UNIVERSITÉ DE VALENCIENNES

LICENCE DE MATHÉMATIQUES
Mesure-Intégration

par

Aziz El Kacimi

aziz.elkacimi@univ-valenciennes.fr

CAHIER DE COURS ET D'EXERCICES

Année universitaire 2006-2007

AVANT-PROPOS

Ce cours est une introduction à la notion de mesure cet celle d'intégrale de Lebesgue. Il est présenté de façon très élémentaire et est réduit à l'essentiel de la théorie. Le lecteur désireux d'en savoir plus peut consulter les ouvrages mentionnés à la fin du texte.

Dans le chapitre I on introduit la notion d'algèbre de Boole et celle de tribu ou σ-algèbre. Ensuite on définit les fonctions mesurables et on donne leurs propriétés essentielles. Le chapitre II introduit la notion de mesure sur une tribu et certaines de ses propriétés. On énonce seulement (car la démonstration est loin d'être triviale et est assez longue) le théorème de prolongement d'une mesure à la tribu engendrée par une semi-algèbre de Boole et on l'utilise pour construire la mesure produit sur un produit fini d'espaces mesurés ainsi que la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On termine par la notion de propriété vérifiée presque partout fondamentale en analyse. Dans le chapitre III on définit l'intégrale au sens de Lebesgue sur un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ quelconque. On y démontre le théorème de convergence dominée (ou théorème de Lebesgue) et on en donne les applications les plus importantes : passage à la limite sous le signe somme et dérivation d'une intégrale. Dans le chapitre IV on démontre un résultat important en théorie de l'intégration : le théorème de Fubini qui permet de calculer l'intégrale (d'une fonction intégrable) sur un espace produit en intégrant successivement sur chacun des facteurs. On y définit aussi les mesures à densité et on énonce le théorème de Radon-Nikodym (dont la démonstartion est aussi laborieuse que celle du théorème de prolongement d'une mesure) ainsi que le théorème de transfert et la formule de changement de variable. On termine le cours par le chapitre V dédié au calcul des volumes des boules et des sphères des espaces euclidiens $\mathbb{R}^n$.

CHAPITRE I

ESPACES MESURABLES

Le but de ce chapitre est d'introduire la notion d'espace mesurable et d'en donner quelques exemples. Nous définirons les applications mesurables qui sont des objets fondamentaux : elles sont aux espaces mesurables ce que sont les applications continues aux espaces métriques. Nous décrirons leurs propriétés plus particulièrement dans le cas où elles prennent des valeurs réelles.

1. Algèbres de Boole

Pour avoir une idée de la notion de mesure, nous allons regarder de manière assez vague (mais intuitive) un exemple concret. Considérons l'ensemble des réels $\Omega = \mathbb{R}$ et essayons de voir à quel type de partie A de Ω on pourrait associer un nombre réel $\mu(A)$ qui serait censé représenter une *mesure* de A. Nous allons commencer par les parties les plus simples, c'est-à-dire les intervalles (ouverts, fermés ...). Convenons, pour simplifier le langage, de dire qu'une partie A est *mesurable* si on peut lui associer une "mesure". Cette appellation reste pour le moment assez vague car le fait qu'un ensemble soit mesurable ou non dépend de la manière dont on veut le mesurer.

Si $A = |a, b|$ est un intervalle borné (ouvert, semi-ouvert ou fermé) on pose, par définition :

$$\mu(A) = b - a. \tag{I.1}$$

Autrement dit, la longueur de A peut être prise comme mesure de A. Si A est non borné, on prend $\mu(A) = +\infty$. Il découle de (I.1) que la mesure d'un point $A = \{a\} = [a, a]$ et celle de l'ensemble vide $\emptyset =]a, a[$ sont nulles.

i) Soient $A = |a, b|$ et $B = |c, d|$ deux intervalles. Alors il est clair que la mesure de $A \cup B$ n'est pas toujours égale à la somme des mesures respectives de A et B mais :

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) \tag{I.2}$$

qui implique en particulier que si $A \cap B = \emptyset$, alors $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ et il est raisonnable d'exiger d'une "mesure" de vérifier une telle propriété. On peut donc mesurer les réunions finies d'intervalles.

ii) Comme on admet que l'ensemble Ω tout entier est mesurable, il est normal de demander que si A est mesurable, son complémentaire A^c doit être aussi mesurable et que sa mesure (demandons à celle de A d'être finie) est $\mu(\Omega) - \mu(A)$.

iii) Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'intervalles, deux à deux disjoints. On pose :

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \tag{I.3}$$

que la série converge ou non. On peut remarquer que si A et B sont des réunions dénombrables d'intervalles deux à deux disjoints alors $A \subset B$ implique $\mu(A) \leq \mu(B)$. Si donc $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'intervalles quelconques, la suite :

$$\mu_N = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right)$$

est croissante. On pose alors :

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \lim_{N\to+\infty} \mu_N.$$

On peut donc mesurer les réunions dénombrables d'intervalles et par suite les intersections dénombrables d'intervalles puisque :

$$\bigcap_{n\geq 1} A_n = \left(\bigcup_{n\geq 1} A_n^c\right)^c.$$

Mais on ne peut rien dire, d'une manière générale, de la mesure d'une réunion non dénombrable d'intervalles de $\mathbb{R}$.

A partir de cet exemple, on voit que les premiers objets qui interviennent en théorie de la mesure sont des parties d'un ensemble Ω astreintes à vérifier certaines propriétés. C'est ce que nous allons préciser dans ce chapitre. Dans toute la suite, Ω sera un ensemble non vide ; $\mathcal{P}(\Omega)$ désignera l'ensemble des parties de Ω. Si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, A^c sera son complémentaire dans Ω.

1.1. Définition. *On appelle* **algèbre de Boole** *sur Ω toute partie $\mathcal{A}_0$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant les propriétés suivantes :*

i) $\Omega \in \mathcal{A}_0$;

ii) $A \in \mathcal{A}_0 \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}_0$;

iii) $A, B \in \mathcal{A}_0 \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{A}_0$.

Il découle de cette définition que :

iv) $\emptyset \in \mathcal{A}_0$;

v) $A, B \in \mathcal{A}_0 \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{A}_0$.

On peut donc remplacer dans la définition 1.1. la condition i) par iv) et la condition iii) par v).

1.2. Remarques

i) $\{\emptyset, \Omega\}$ et $\mathcal{P}(\Omega)$ sont des algèbres de Boole. Ce sont respectivement la plus petite et la plus grande algèbres de Boole (au sens de l'inclusion) qu'on puisse définir sur Ω.

ii) Si $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque d'algèbres de Boole sur Ω, alors $\mathcal{A} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ est une algèbre de Boole sur Ω.

iii) Si $\mathcal{C}$ est une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$, il existe une plus petite algèbre de Boole $b(\mathcal{C})$ contenant $\mathcal{C}$; c'est l'intersection de toutes les algèbres de Boole sur Ω qui contiennent $\mathcal{C}$; on l'appelle *algèbre de Boole engendrée* par $\mathcal{C}$.

Considérons la famille $\mathcal{S}$ de tous les intervalles (ouverts, semi-ouverts ou fermés de $\mathbb{R}$). On constate que :

i) $\emptyset =]0, 0[$ et $\mathbb{R}$ sont dans $\mathcal{S}$,

ii) si $A, B \in \mathcal{S}$ alors $A \cap B \in \mathcal{S}$,

iii) $A \in \mathcal{S}$ n'implique pas en général $A^c \in \mathcal{S}$ mais seulement A^c est réunion de deux intervalles disjoints.

Ceci nous amène à la :

1.3. Définition. *On dira qu'une partie $\mathcal{S}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ est une* ***semi-algèbre de Boole*** *sur Ω si :*

i) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{S}$;

ii) $A, B \in \mathcal{S} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{S}$;

iii) $A \in \mathcal{S} \Longrightarrow A^c$ *est réunion finie de parties de Ω dans $\mathcal{S}$, deux à deux disjointes.*

2. Motivation probabiliste

Nous allons expliquer comment les algèbres de Boole interviennent en théorie des probabilités et à quel point s'arrête leur efficacité. Nous nous contenterons de le faire sur des exemples.

