélogramme.



Juste en regardant le dessin, on voit que l'aire de notre parallélogramme est :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x) &= \text{aire}(ABCD) - \text{aire}(BMN) - \text{aire}(DPQ) - \text{aire}(CNP) - \text{aire}(AMQ)\\ &= ab - x^2 - (a-x)(b-x)\\ &= -2x^2 + (a+b)x.\end{aligned}$$

Ci-dessous le tableau de variation de la fonction $x \in]0, b[\longmapsto \mathcal{A}(x) \in \mathbb{R}_+$:

x	0		$\frac{a+b}{4}$		b
$\mathcal{A}'(x)$		$+$	0	$-$	
$\mathcal{A}(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{(a+b)^2}{8}$	$\searrow$	$b(a-b)$

La dérivée $\mathcal{A}'(x)$ s'annule en $x_0 = \frac{a+b}{4}$ en lequel l'aire est maximale et vaut $\mathcal{A}(x_0) = \frac{(a+b)^2}{8}$.

2. Pour que $MNPQ$ soit un losange il faut, et il suffit, que $MN = MQ$, c'est-à-dire $2x^2 = (a-x)^2 + (b-x)^2$. Ce qui donne la condition :

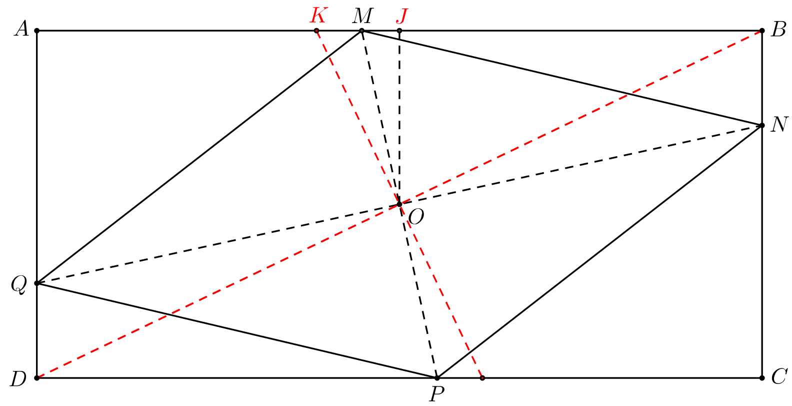
$$x = \frac{a^2+b^2}{2(a+b)}.$$

Et comme $x \in]0, b[$, on doit avoir $\frac{a^2+b^2}{2(a+b)} < b$ ou $a^2 + b^2 < 2(ab + b^2)$. Ce qui impose à $k = \frac{a}{b}$ de satisfaire l'inégalité $k^2 - 2k - 1 < 0$ *i.e.* $1 - \sqrt{2} < k < 1 + \sqrt{2}$. Comme $k > 1$ (car $a > b$) k doit en fait satisfaire la double inégalité $1 < k < 1 + \sqrt{2}$.

3. Faisons d'abord une petite remarque. Soient O le centre du rectangle $ABCD$ et J le milieu de AB. Alors la perpendiculaire à (la grande) diagonale BD (qui passe bien sûr par O) coupe la droite (AB) en un point K sur le segment $[JA]$. En effet, un calcul simple donne $JK = \frac{b^2}{2a}$; comme $b < a$, $JK < \frac{a}{2}$.

Sur le segment ouvert $]BC[$ on choisit un point N. La droite (NO) coupe AD en un point Q tel que $DQ = BN$. Par O on mène la perpendiculaire à la droite (NQ). En vertu de la remarque préliminaire que nous venons de faire, on vérifie facilement que celle-ci coupe les droites (AB) et (CD) respectivement sur les segments ouverts $]AB[$ et $]CD[$ en des points M et P. Le quadrilatère $MNPQ$ ainsi obtenu est un losange.

On obtient tous les losanges strictement inscrits dans $ABCD$ en faisant varier le point N sur le segment ouvert $]BC[$. (Le point M varie sur le segment ouvert $]KK'[$ où K' est le symétrique de K par rapport à J.)



Exercice 2

1. a) Les trois nombres cherchés x, y, z vérifient $y = x + \frac{1}{4}$, $z = y + \frac{1}{4}$ et $x + y + z = 1$, c'est-à-dire $x + (x + \frac{1}{4}) + (x + \frac{2}{4}) = 1$. Ceci nous donne $x = \frac{1}{12}$, $y = \frac{4}{12}$ et $z = \frac{7}{12}$.