2.1. La notion d'épreuve aléatoire

Une *épreuve aléatoire* est une expérience dont les résultats sont liés au hasard et ne peuvent être prévus avec certitude à l'avance. Les exemples expliquent mieux cette notion.

i) On prend une pièce de monnaie et on suppose que si on la jette, alors le résultat donne soit *pile*, soit *face* et rien d'autre. Les résultats possibles peuvent donc être décrits par l'ensemble à deux éléments :

$$\Omega = \{\pi, f\}.$$

Chaque partie de Ω représente un *événement* ; par exemple :

- "avoir pile" $= \{\pi\}$;
- "avoir pile ou face" $= \{\pi, f\} = \Omega$;
- "ne pas avoir pile et ne pas avoir face" $= \emptyset$.

ii) On jette la même pièce de monnaie deux fois. Dans ce cas on a :

$$\Omega = \{\pi\pi, \pi f, f\pi, ff\}.$$

On peut considérer les événements :

- $A =$"avoir au moins une fois pile" $= \{\pi\pi, \pi f, f\pi\}$;
- $B =$"avoir au moins une fois face" $= \{ff, f\pi, \pi f\}$;
- $C =$"avoir exactement une fois pile et une fois face" $= \{\pi f, f\pi\} = A \cap B$. L'événement $A \cup B$ signifie que l'un au moins des événements A ou B se réalise ; $A \cap B$ signifie que A et B se réalisent simultanément. L'événement $\emptyset$ est l'*événement impossible* : il ne se réalise jamais ; par contre Ω est l'*événement certain* : il se réalise toujours. Si A est un événement, A^c est l'événement contraire : A^c se réalise si, et seulement si, A ne se réalise pas. On voit donc la nécessité des axiomes imposés dans la définition d'une algèbre de Boole. Mais, malheureusement, ces axiomes sont insuffisants pour décrire tous les événements dans certaines épreuves aléatoires comme on peut le voir dans l'exemple du

2.2. Jet infini d'une pièce

On jette une infinité dénombrable de fois une pièce de monnaie (on suppose évidemment que cela est possible) et on s'intéresse aux résultats possibles de cette épreuve. Ils sont du type :

$$(\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n, \ldots)$$

où, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, ω_i est égal soit à π soit à f. L'ensemble Ω est donc assez grand. Considérons l'événement $A =$"on a pile pour la première fois au bout d'un nombre pair de jets". Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, soit A_p l'évenement :

$$A_p = \Big\{(\underbrace{f, \ldots, f}_{2p-1 \text{ fois}}, \pi, \omega_i, \omega_{i+1}, \ldots)\Big\}$$

où $w_i \in \{\pi, f\}$ pour $i \geq 2p+1$. Alors l'événement A n'est rien d'autre que la réunion de tous les A_p pour $p \in \mathbb{N}^*$ *i.e.* :

$$A = \bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} A_p.$$

La notion d'algèbre de Boole ne permet donc pas de décrire une telle épreuve aléatoire. Il faut remplacer l'axiome iii).

3. La notion de tribu

3.1. Définition. *On appelle* ***tribu*** *sur* Ω *toute partie* $\mathcal{A}$ *de* $\mathcal{P}(\Omega)$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

i) $\Omega \in \mathcal{A}$ *;*

ii) $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}$ *;*

iii) si $(A_n)_{n\geq 1}$ *est une suite dans* $\mathcal{A}$*, alors la réunion* $A = \displaystyle\bigcup_{n\geq 1} A_n$ *est encore dans* $\mathcal{A}$*.*

Bien entendu, une tribu est une algèbre de Boole. Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est appelé *espace mesurable.*

3.2. Exemples de tribus

i) De manière évidente, $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω ; c'est la plus grande (au sens de l'inclusion) et elle est trop grande quand Ω n'est ni fini, ni dénombrable. De même $\{\emptyset, \Omega\}$ est la plus petite tribu sur Ω ; et elle n'est pas d'un grand intérêt.

ii) Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Alors $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ est une tribu sur Ω.

iii) Une intersection quelconque de tribus sur Ω est encore une tribu. Si $\mathcal{C}$ est une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$, alors l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{C}$ (il y en a au moins une qui est $\mathcal{P}(\Omega)$) est appelée *tribu engendrée* par $\mathcal{C}$ et sera notée $\sigma(\mathcal{C})$.

3.3. Tribu borélienne

Supposons que Ω est un espace métrique et notons $\mathcal{T}$ l'ensemble de ses ouverts. La tribu $\sigma(\mathcal{T})$ engendrée par $\mathcal{T}$ est appelée *tribu borélienne* de Ω. On la note $\mathcal{B}_\Omega$. Elle est aussi engendrée par les fermés de Ω. Par exemple, pour $\mathbb{R}^n$, on peut vérifier que $\mathcal{B}_\Omega$ est engendrée par l'une quelconque des familles suivantes :

- les produits d'intervalles ouverts ou fermés de $\mathbb{R}$;

- les boules ouvertes ou fermées de $\mathbb{R}^n$;

- les produits d'intervalles ouverts, semi-ouverts ou fermés de $\mathbb{R}$ dont les extrémités sont rationnelles ;

- les boules ouvertes ou fermées de $\mathbb{R}^n$ de rayon rationnel et centrées sur les points rationnels.

3.4. Produit d'espaces mesurables

On considère des espaces msurables $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), \ldots, (\Omega_n, \mathcal{A}_n)$, on note Ω le produit cartésien $\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$ et $\mathcal{S}$ la classe des parties de la forme :

$$A_1 \times \ldots \times A_n$$

où $A_1 \in \mathcal{A}_1$, ..., $A_n \in \mathcal{A}_n$. La tribu $\mathcal{A}$ sur Ω engendrée par $\mathcal{S}$ est appelée *tribu produit* (ou *produit tensoriel*) de $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$. On la notera $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}_n$. On a, par exemple, si les Ω_i sont des espaces métriques et Ω muni d'une des métriques produit $\mathcal{B}_\Omega = \mathcal{B}_{\Omega_1} \otimes \ldots \otimes \mathcal{B}_{\Omega_n}$. En particulier $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \mathcal{B}_\mathbb{R} \otimes \ldots \otimes \mathcal{B}_\mathbb{R}$ (produit tensoriel n fois).

La tribu borélienne $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ (de $\mathbb{R}^n$ de façon générale) est immense à tel point qu'il n'est pas du tout évident de trouver une partie de $\mathbb{R}$ qui ne soit pas dans $\mathcal{B}_\mathbb{R}$; les méthodes connues à l'heure actuelle pour avoir un tel objet ont recours à *l'axiome du choix*.

4. Applications mesurables

Comme nous l'avons signalé au début de ce chapitre, une *application mesurable* est en théorie de la mesure ce qu'est une application continue en topologie. Pour les espaces mesurables dont la tribu est associée à une topologie, la mesurabilité est une notion plus générale que celle de continuité. Dans cette section, nous définirons la notion d'application mesurable et donnerons les principales propriétés de celles qui sont à valeurs réelles ; elles seront pratiquement les seules à intervenir tout le long de ce cours.

Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ et $(E, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables et $f : \Omega \longrightarrow E$ une application.

4.1. Définition. *On dira que f est* **mesurable** *si, pour tout $B \in \mathcal{B}$, l'ensemble $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.*

Evidemment, si $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, toute application de Ω dans E est mesurable.

4.2. Théorème. *Soient Ω un ensemble, $(E, \mathcal{B})$ un espace mesurable et $f : \Omega \longrightarrow E$ une application. On pose $\mathcal{A} = f^{-1}(\mathcal{B})$. Alors :*

i) $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω,

ii) si $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C})$, on a $\mathcal{A} = \sigma\left[f^{-1}(\mathcal{C})\right]$.

On dira que $\mathcal{A} = f^{-1}(\mathcal{B})$ est la *tribu engendrée* par $f : \Omega \longrightarrow (E, \mathcal{B})$. C'est la plus petite tribu sur Ω pour laquelle f est mesurable. De la même manière, si $f_i : \Omega \longrightarrow (E_i, \mathcal{B}_i)$ est une famille d'applications, alors la plus petite tribu sur Ω qui rend mesurables toutes les f_i est par définition la *tribu engendrée* par la famille $(f_i)_{i \in I}$.

Si $f : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (E, \mathcal{B})$ avec $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C})$, alors f est mesurable si, et seulement si, $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$.

Du théorème 4.2 on déduit immédiatement le :

4.3. Corollaire. *Soit $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ une application continue entre deux espaces métriques Ω_1 et Ω_2. Alors f est mesurable (pour les tribus boréliennes associées aux topologies respectives sur Ω_1 et Ω_2).*

Le théorème qui suit (de démonstration immédiate) est important car il permet de définir la *catégorie des espaces mesurables* : les *objets* sont les ensembles munis d'une tribu et les *flèches*, les applications mesurables entre ces ensembles.

4.4. Théorème *Soient $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ et $(\Omega_3, \mathcal{A}_3)$ trois espaces mesurables et considérons des applications mesurables $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ et $g : \Omega_2 \longrightarrow \Omega_3$. Alors la composée $g \circ f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_3$ est mesurable.*

5. Applications mesurables réelles

Lorsqu'on parlera d'application (ou de fonction) mesurable de Ω dans $\mathbb{R}$, on supposera toujours que $\mathbb{R}$ est muni de sa tribu borélienne canonique $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Dans ce cas, en vertu du théorème 4.2 et du fait que la classe des parties de $\mathbb{R}$ de la forme $]-\infty, x]$ (avec $x \in \mathbb{R}$) engendre $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, on peut caractériser la mesurabilité à l'aide du

5.1. Théorème. *Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Alors f est mesurable si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'ensemble :*

$$f^{-1}(]-\infty, x]) = \{f \leq x\} = \{\omega \in \Omega \ : \ f(\omega) \leq x\}$$

appartient à $\mathcal{A}$.

5.2. Notations

Soient $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Pour tout $\omega \in \Omega$ on pose :

$$(f+g)(\omega) = f(\omega) + g(\omega) \qquad \text{et} \qquad (fg)(\omega) = f(\omega)g(\omega)$$

$$(\inf(f,g))(\omega) = \inf(f(\omega), g(\omega))$$

et :

$$(\sup(f,g))(\omega) = \sup(f(\omega), g(\omega))$$

$$f^+ = \sup(f, 0) \qquad \text{et} \qquad f^- = \sup(-f, 0).$$

On vérifie facilement que :

$$f = f^+ - f^- \qquad \text{et} \qquad |f| = f^+ + f^-.$$

Si $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions réelles définies sur Ω, on pose pour tout $\omega \in \Omega$:

$$\left(\sup_{n\geq 1} f_n\right)(\omega) = \sup_{n\geq 1}(f_n(\omega))$$

et :

$$\left(\inf_{n\geq 1} f_n\right)(\omega) = \inf_{n\geq 1}(f_n(\omega))$$

$$\left(\limsup f_n\right)(\omega) = \limsup(f_n(\omega)) = \inf_{N\geq 1}\left[\sup_{n\geq N} f_n(\omega)\right]$$

et :

$$\left(\liminf f_n\right)(\omega) = \liminf(f_n(\omega)) = \sup_{N\geq 1}\left[\inf_{n\geq N} f_n(\omega)\right].$$

Soit A une partie de Ω. On appelle *fonction indicatrice* de A, la fonction 1_A définie par :

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est clair que 1_A est mesurable si, et seulement si, $A \in \mathcal{A}$.

On dira qu'une fonction mesurable $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est *étagée*, s'il existe une partition finie $(A_1, \ldots, A_k)$ de Ω avec $A_i \in \mathcal{A}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$ et des nombres $a_i \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\varphi = \sum_{i=1}^{k} a_i 1_{A_i}.$$

Le lecteur pourra remarquer que la partition $A_1, \ldots, A_k$ n'est pas unique.

On notera :

i) $\mathcal{M}$ l'ensemble des fonctions réelles mesurables sur Ω :

$$\mathcal{M}_+ = \{f \in \mathcal{M} \ : \ f \geq 0\},$$

ii) $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions réelles étagées sur Ω et :

$$\mathcal{E}_+ = \{\varphi \in \mathcal{E} \ : \ \varphi \geq 0\}.$$

On a bien sûr :

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{E} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_+ \subset \mathcal{M}_+.$$

5.3. Théorème. *i) L'ensemble $\mathcal{M}$ muni de l'addition et de la multiplication est une algèbre unitaire.*

ii) Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ *une suite dans* $\mathcal{M}$ *; alors* $\sup f_n$, $\inf f_n$, $\limsup f_n$ *et* $\liminf f_n$ *(qu'on suppose exister pour tout* ω*) sont dans* $\mathcal{M}$*. Si* f_n *converge simplement vers* f*, alors* f *est mesurable.*

Il découle de ce théorème que si $f, g \in \mathcal{M}$ alors $\sup(f, g)$, $\inf(f, g)$, f^+, f^- et $|f|$ appartiennent à $\mathcal{M}$.

Le théorème suivant permet d'approcher n'importe quelle fonction de $\mathcal{M}$ par une fonction étagée. Il sert à définir l'intégrale.

5.4. Théorème. *Soit* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction mesurable. Alors* f *est limite simple d'une suite de fonctions étagées* f_n *sur* Ω*. Si* f *est positive, la suite* (f_n) *peut être choisie de telle sorte qu'elle soit dans* $\mathcal{E}_+$ *et croissante. (Elle tend donc en croissant ver* f*.)*

CHAPITRE II
ESPACES MESURÉS

Nous avons introduit, dans le Chapitre I, tous les ingrédients nécessaires pour aborder la théorie de la mesure proprement dite. Nous allons définir, de manière précise, la notion de mesure sur une tribu. Nous énoncerons le théorème de prolongement qui permet d'étendre une mesure, définie a priori sur une semi-algèbre de Boole, à la tribu qu'elle engendre. Nous l'appliquerons ensuite à la construction de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

1. Définitions et exemples

Soient Ω un ensemble et $\mathcal{A}$ une partie non vide de $\mathcal{P}(\Omega)$. (A priori, $\mathcal{A}$ n'est pas une tribu.)

1.1. Définition. *On appelle* ***fonction d'ensemble*** *sur $\mathcal{A}$ toute application μ sur $\mathcal{A}$ à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On dira que μ est :*

i) additive si, pour toute famille finie $(A_n)_{n=1,\dots,k}$ dans $\mathcal{A}$ telle que la réunion des A_n soit encore dans $\mathcal{A}$ et $n \neq p \Longrightarrow A_n \cap A_p = \emptyset$, alors :

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) = \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n), \tag{II.1}$$

ii) σ-additive, si pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints telle que la réunion des A_n soit encore dans $\mathcal{A}$ (condition automatiquement satisfaite si $\mathcal{A}$ est une tribu) et $\displaystyle\sum_{\mu(A_n)<0} \mu(A_n)$ converge, alors :

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n). \tag{II.2}$$

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable.

1.2. Définition. *On appelle* ***mesure*** *sur $\mathcal{A}$ toute fonction d'ensemble sur $\mathcal{A}$, positive, σ-additive et non constante avec la valeur $+\infty$.*

Pour $A \in \mathcal{A}$, le nombre $\mu(A)$ s'appelle *mesure de A*. Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ où $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω et μ une mesure sur Ω s'appelle *espace mesuré.*

L'addition et la multiplication des réels est prolongée à tout $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$ de la façon suivante. Soit $a \in \mathbb{R}_+$; alors on convient que :

$$+\infty + (+\infty) = +\infty, \qquad a + (+\infty) = +\infty \qquad 0 \times +\infty = 0$$

$$+\infty \times (+\infty) = +\infty \qquad + a \times (+\infty) = +\infty \text{ avec } a > 0.$$

Les expressions (II.1) et (II.2) auront donc toujours un sens que les nombres positifs $\mu(A_n)$ soient finis ou égaux à $+\infty$.

Soit μ une mesure sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$. On dira que μ est :

i) *finie* si, pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) < +\infty$. Comme pour tous $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$ implique $\mu(A) \leq \mu(B)$, μ est finie si, et seulement si, $\mu(\Omega) < +\infty$;

ii) σ-*finie* si $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ avec $A_n \in \mathcal{A}$ et $\mu(A_n) < +\infty$;

iii) une *probabilité* sur Ω si $\mu(\Omega) = 1$.

1.3. Conséquences

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Alors :

i) $\mu(\emptyset) = 0$; en effet comme μ n'est pas constante avec la valeur $+\infty$, il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) < +\infty$. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments deux à deux disjoints dans $\mathcal{A}$ définie par :

$$A_1 = A \quad \text{ et } \quad A_n = \emptyset \ \text{ pour } n \geq 2 \ .$$

La réunion des A_n est égale à A et la σ-additivité de μ donne :

$$\mu(A) = \mu(A) + \sum_{n=2}^{\infty} \mu(A_n).$$

Ceci implique que la série $\sum_{n=2}^{\infty} \mu(A_n)$ converge et est égale à 0. Comme tous ses termes sont égaux à $\mu(\emptyset)$ on en déduit que $\mu(\emptyset) = 0$.

ii) μ est additive. En effet soit $(A_n)_{n=1,\ldots,k}$ une famille finie dans $\mathcal{A}$ telle que $n \neq p \Longrightarrow A_n \cap A_p = \emptyset$; on pose :

$$A'_n = \begin{cases} A_n & \text{si } 1 \leq n \leq k \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases} .$$

Alors (A'_n) est une suite de parties dans $\mathcal{A}$ deux à deux disjointes et telles que :

$$\bigcup_{n\geq 1} A'_n = \bigcup_{n=1}^{k} A_n.$$

Comme μ est σ-additive on a :

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A'_n\right) = \sum_{n\geq 1} \mu(A'_n) = \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n)$$

qui montre bien que μ est additive.

1.4. Exemples de mesures

i) Supposons Ω fini de cardinal n et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Pour tout $A \in \mathcal{A}$ on note $|A|$ le cardinal de A. On pose :

$$\mu(A) = \frac{|A|}{n}.$$

On obtient ainsi une mesure (une probabilté en fait) sur Ω.

ii) Supposons Ω quelconque et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Pour $A \in \mathcal{A}$ posons :

$$m(A) = \begin{cases} |A| & \text{si } A \text{ est fini} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}.$$

Il est facile de voir que m ainsi définie est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{A})$ appelée *mesure de comptage*. Elle est σ-finie si, et seulement si, Ω est dénombrable (*cf.* Exercice 1).

iii) Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable et ω un point de Ω. Pour tout $A \in \mathcal{A}$ on pose :

$$\delta_\omega(A) = 1_A(\omega)$$

où 1_A est la fonction indicatrice de A. Il est facile de voir que l'application δ_ω ainsi définie est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{A})$; on l'appelle *mesure de Dirac* au point ω.