1. b) Les trois nombres cherchés x, y, z vérifient $y = \frac{1}{2}x$, $z = \frac{1}{4}x$ et $x + y + z = 1$, c'est-à-dire $x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x = 1$. Ceci nous donne $x = \frac{4}{7}$, $y = \frac{2}{7}$ et $z = \frac{1}{7}$.

2. a) La variable X prend trois valeurs : 3, 1 et 2 avec les probabilités :

$$\begin{cases} p_1 = P(X=3) = \frac{1}{12} \\ p_2 = P(X=1) = \frac{4}{12} \\ p_3 = P(X=2) = \frac{7}{12}. \end{cases}$$

D'où $E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 = 3 \cdot \frac{1}{12} + 1 \cdot \frac{4}{12} + 2 \cdot \frac{7}{12} = \frac{7}{4}$.

La variable Y prend trois valeurs : 2, 1 et 0 avec les probabilités :

$$\begin{cases} q_1 = P(Y=2) = \frac{4}{7} \\ q_2 = P(Y=1) = \frac{2}{7} \\ q_3 = P(Y=0) = \frac{1}{7}. \end{cases}$$

D'où $E(Y) = y_1q_1 + y_2q_2 + y_3q_3 = 2 \cdot \frac{4}{7} + 1 \cdot \frac{2}{7} + 0 \cdot \frac{4}{7} = \frac{10}{7}$.

2. b) La loi de la variable aléatoire $Z = XY$ est donnée dans le tableau qui suit :

z_i	0	1	2	3	4	6
$P(Z = z_i)$	$\frac{6}{42}$	$\frac{4}{42}$	$\frac{15}{42}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{14}{42}$	$\frac{2}{42}$

2. c) Un calcul élémentaire (et habituel) donne $E(Z) = \frac{5}{2}$. (C'est aussi $E(X)E(Y)$ puisque X et Y sont indépendantes.) On en déduit, en utilisant la linéarité de l'espérance mathématique :

$$E(XY + 2Y - X) = E(XY) + 2E(Y) - E(X) = \frac{101}{28}.$$

Problème

Partie I

1. L'application T_α est linéaire de matrice $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\alpha \\ \alpha & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ dont le déterminant $\frac{1}{4} + \alpha^2$ est toujours non nul ; donc T_α est une bijection.

Un point fixe a pour coordonnées (x, y) vérifiant le système linéaire $\begin{cases} -\frac{1}{2}x - \alpha y = x \\ \alpha x - \frac{1}{2}y = y. \end{cases}$ Sa résolution est immédiate et donne $x = 0$ et $y = 0$; O est donc le seul point fixe de T_α.

2. Comme T_α est linéaire, elle est une homothétie s'il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $x' = kx$ et $y' = ky$ (son centre est forcément O). On doit donc avoir $-\frac{1}{2}x - \alpha y = kx$ et $\alpha x - \frac{1}{2}y = ky$ pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; ceci donne forcément $\alpha = 0$ et $k = -\frac{1}{2}$.

3. Si T_α est une isométrie, son déterminant (qui est positif) doit être égal à 1 *i.e.* on doit avoir $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ce qui signifie que T_α a pour matrice $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, c'est-à-dire T_α est la rotation linéaire r (de centre O) d'angle $\theta = \frac{2\pi}{3}$ ou son inverse r^{-1} qui est la rotation linéaire d'angle $-\theta = -\frac{2\pi}{3}$.

4. La matrice de l'application linéaie T_α peut s'écrire :

$$\frac{\sqrt{4\alpha^2 + 1}}{2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{4\alpha^2+1}} & -\frac{2\alpha}{\sqrt{4\alpha^2+1}} \\ \\ \frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha^2+1}} & -\frac{1}{\sqrt{4\alpha^2+1}} \end{pmatrix}.$$