On appelle *mesure discrète* sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute combinaison linéaire dénombrable:

$$\mu = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \delta_{\omega_i}$$

de mesures de Dirac δ_{ω_i} où les p_i sont des nombres réels strictement positifs.

L'introduction de mesures intéressantes sur les ensembles non dénombrables nécessite un peu plus de matériel. Nous verrons comment arranger cela dans la suite.

2. Propriétés des mesures

Fixons quelques notations. Soit Ω un ensemble. Si A et B sont des parties de Ω alors $B - A$ sera l'intersection de B avec le complémentaire de A. Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments dans $\mathcal{A}$. La suite (A_n) est dite *croissante* (resp. *décroissante*) si $A_n \subset A_{n+1}$ (resp. $A_{n+1} \subset A_n$) pour tout $n \geq 1$. On dira que la suite (A_n) *tend en croissant* (resp. *tend en décroissant*) vers A si elle est croissante (resp. décroissante) et si :

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \qquad \left(\text{resp. } A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Dans ce cas on note :

$$A_n \uparrow A \qquad (\text{resp. } A_n \downarrow A).$$

On appelle *limite supérieure* et *limite inférieure* de (A_n) les parties de Ω définies respectivement par :

$$\limsup A_n = \bigcap_{N=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n\right) \quad \text{et} \quad \liminf A_n = \bigcup_{N=1}^{\infty}\left(\bigcap_{n=N}^{\infty} A_n\right). \tag{II.3}$$

On dira que (A_n) est convergente si $\limsup A_n = \liminf A_n$.

2.1. Proposition. *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré.*

i) Si $A, B \in \mathcal{A}$ *sont tels que* $A \subset B$ *et* $\mu(B) < +\infty$, *alors* $\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ *une suite d'éléments dans* $\mathcal{A}$.

ii) Si (A_n) *tend en croissant vers* $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A_n)$ *tend en croissant vers* $\mu(A)$.

iii) Si $A_n \downarrow A \in \mathcal{A}$ *et s'il existe* n_0 *tel que* $\mu(A_{n_0}) < +\infty$, *alors* $\mu(A_n)$ *tend en décroissant vers* $\mu(A)$.

iv) On a toujours :

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

v) On a $\mu(\liminf A_n) \leq \liminf \mu(A_n)$ *et s'il existe* n_0 *tel que :*

$$\mu\left(\bigcup_{n=n_0}^{\infty} A_n\right) < +\infty,$$

alors $\limsup \mu(A_n) \leq \mu(\limsup A_n)$. *En particulier si* μ *est une probabilité, on a :*

$$(A_n \textit{ tend vers } A) \Longrightarrow (\mu(A_n) \textit{ tend vers } \mu(A)).$$

vi) On a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < +\infty \Longrightarrow \mu(\limsup A_n) = 0.$$

3. Le théorème de prolongement

Comme nous l'avons déjà signalé, la construction d'une mesure intéressante sur un ensemble non dénombrable ne se "voit de manière explicite" que sur certains éléments (qui forment souvent une algèbre de Boole ou une semi-algèbre de Boole) de la tribu. C'est sur ces parties que l'on construit d'abord une telle mesure; le *théorème de prolongement* permet de l'étendre ensuite à toute la tribu. La démonstration de ce théorème découle de plusieurs lemmes et ese un peu longue à mener !

3.1. Théorème de prolongement. *Soient $\mathcal{A}_0$ une algèbre de Boole sur Ω et $\mathcal{A}$ la tribu engendrée par $\mathcal{A}_0$. Alors toute mesure bornée sur $(\Omega, \mathcal{A}_0)$ se prolonge de manière unique en une mesure sur $(\Omega, \mathcal{A})$.*

Ce théorème, qui reste valable même si la mesure n'est pas bornée, permet de construire le produit d'un nombre fini de mesures et la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

3.2. Produit tensoriel de mesures

Soient $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$, …, $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mu_n)$ des espaces mesurés. La famille $\mathcal{S}$ des parties de $\Omega = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$ de la forme $A_1 \times \ldots \times A_n$ où $A_i \in \mathcal{A}_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$ est une semi-algèbre de Boole. Alors en posant :

$$\mu_0(A_1 \times \ldots \times A_n) = \mu_1(A_1) \cdot \ldots \cdot \mu_n(A_n)$$

on peut définir une mesure sur l'algèbre de Boole $\mathcal{A}_0$ engendrée par $\mathcal{S}$ qui se prolonge de façon unique en une mesure sur $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}_n$ qu'on notera $\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_n$ et qu'on appelle le *produit tensoriel* de μ_1, …, μ_n.

3.3. Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

On pose $\Omega =]0, 1]$. Alors l'ensemble des parties de Ω de la forme :

$$A = \bigcup_{i=1}^{k}]a_i, b_i] \tag{II.4}$$

avec $0 \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \ldots \leq a_k \leq b_k \leq 1$ est une algèbre de Boole $\mathcal{A}_0$ sur Ω qui engendre la tribu borélienne $\mathcal{B}_\Omega$. Pour $A \in \mathcal{A}_0$ de la forme (II.4) on pose :

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{k} (b_i - a_i). \tag{II.5}$$

Alors μ est une mesure finie sur $\mathcal{A}_0$. D'après le théorème de prolongement, elle s'étend de manière unique en une mesure λ_0 sur $\mathcal{B}_\Omega$.

Pour tout $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, soit $A_n = A \cap]n, n+1]$; d'autre part si $a \in \mathbb{R}$, $a + A$ sera l'ensemble $\{a + x \ : \ x \in A\}$. On pose :

$$\lambda(A) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_0(-n + A_n) \tag{II.6}$$

On obtient ainsi sur $\mathbb{R}$ une mesure λ, σ-finie appelée *mesure de Lebesgue*.

La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ est obtenue en faisant le produit tensoriel n fois de la mesure λ.

Le lecteur peut vérifier que la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ (et sur $\mathbb{R}^n$ aussi) est invariante par translation *i.e.* pour tout $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ et tout $u \in \mathbb{R}$ on a :

$$\lambda(u + A) = \lambda(A).$$

C'est une propriété importante de λ. Malheureusement cette mesure λ a un point faible car elle ne permet pas de mesurer toutes les parties de $\mathbb{R}$ même quand elles sont bornées. L'idéal, en théorie de la mesure (sur $\mathbb{R}$), serait de pouvoir construire une fonction d'ensemble μ sur tous les bornés, positive, σ-additive et telle que :

i) $\mu([0, 1]) = 1$,

ii) si A et B sont bornés et isométriques, alors $\mu(A) = \mu(B)$.

Ce problème est connu comme étant *le problème difficile de la théorie de la mesure*. Il admet une solution négative (*cf.* [Ek] page 32).

4. Propriétés vraies presque partout

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

4.1. Définition. *On dira que $A \subset \Omega$ est de* **mesure nulle** *pour μ si $A \in \mathcal{A}$ et vérifie $\mu(A) = 0$. On dira que A est* **négligeable** *s'il est contenu dans un ensemble de mesure nulle.*

Une propriété sur Ω est dite vérifiée *presque partout* pour la mesure μ (en abrégé μ-pp) si l'ensemble des éléments de Ω qui ne la vérifient pas est de mesure nulle.

4.2. Exemples

On dira que :

i) $f, g \in \mathcal{M}$ sont *égales* μ-pp si :

$$\mu\left(\{\omega \in \Omega \;:\; f(\omega) \neq g(\omega)\}\right) = 0.$$

ii) La suite (f_n) dans $\mathcal{M}$ *tend* μ-pp vers $f \in \mathcal{M}$ si :

$$\mu\left(\{\omega \in \Omega \;:\; f_n(\omega) \text{ ne tend pas vers } f(\omega)\}\right) = 0.$$

La notion de "*propriété vérifiée presque partout*" est très importante en théorie de la mesure ; elle interviendra constamment dans ce cours.

CHAPITRE III
INTÉGRALE DE LEBESGUE

L'intégrale de Lebesgue généralise de loin celle de Riemann : une fonction Lebesgue-intégrable peut être partout discontinue alors qu'une fonction Riemann-intégrable est presque partout continue. Dans ce sens, la première notion s'avère beaucoup plus utile et opérationnelle que la seconde. L'objet de ce chapitre est de définir l'intégrale de Lebesgue sur un espace mesuré quelconque et décrire ses propriétés. Nous énoncerons le lemme de Fatou, le théorème de convergence dominée et l'illustrons par quelques applications : continuité de l'intégrale dépendant d'un paramètre, dérivation sous le signe somme. Ce dernier théorème, dû à Lebesgue, est certainement l'un des outils les plus puissants de l'analyse mathématique.

Dans toute la suite $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sera un espace mesuré. On rappelle les notations utilisées dans les chapitres antérieurs.

$$\mathcal{M} = \{\text{fonctions réelles mesurables sur } \Omega\} \qquad \mathcal{M}_+ = \{f \in \mathcal{M} : f \geq 0\}$$

$$\mathcal{E} = \{\text{fonctions réelles étagées sur } \Omega\} \qquad \mathcal{E}_+ = \{\varphi \in \mathcal{E} \ : \ \varphi \geq 0\}.$$

D'autre part :

a) *toute fonction $f \in \mathcal{M}_+$ est limite simple d'une suite croissante dans $\mathcal{E}_+$* ;

b) *toute fonction $f \in \mathcal{M}$ est limite simple d'une suite dans $\mathcal{E}$.*

1. Intégrale supérieure

Pour les fonctions étagées positives, la définition sera immédiate ; on passera ensuite aux fonctions mesurables positives en usant du point a) qu'on vient de rappeler. Dans ces deux situations l'intégrale est un élément de $\overline{\mathbb{R}}_+$ défini sans ambiguité. Pour une fonction mesurable quelconque, il faut imposer une certaine condition qui est assez naturelle comme on le verra.

Soit $f \in \mathcal{E}_+$. Alors f peut s'écrire sous la forme :

$$f = \sum_{i=1}^{k} a_i 1_{A_i}$$

où $(A_1, \ldots, A_k)$ est une partition de Ω par des éléments de $\mathcal{A}$ et $a_1, \ldots, a_k$ sont des nombres réels positifs ou nuls.

1.1. Lemme. *Le nombre positif (fini ou égal à $+\infty$) :*

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \mu(A_i) \tag{III.1}$$

ne dépend pas de la partition choisie qui représente la fonction f.

Le lemme 1.1 nous permet alors de donner la :

1.2. Définition. *On appelle* ***intégrale supérieure*** *de la fonction $f = \sum_{i=1}^{k} a_i 1_{A_i} \in \mathcal{E}_+$ le nombre (fini ou égal à $+\infty$) :*

$$I^*(f) = \int_\Omega^* f d\mu = \sum_{i=1}^{k} a_i \mu(A_i). \tag{III.2}$$

On a bien entendu $\int_\Omega^* 1_A d\mu = \mu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$.

1.3. Proposition. *Soient $f, g \in \mathcal{E}_+$ et $a \in \mathbb{R}_+$. Alors on a :*

i) $I^*(f) \geq 0$;

ii) $I^*(af) = aI^*(f)$;

iii) $I^*(f + g) = I^*(f) + I^*(g)$;

iv) $f \leq g \Longrightarrow I^*(f) \leq I^*(g)$.

Soit (f_n) une suite dans $\mathcal{E}_+$ qui tend en croissant vers f. Alors :

v) la suite $(I^*(f_n))$ tend en croissant vers $I^*(f)$.

La démonstration de cette proposition permet aussi d'établir la propriété qui suit (dite de Beppo-Levi) :

Si $(f_n)_{n\geq 1}$ est croissante dans $\mathcal{E}_+$ telle que $\lim_{n\to+\infty} f_n$ soit $\geq f$ alors $\lim I^*(f_n) \geq I^*(f)$.

Nous allons maintenant définir l'intégrale supérieure d'une fonction mesurable positive quelconque en utilisant le fait qu'une telle fonction est limite d'une suite de fonctions étagées positives.

1.4. Lemme. *Soient $f \in \mathcal{M}_+$ et (f_n) et (h_n) deux suites dans $\mathcal{E}_+$ tendant en croissant vers f. Alors :*

$$\lim_{n\to+\infty} I^*(f_n) = \lim_{n\to+\infty} I^*(h_n).$$

On peut donc donner la définition qui suit.

1.5. Définition. *On appelle* ***intégrale supérieure*** *d'une fonction mesurable positive sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ le nombre :*

$$I^*(f) = \int_\Omega^* f(\omega) d\mu(\omega) = \lim_{n\to+\infty} I^*(f_n)$$

où (f_n) est une suite quelconque dans $\mathcal{E}_+$ tendant en croissant vers f.

Pour les fonctions mesurables positives on a une proposition analogue à la proposition 1.3.

1.6. Proposition. *Soient $f, g \in \mathcal{M}_+$ et $a \in \mathbb{R}_+$. Alors on a :*

i) $I^*(f) \geq 0$;

ii) $I^*(af) = aI^*(f)$;

iii) $I^*(f+g) = I^*(f) + I^*(g)$;

iv) $f \leq g \Longrightarrow I^*(f) \leq I^*(g)$.

Soit (f_n) une suite dans $\mathcal{M}_+$ qui tend en croissant vers f. Alors :

v) la suite $(I^*(f_n))$ tend en croissant vers $I^*(f)$.

2. Intégrale d'une fonction mesurable

On sait que toute fonction mesurable f sur Ω s'écrit sous forme de différence de deux fonctions mesurables positives en l'occurrence :

$$f^+ = \sup(f, 0) \text{ et } f^- = \sup(-f, 0).$$

Pour avoir la linéarité on est amené à définir l'intégrale de f comme étant la différence $I^*(f^+) - I^*(f^-)$; ce qui est parfaitement cohérent mais à condition que cette expression ait un sens. Par exemple si $I^*(f^+) = I^*(f^-) = +\infty$, cette différence reste indéterminée. Ce qui nous amène à la

2.1. Définition. *Soit $f \in \mathcal{M}$. On dira que f est* ***intégrable*** *si on a $I^*(f^+) < +\infty$ et $I^*(f^-) < +\infty$. L'intégrale de f sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est alors le nombre réel :*

$$I(f) = \int_\Omega f(\omega) d\mu(\omega) = I^*(f^+) - I^*(f^-).$$

On dira que f est quasi-intégrable si $I^*(f^+) < +\infty$ ou $I^*(f^-) < +\infty$.

On notera dorénavant l'intégrale de f sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, $\int f$ s'il n'y a aucune confusion ni sur Ω ni sur la mesure μ. Si l'ensemble Ω supporte plusieurs mesures, il y a lieu de préciser (dans la notation de l'intégrale) la mesure par rapport à laquelle on intègre ; la notion d'intégrabilité dépend fortement de la mesure donnée. Sur un même espace Ω, il existe des fonctions intégrables par rapport à une mesure et non intégrables par rapport à une autre : prendre deux mesures μ et ν telles que $\mu(\Omega) < +\infty$ et $\nu(\Omega) = +\infty$ et $f = 1$.

2.2. Exemples

i) Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable muni de la mesure de Dirac δ_ω au point $\omega \in \Omega$. Si $f \in \mathcal{E}_+$ il existe une partition mesurable $(A_1, \ldots, A_k)$ de Ω et des nombres réels positifs

$a_1, \ldots, a_k$ tels que :

$$f = \sum_{i=1}^{k} a_i 1_{A_i}.$$

Comme $(A_1, \ldots, A_k)$ est une partition de Ω, il existe un et un seul entier $i \in \{1, \ldots, k\}$ tel que $\omega \in A_i$. D'où :

$$\int_\Omega f \delta_\omega = a_i \delta_\omega(A_i) = f(\omega).$$

Ainsi toute fonction $f \in \mathcal{E}_+$ est δ_ω-intégrable et son intégrale est égale à $f(\omega)$. Par la décomposition de n'importe quelle fonction $f \in \mathcal{M}$ sous forme $f = f^+ - f^-$ et par le fait que f^+ et f^- sont limites de suites de fonctions de $\mathcal{M}_+$ on montre que f est toujours δ_ω-intégrable et son intégrale vaut $f(\omega)$.

ii) Soit μ une mesure discrète sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$ *i.e.* :

$$\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} p_i \delta_{\omega_i}$$

où ω_i est une suite de points de Ω et p_i des réels positifs. Alors $f \in \mathcal{M}_+$ est intégrable par rapport à μ si, et seulement si, la série à termes positifs :

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i f(\omega_i)$$

est convergente. Par suite $f \in \mathcal{M}$ est μ-intégrable si, et seulement si, les séries :

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i f^+(\omega_i) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i f^-(\omega_i)$$

sont convergentes. Comme $|f| = f^+ + f^-$, ceci est équivalent à la convergence de la série :

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i |f(\omega_i)|.$$

Dans ce cas l'intégrale de f par rapport à μ est :

$$\int_\Omega f(\omega) d\mu(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i f(\omega_i).$$

3. Propriétés de l'intégrale

On note $\mathcal{L}^1$ l'ensemble des fonctions mesurables et intégrables pour la mesure μ sur Ω et $\mathcal{L}^1_+ = \{f \in \mathcal{L}^1 \ : \ f \geq 0\}$.