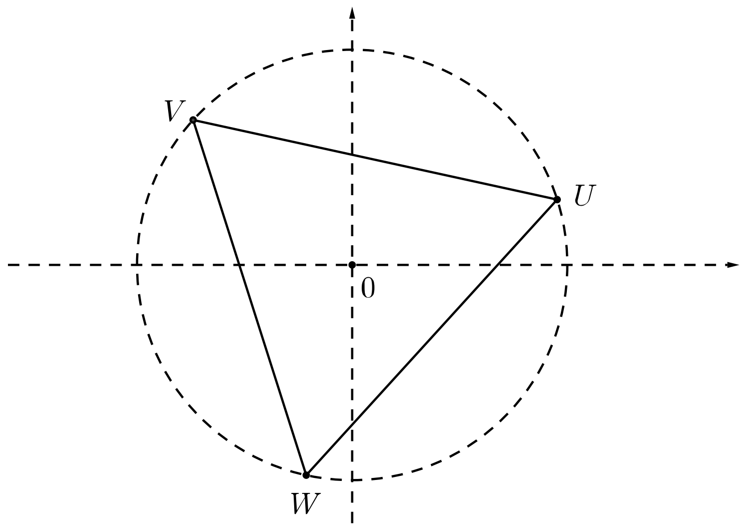
On pose $\rho = \frac{\sqrt{4\alpha^2+1}}{2}$ et on note θ le réel tel que $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{4\alpha^2+1}}$ et $\sin\theta = \frac{2\alpha}{\sqrt{4\alpha^2+1}}$. Alors le nombre complexe $a = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ vérifie $z' = az$.

La transformation T_α est la similitude de centre O, de rapport ρ et d'angle θ.

5. Pour $\alpha = 0$, $T_0 = h$; on a $\rho = \frac{1}{2}$ et $\theta = \pi$ *i.e.* $a = -\frac{1}{2}$. Pour $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $T_\alpha = r$; on a $a = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Pour $\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $T_\alpha = r^{-1}$; on a $a = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.

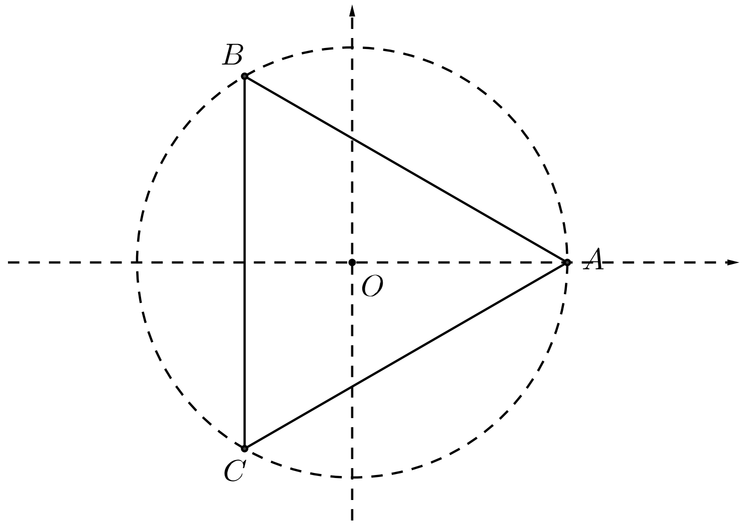
Un triangle équilatéral UVW ayant l'origine pour centre de gravité (point de concours des médianes, donc des médiatrices) a ses sommets sur un cercle centré à l'origine (et dont le rayon est égal à $\frac{2}{3}$ (hauteur du triangle)). Les angles $(\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OV})$, $(\overrightarrow{OV}, \overrightarrow{OW})$ et $(\overrightarrow{OW}, \overrightarrow{OU})$ valent tous $\frac{2\pi}{3}$. Par suite r (resp. r^{-1}) envoie un sommet du triangle sur un autre sommet du même triangle.

Les rotations r et r^{-1} laissent globalement invariant tout triangle équilatéral ayant l'origine comme isobarycentre.



Partie II

1. On pose $z = ke^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}_+$. L'équation $z^3 = 1$ devient $k^3 e^{3i\pi} = 1$. Ce qui donne $k = 1$ et 3θ congru à 0 modulo 2π. On a donc trois solutions $z_0 = 1$, $z_1 = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = e^{-\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Les points d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2 seront notés A, B et C.



Déterminons les points A_1, B_1 et C_1 en calculant leurs coordonnées. On rappelle que $A = (1, 0)$, $B = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $C = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. On a donc :

$$A_1 = T_\alpha(A) = \left(-\frac{1}{2}, \alpha\right)$$

$$B_1 = T_\alpha(B) = \left(\frac{1}{4} - \alpha\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\alpha}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$C_1 = T_\alpha(B) = \left(\frac{1}{4} + \alpha\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

On voit que l'abscisse de A_1 est indépendante de α et est égale à $-\frac{1}{2}$, donc reste sur la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$, c'est-à-dire la droite (BC). D'autre part, un calcul immédiat donne :

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AB_1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} - \alpha\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\alpha}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}.$$

D'où dét $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB_1}\right) = -\frac{3}{2}\left(-\frac{\alpha}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\alpha\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4}\right) = 0$. Ceci montre que le point B_1 est sur la droite (AC). De la même manière :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AC_1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} + \alpha\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}.$$

D'où dét $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC_1}\right) = -\frac{3}{2}\left(-\frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{3}{4} + \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right) = 0$. Ceci montre que le point C_1 est sur la droite (AB).