3.1. Lemme. *Soit $f \in \mathcal{M}$. Alors f est intégrable si, et seulement si, il existe g, $h \in \mathcal{L}^1_+$ telles que $f = g - h$. Dans ce cas on a :*

$$\int_\Omega f = I^*(g) - I^*(h).$$

3.1. Proposition. *Soit $f \in \mathcal{M}_+$. Alors :*

$$\int_\Omega^* f = 0 \Longleftrightarrow f \in \mathcal{N} \cap \mathcal{M}_+.$$

De cette proposition on tire les conséquences suivantes.

i) *Si $A \in \mathcal{A}$ est de mesure nulle alors pour toute fonction $f \in \mathcal{M}_+$ on a :*

$$\int_\Omega 1_A \cdot f = 0.$$

ii) Par définition, l'intégrale de $f \in \mathcal{M}$ sur $A \in \mathcal{M}$ sera :

$$\int_A f = \int_\Omega 1_A \cdot f.$$

Dans la proposition qui suit nous donnons un certain nombre de propriétés importantes de l'intégrale.

3.2. Proposition. *On a :*

i) $f \in \mathcal{M}$ est intégrable si, et seulement si, $|f|$ est intégrable.

ii) Soient $f \in \mathcal{M}$ et $g \in \mathcal{L}^1_+$; alors

$$|f| \leq g \Longrightarrow f \in \mathcal{L}^1.$$

iii) Soient $f \in \mathcal{M}$ et $g \in \mathcal{L}^1$; alors :

$$f = g \quad \mu - pp \Longrightarrow f \in \mathcal{L}^1 \quad et \quad \int_\Omega f = \int_\Omega g.$$

On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des fonctions réelles mesurables sur Ω nulles presque partout pour la mesure μ ; c'est un espace vectoriel réel.

3.3. Théorème. *L'ensemble $\mathcal{L}^1$ est un espace vectoriel réel et $\mathcal{N}$ en est un sous-espace vectoriel. En plus, l'application qui à toute fonction $f \in \mathcal{L}^1$ associe le nombre $||f||_1 = \int_\Omega |f(\omega)| d\mu(\omega) \in \mathbb{R}_+$ est une norme sur le quotient $L^1 = \mathcal{L}^1/\mathcal{N}$.*

4. Le théorème de Lebesgue

Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables convergeant vers une fonction mesurable f. Que peut-on dire de la convergence de la suite $\int f_n$? Si f et les f_n sont intégrables, la suite $\int f_n$ converge-t-elle vers l'intégrale de f ? Nous savons déjà que *si les f_n sont positives et (f_n) tend en croissant vers f alors l'intégrale de f_n tend en croissant vers l'intégrale de f (qu'elle soit finie ou non).* En général, ce ne sera pas le cas si on supprime ces hypothèses même si la suite converge par exemple uniformément vers f comme le prouve l'exemple qui suit :

On prend $\Omega = \mathbb{R}_+$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+}$ et $\mu = \lambda$. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions intégrables données par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > n \\ \frac{1}{n} & \text{si } 0 \leq x \leq n \end{cases}$$

Il est clair que (f_n) converge uniformément vers 0 mais la suite des intégrales $\int f_n$ est constante égale à 1.

Le problème du passage à la limite sous le signe d'intégration $\int$ sera résolu, sous certaines hypothèses, par le théorème de Lebesgue auquel est consacrée cette section.

4.1. Lemme de Fatou. *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives sur Ω telles que* $\liminf f_n$ *soit une fonction partout finie sur Ω. Alors :*

$$\int_{\Omega}^{*} (\liminf f_n) \leq \liminf \int_{\Omega}^{*} f_n.$$

Ce lemme permet de démontrer le théorème de Lebesgue connu aussi sous le nom de *théorème de la convergence dominée.*

4.2. Théorème de Lebesgue. *Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. On suppose que :*

i) f_n tend vers f presque partout ;

ii) il existe une fonction intégrable $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $|f_n| \leq g$ μ-pp.

Alors f est intégrable et l'intégrale de f_n tend vers celle de f.

La suite (f_n) qui converge vers f est dominée par la fonction intégrable g ; c'est ce qui explique la dénomination *convergence dominée.*

5. Applications du théorème de Lebesgue

Du théorème de Lebesgue, on peut tirer des conséquences importantes telles que la continuité ou la dérivabilité d'une foncion définie par une intégrale.

5.1. Théorème. *Soit* X *un espace métrique et* $F : \Omega \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ *une application telle que :*

i) pour tout $x \in X$*, l'application partielle* $F(\cdot, x) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *est intégrable ;*

ii) pour presque tout $\omega \in \Omega$*, l'appliction partielle* $F(\omega, \cdot) : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *est continue en* x_0 *;*

iii) il existe une fonction intégrable $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que, pour presque tout* $\omega \in \Omega$ *et tout* $x \in X$*, on ait* $|F(\omega, x)| \leq g(\omega)$*. Alors la fonction :*

$$f(x) = \int_\Omega F(\omega, x) d\mu(\omega)$$

est continue en x_0*.*

La deuxième application concerne la dérivation sous le signe $\int$.

5.2. Théorème. *Soient* $(E, \|\ \|)$ *un espace normé,* U *un ouvert de* E *et* $F : \Omega \times U \longrightarrow \mathbb{R}$ *une application telle que :*

i) pour tout $x \in U$*, la première application partielle* $F(\cdot, x) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *est intégrable ;*

ii) pour presque tout $\omega \in \Omega$*, la deuxième application partielle* $F(\omega, \cdot) : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *est différentiable sur* U *;*

iii) il existe une fonction intégrable $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que, pour presque tout* $\omega \in \Omega$ *et tout* $x \in U$*, on ait :*

$$|||d_x F(\omega, x)||| \leq g(\omega)$$

où $d_x F$ *est la différentielle de* F *au point* x *qui est une forme linéaire continue sur* E *et :*

$$|||d_x F(\omega, x)||| = \sup_{||h|| \leq 1} |\langle h, d_x F(\omega, x)\rangle|.$$

Soit f *la fonction définie sur* U *par :*

$$f(x) = \int_\Omega F(\omega, x) d\mu(\omega).$$

Alors pour tout vecteur h *de* E *et tout point* x *de l'ouvert* U*, la fonction qui à tout point* $\omega \in \Omega$ *associe* $\langle h, d_x F(\omega, x)\rangle$ *est intégrable,* f *est différentiable et :*

$$\langle h, d_x f\rangle = \int_\Omega \langle h, d_x F(\omega, x)\rangle d\mu(\omega).$$

Ici $\langle h, \phi\rangle$ *est l'évaluation de la forme linéaire* ϕ *en le vecteur* $h \in E$*.*

Nous terminons par un exemple d'application du théorème de Lebesgue sur les séries doubles de nombres réels.

5.3. Théorème *Soit* (x_{np}) *une suite de réels indexée par* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$*. On suppose :*

i) qu'il existe une suite de réels (x_p) telle que la limite $\lim_{n\to+\infty} x_{np}$ soit égale à x_p pour tout $p \in \mathbb{N}$;

ii) qu'il existe une suite de réels positifs (y_p) telle que l'on ait :

$$|x_{np}| \leq y_p \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} y_p < +\infty.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{p=0}^{\infty} |x_{np}| < +\infty, \quad \sum_{p=0}^{\infty} |x_p| < +\infty \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{\infty} x_{np} = \sum_{p=0}^{\infty} x_p.$$

CHAPITRE IV

MESURE PRODUIT, MESURE IMAGE ET DENSITÉ

Dans ce chapitre nous étudions trois points importants en théorie de la mesure et de l'intégration : le théorème de Fubini qui permet de calculer l'intégrale sur un produit d'espaces mesurés par intégrations successives sur chacun des facteurs ; le théorème de transfert qui généralise la méthode bien connue de changement de variable pour une intégrale de Riemann ; les mesures à densité ainsi que le théorème de Radon-Nikodym qui montre qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une mesure μ soit "dérivable et à dérivée" mesurable par rapport à une autre mesure ν est que μ soit absolument continue par rapport à ν. C'est un résultat fondamental dans le domaine.

1. Le théorème de Fubini

Rappelons d'abord la définition d'une tribu produit donnée au chapitre I. Soient $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$, $i = 1, \ldots, n$ des espaces mesurables, posons $\Omega = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$ et notons $\mathcal{S}$ la semi-algèbre des parties de la forme $A_1 \times \ldots \times A_n$ où $A_1 \in \mathcal{A}_1$, …, $A_n \in \mathcal{A}_n$. La tribu $\mathcal{A}$ sur Ω engendrée par $\mathcal{S}$ est appelée *tribu produit* (ou *produit tensoriel*) de $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$. On la notera $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}_n$. En posant :

$$\mu_0(A_1 \times \ldots \times A_n) = \mu_1(A_1) \cdot \ldots \cdot \mu_n(A_n)$$

on définit une mesure sur l'algèbre de Boole $\mathcal{A}_0$ engendrée par $\mathcal{S}$ qui se prolonge de façon unique en une mesure $\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_n$ sur la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}_n$ qu'on appelle *produit tensoriel* de μ_1, …, μ_n.

Soient $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés. Pour $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ et pour $\omega_1 \in \Omega_1$, on pose :

$$A_{\omega_1} = \{\omega_2 \in \Omega_2 \ : \ (\omega_1, \omega_2) \in \mathcal{A}\}$$

De même pour tout $\omega_2 \in \Omega_2$:

$$A_{\omega_2} = \{\omega_1 \in \Omega_1 \ : \ (\omega_1, \omega_2) \in \mathcal{A}\}.$$

L'ensemble A_{ω_1} (resp. A_{ω_2}) est appelée *section* de A suivant ω_1 (resp. suivant ω_2). Il est facile de voir que $A_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2$ et $A_{\omega_2} \in \mathcal{A}_1$.

Soient $(E, \mathcal{B})$ un espace mesurable, $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow E$ une application mesurable et désignons par f_{ω_1} (resp. f_{ω_2}) l'application $\Omega_2 \longrightarrow E$ (resp. $\Omega_1 \longrightarrow E$) qui à ω_2 (resp. à ω_1)

associe $f(\omega_1, \omega_2)$. D'autre part pour tout $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ on note Φ_A^1 (resp. Φ_A^2) l'application $\Omega_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ (resp. $\Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$) définie par $\Phi_A^1(\omega_1) = \mu_2(A_{\omega_1})$ (resp. $\Phi_A^2(\omega_2) = \mu_1(A_{\omega_2})$). On a alors la proposition qui suit.

1.1. Proposition. *Les applications f_{ω_1}, f_{ω_2}, Φ_A^1 et Φ_A^2 sont mesurables et pour tout $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ on a :*

$$\mu_1 \otimes \mu_2(A) = \int_{\Omega_1} \Phi_A^1(\omega_1) d\mu_1 = \int_{\Omega_2} \Phi_A^2(\omega_2) d\mu_2.$$

On vérifie facilement que :

– si (A_n) est une suite dans $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ qui tend en croissant vers $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, alors pour tout $\omega_1 \in \Omega_1$ (resp. $\omega_2 \in \Omega_2$) la section A_{n,ω_1} suivant ω_1 de A_n (resp. la section A_{n,ω_2} de A_n suivant ω_2) tend en croissant vers A_{ω_1} (resp. A_{ω_2}) et :

– si (f_n) est une suite croissante de fonctions positives mesurables sur $\Omega_1 \times \Omega_2$ tendant vers f, alors pour tout $\omega_2 \in \Omega_2$ (resp. $\omega_1 \in \Omega_1$), la suite (f_{n,ω_1}) (resp. (f_{n,ω_2})) tend en croissant vers f_{ω_1} (resp. f_{ω_2}).

Cela permet de démontrer un théorème important en théorie de la mesure. Soit $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une application mesurable ; pour tout $\omega_1 \in \Omega_1$ et tout $\omega_2 \in \Omega_2$, on définit $\Psi_1(\omega_1)$ et $\Psi_2(\omega_2)$ par :

$$\Psi_1(\omega_1) = \int_{\Omega_2} f_{\omega_1}(\omega_2) d\mu_2(\omega_2)$$

et :

$$\Psi_2(\omega_2) = \int_{\Omega_1} f_{\omega_2}(\omega_1) d\mu_1(\omega_1).$$

1.2. Théorème de Fubini. *Supposons que f est $\mu_1 \otimes \mu_2$-intégrable. Alors pour tout $i = 1, 2$, Ψ_i est définie μ_i-presque partout, est μ_i-intégrable et on a :*

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{\Omega_1} \Psi_1(\omega_1) d\mu_1 = \int_{\Omega_2} \Psi_2(\omega_2) d\mu_2.$$

La condition d'intégrabilité de f est substantielle ; le fait que les fonctions f_{ω_1} et f_{ω_2} soient intégrables respectivement pour tous les ω_1 et les ω_2 ne suffit pas pour appliquer le théorème de Fubini. Cependant si f est mesurable positive (qu'elle soit intégrable ou non) on a toujours :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) d(\mu \otimes \mu_2) &= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) d\mu_2 \right) d\mu_1 \\ &= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2) d\mu_1 \right) d\mu_2.\end{aligned}$$

1.3. Corollaire. *Soient* $f_1 : \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $f_2 : \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *deux fonctions mesurables et posons* $f(\omega_1, \omega_2) = f_1(\omega_1)f_2(\omega_2)$. *Supposons que* f *est* $\mu_1 \otimes \mu_2$*-intégrable et* f_i *non nulle* μ_i*-presque partout pour tout* $i = 1, 2$. *Alors pour tout* $i = 1, 2$, f_i *est* μ_i*-intégrable et :*

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{\Omega_1} f_1(\omega_1) d\mu_1 \cdot \int_{\Omega_2} f_2(\omega_2) d\mu_2$$

Dans le paragraphe 5 nous donnerons des exemples d'application du théorème de Fubini.

2. Mesure image et transfert

Le but de ce paragraphe est d'énoncer le *théorème de transfert* et la *formule de changement de variable* qui sont des instruments puissants pour le calcul des intégrales.

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(E, \mathcal{B})$ un espace mesurable et $f : \Omega \longrightarrow E$ une application mesurable. A priori sur $(E, \mathcal{B})$, il n'y pas de mesure ; l'application f va nous permettre d'en mettre une.

2.1. Proposition. *Soit* $\nu : \mathcal{B} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ *l'application définie par* $\nu(B) = \mu(f^{-1}(B))$. *Alors* ν *est une mesure sur* $(E, \mathcal{B})$. *On l'appelle* ***mesure image*** *de* μ *par l'application* f.

Le lecteur peut mener aisément la démonstration de cette proposition.

2.2. Théorème de transfert. *Soit* $h : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction mesurable. Alors la fonction* $h \circ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *est* μ*-intégrable si, et seulement si,* h *est* ν*-intégrable. Dans ce cas on a :*

$$\int_E h d\nu = \int_\Omega h \circ f d\mu.$$

Un cas particulier de ce théorème est celui où Ω et E sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$, $\mu = \lambda$ la mesure de Lebesgue sur Ω et $f : x \in \Omega \longrightarrow f(x) = y \in E$ un difféomorphisme de classe C^1 *i.e.* f est une application bijective dérivable à dérivée continue ainsi que son inverse f^{-1}. On rappelle que f est définie par n applications $f_1, \ldots, f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et que pour tout $i = 1, \ldots, n$ et tout $j = 1, \ldots, n$, la fonction $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ (où $x = (x_1, \ldots x_n)$) est continue ; la matrice :

$$J(f)(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

est appelée *matrice jacobienne* de f et son déterminant $\Delta(f)$ *jacobien* de f. Dans cette situation on a la formule suivante.

2.3. Formule de changement de variable. *La fonction $h : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est λ-intégrable si, et seulement si, $h \circ f$ est $|\Delta(f)|\lambda$-intégrabe. Dans ce cas :*

$$\int_E h(y)d\lambda(y) = \int_\Omega h \circ f(x)|\Delta(f)(x)|d\lambda(x).$$

Cette formule généralise le procédé habituel de changement de variable pour le calcul de l'intégrale de Riemann dans $\mathbb{R}$ dont tout le monde connaît l'intérêt.

3. Mesures à densité

A partir d'une mesure donnée μ sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$ on peut en construire d'autres à l'aide de fonctions mesurables positives. De telles mesures ont un "bon comportement" par rapport à μ. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et f une fonction mesurable positive sur Ω.

3.1. Proposition. *L'application $\nu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ définie par :*

$$\nu(A) = \int_A f(\omega)d\mu(\omega)$$

est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{A})$ appelée mesure de ***densité*** *f.*

Habituellement la mesure ν est notée $f \cdot \mu$; c'est le produit de la mesure μ par la fonction f.

On dira qu'une mesure ν est *absolument continue* par rapport à une autre mesure μ si pour $A \in \mathcal{A}$ on a l'implication :

$$\mu(A) = 0 \Longrightarrow \nu(A) = 0.$$

S'il existe $N \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(N) = 0$ et $\nu(N^c) = 0$, on dira que ν est *étrangère* à μ.

3.2. Exemples

– pour toute mesure μ sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et toute fonction réelle mesurable positive f sur Ω, la mesure $\nu = f \cdot \mu$ est absolument continue par rapport à μ.

– une mesure discrète :

$$\nu = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \delta_{a_n}$$

(où a_n est une suite de réels et les p_n des réels strictement positifs) est étrangère à la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$. En effet si on pose $N = \{a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$ on a $\lambda(N) = 0$ puisque toute partie dénombrable est de mesure nulle pour λ et $\nu(N^c) = 0$ par définition même de ν.

On peut bien entendu se poser la question de savoir si, étant donnée une mesure μ sur $(\Omega, \mathcal{A})$, les seules mesures absolument continues par rapport à μ sont du type $f \cdot \mu$ où $f \in \mathcal{M}_+$. La réponse est positive ; c'est le :

3.3. Théorème de Radon-Nikodym. *Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable et μ et ν deux mesures sur $(\Omega, \mathcal{A})$. On suppose μ et ν sont σ-finies et ν absolument continue par rapport à μ. Alors il existe une fonction mesurable $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ positive telle que $\nu = f \cdot \mu$. En plus :*

– *f est unique à μ-équivalence près i.e. toute autre fonction mesurable g vérifiant $\nu = g \cdot \mu$ est égale μ-presque partout à f ;*

– *si ν est bornée, alors f est intégrable.*

On dira que f est la *dérivée de Radon-Nikodym* de ν par rapport à μ et on écrira $f = \frac{d\nu}{d\mu}$.