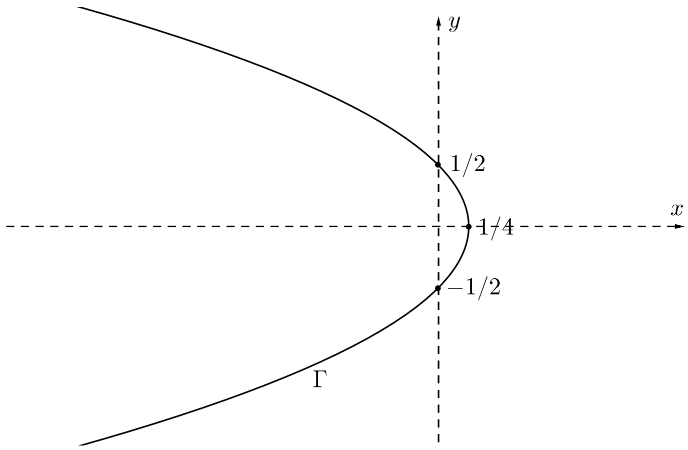
2. Le milieur J du segment $[B_1C_1]$ a pour coordonnées :

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{4} - \alpha\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\alpha}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} + \alpha\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right\} = \left(\frac{1}{4}, -\frac{\alpha}{2}\right).$$

Le point J varie donc sur la droite d'équation $x = \frac{1}{4}$.

3. a) Le calcul des coordonnées du point $A_2 = T_\alpha(A_1)$ est vraiment immédiat. On a $A_2 = \left(\frac{1}{4} - \alpha^2, -\alpha\right)$.

3. b) Le point A_2 varie sur la courbe Γ d'équation cartésienne $x = -y^2 + \frac{1}{4}$ qui est une parabole.



3. c) Le vecteur dérivé (calculé par rapport à la variable α) du vecteur $\overrightarrow{OA_2}$ a pour coordonnées $x'(\alpha) = -2\alpha$ et $y'(\alpha) = -1$ et :

$$\overrightarrow{B_1C_1} = \begin{pmatrix} \alpha\sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} -2\alpha \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OA_2}'(\alpha).$$

Comme A_2 est le seul point commun à la la courbe Γ et la droite (B_1C_1) (qui n'est pas parallèle à l'axe de la parabole) celle-ci est bien la tangente à Γ en A_2.

Partie III

On rappelle que la transformation T_α est la similitude qui, au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = az$ où a est le nombre complexe $a = \rho e^{i\theta}$ tel que :

$$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{4\alpha^2+1}} \qquad \sin\theta = \frac{2\alpha}{\sqrt{4\alpha^2+1}}$$

et :

$$\rho = \frac{\sqrt{4\alpha^2+1}}{2} = -\frac{1}{2\cos\theta}.$$

1. Le point $A_0 = A$ a pour affixe $z_0 = 1$, $A_n = T_\alpha^n(A)$ aura donc pour affixe :

$$z_n = a^n z_0 = a^n = \left(-\frac{1}{2\cos\theta}\right)^n e^{in\theta} = \left(-\frac{1}{2\cos\theta}\right)^n (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)).$$

On a $|z_n| = \frac{1}{|2\cos\theta|^n}$. Cette quantité est une fonction décroissante (au sens large) de n si $|2\cos\theta| \geq 1$, c'est-à-dire si $-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{4\pi}{3}$.

2. On a $||\overrightarrow{A_pA_{p+1}}|| = |z_{p+1} - z_p| = |a^{p+1} - a^p| = |a|^p \cdot |a-1|$. D'où :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{p=0}^{n} ||\overrightarrow{A_pA_{p+1}}|| \\ &= |a-1| \sum_{p=0}^{n} |a|^p \\ &= \frac{|a-1|}{1-|a|} \cdot (1 - |a|^{n+1}) \text{ (si } |a| \neq 1). \end{aligned}$$

Pour que cette suite ait une limite quand n tend vers $+\infty$, il est nécessaire et suffisant que $|a| < 1$. Ce qui revient à choisir θ tel que :

$$-\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{2\pi}{3} < \theta < \frac{4\pi}{3}.$$

Dans ces conditions, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - |a|^{n+1}\right) = 1$$

et donc :

$$S = \frac{|a-1|}{1-|a|}.$$