Une des démonstrations de ce théorème utilise la *représentation de Riesz* d'une forme linéaire continue sur un espace de Hilbert.

4. Exemples

4.1. Calcul de l'intégrale :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dy$$

où $a \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $x \in \mathbb{R} \longrightarrow e^{-ax^2}$ est continue (de classe C^∞ même) ; elle est intégrable et on peut prendre l'intégrale au sens de Riemann. Pour la calculer nous allons utiliser le théorème de Fubini d'une part et la formule de changement de variable d'autre part. On passera par la fonction positive intégrable $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x, y) = e^{-a(x^2+y^2)}$. D'après le théorème de Fubini on a :

$$\int_{\mathbb{R}^2} h(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-ay^2} dy = I^2.$$

Il suffit donc de calculer l'intégrale de h pour avoir la valeur de I. Nous restreindrons h à l'ouvert :

$$E = \mathbb{R}^2 - \{(x, 0) \ : \ x \in [0, +\infty[\}$$

dont le complémentaire est de mesure nulle. Soit Ω l'ouvert $]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$ et considèrons la transformation :

$$f : (r, \theta) \in \Omega \longrightarrow (x, y) \in E$$

définie par :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$$

Cette transformation est un difféomorphisme (de classe C^∞) de l'ouvert Ω sur l'ouvert E dont la matrice jacobienne au point (r, θ) est :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta. \end{pmatrix}$$

et qui a pour déterminant jacobien $\Delta(f)(r, \theta) = r$. La formule de changement de variable nous donne :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} h(x,y)dxdy &= \int_E h(x,y)dxdy \\ &= \int_\Omega e^{-ar^2} rdrd\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{+\infty} re^{-ar^2} dr \\ &= 2\pi \left[-\frac{1}{2a} e^{-ar^2} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{a}. \end{aligned}$$

Par suite :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

4.2. Calcul de l'intégrale :

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dy$$

avec $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Remarquons d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n existe. Reste juste à calculer sa valeur. Le cas $n = 0$ a été fait en 4.1. Nous supposerons $n \geq 1$ et on fera le calcul de proche en proche en commençant par $n = 1$. On pose $F(a, x) = e^{-ax^2}$; on obtient ainsi une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ qui est telle que :

– pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, $F(a, \cdot) : x \in \mathbb{R} \longrightarrow F(a, x) \in \mathbb{R}$ est intégrable ;

– pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(\cdot, x) : a \in \mathbb{R}_+^* \longrightarrow F(a, x) \in \mathbb{R}$ est dérivable et sa dérivée $F'_a(\cdot, x)$ est égale à $-x^2 e^{-ax^2}$; cette dérivée vérifie en plus l'inégalité :

$$|F'_a(\cdot, x)| \leq g(x)$$

où $g(x) = x^2 e^{-\tau x^2}$ (avec $\tau = \frac{a}{2}$) qui est une fonction intégrable. D'après le théorème 5.2. du chapitre III, la fonction :

$$I_0 = I = \int_{-\infty}^{+\infty} F(a, x) dx$$

est dérivable en a et sa dérivée est égale à :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(-x^2 e^{-ax^2}\right) dx.$$

Ceci donne donc :

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = -\frac{dI}{da} = -\frac{d}{da}\left(\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{a^3}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

En répétant ce raisonnement on montre facilement que I_n vaut :

$$I_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n}\left(\frac{\pi}{a^{2n+1}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

En usant du même type de méthodes, le lecteur peut montrer que l'intégrale :

$$J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n+1} e^{-ax^2} dx$$

vaut :

$$\frac{n!}{2}\frac{1}{a^{n+1}}.$$

4.3. Encore un exemple

Sur le demi-plan supérieur (qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$) $\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y > 0\}$ on considère la mesure $\mu = \frac{1}{y^2}\lambda$ où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$. Nous allons calculer l'aire (au sens de cette mesure) du domaine (voir Fig. 1) :

Fig. 1

$$\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{H} \ : \ x^2 + y^2 > 1 \text{ et } -1 < x < +1\}.$$

Cela revient à calculer l'intégrale :

$$A = \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{y^2} dxdy.$$

Comme la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{D} \longrightarrow \frac{1}{y^2}$ est positive, le théorème de Fubini (ou plutôt la version pour les fonctions positives intégrables ou non) nous donne :

$$A = \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{y^2} dxdy = \int_{-1}^{+1} \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{+\infty} \frac{dy}{y^2} \right) dx$$

c'est-à-dire :

$$A = \int_{-1}^{+1} \left(\left[-\frac{1}{y} \right]_{\sqrt{1-x^2}}^{+\infty} \right) dx = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = [\operatorname{Arc}\sin x]_{-1}^{+1} = \pi.$$

CHAPITRE V

VOLUME DES BOULES ET DES SPHÈRES

On rappelle que la boule $\mathbb{B}^n(R)$ (pour $n \geq 1$) et la sphère $\mathbb{S}^n(R)$ (pour $n \geq 0$) de rayon $R \geq 0$ sont respectivement les parties de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^{n+1}$ définies par :

$$\mathbb{B}^n(R) = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq R^2 \right\}$$

et :

$$\mathbb{S}^n(R) = \left\{ (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = R^2 \right\}.$$

Le *volume* d'une partie X qu'on notera $\mathrm{Vol}(X)$ sera la mesure de cette partie; par exemple :

– pour $n = 0$, $\mathbb{S}^0(R)$ est réduite à l'ensemble $\{-R, +R\}$; la mesure qu'elle supporte sera $\delta_{-R} + \delta_{+R}$ et donc : $\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^0(R)) = 2$;

– pour $n = 1$, $\mathbb{B}^1(R)$ est le segment $[-R, +R]$ dont le volume n'est rien d'autre que sa longueur au sens habituel $\mathrm{Vol}(\mathbb{B}^1(R)) = 2R$; $\mathbb{S}^1(R)$ est le cercle de rayon R dont le volume est le périmètre qui est égal à $2\pi R$;

– pour $n = 2$, $\mathbb{B}^2(R)$ est le disque de rayon R, son volume est égal à son aire habituelle qui est πR^2 ; $\mathbb{S}^2(R)$ est la sphère de rayon R, elle a pour volume son aire habituelle $4\pi R^2$.

Nous allons donner des formules valables pour tout $n \geq 1$ et permettant de calculer les volumes respectifs de $\mathbb{B}^n(R)$ et $\mathbb{S}^n(R)$.

1. Volume des boules

La boule $\mathbb{B}^n(R)$ est une partie de $\mathbb{R}^n$ et son volume n'est rien d'autre que l'intégrale de la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{\mathbb{B}^n(R)}$. Les calculs ne seront pas immédiats ; il faut les mener par récurrence.

On sait que pour $n = 1$ on a $\mathrm{Vol}(\mathbb{B}^1(R)) = 2R$. Nous allons traiter le :

1.1. Cas $n = 2$

Il s'agit de calculer l'intégrale :

$$\int_{\mathbb{B}^2(R)} dxdy.$$

Nous le ferons en utilisant le théorème de Fubini. On fixe $x \in [-R, +R]$ et on note B_x la section de $\mathbb{B}^2(R)$ suivant x qui n'est rien d'autre que l'intervalle $[-b_x, +b_x]$ où $b_x = \sqrt{R^2 - x^2}$.

Fig. 2

On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(\mathbb{B}^2(R)) &= \int_{-R}^{+R} \left(\int_{B_x} dy \right) dx \\
&= \int_{-R}^{+R} \left(\int_{-b_x}^{+b_x} dy \right) dx \\
&= \int_{-R}^{+R} 2\sqrt{R^2 - x^2} dx.
\end{aligned}$$

Pour calculer cette dernière intégrale, on fera un changement de variable en posant $x = R \sin \theta$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(\mathbb{B}^2(R)) &= \int_{-R}^{+R} 2\sqrt{R^2 - x^2} dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2R^2 \cos^2 \theta d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \left(\cos(2\theta) + 1 \right) d\theta \\
&= R^2 \left[\frac{\sin 2\theta}{2} + \theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \\
&= \pi R^2.
\end{aligned}$$

1.2. Cas $n = 3$

Le point courant (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{R}^3$ sera désigné par (x, y) où $x = x_1$ et $y = (x_2, x_3)$ via l'identification $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$. Pour $x \in [-R, +R]$, B_x sera toujours la section de $\mathbb{B}^3(R)$ suivant x. La partie B_x de $\mathbb{R}^2$ est un disque de rayon $\sqrt{R^2 - x^2}$ dont l'aire est égale à $\pi\left(R^2 - x^2\right)$. On a comme précédemment :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(\mathbb{B}^3(R)) &= \int_{-R}^{+R} \left(\int_{B_x} dy \right) dx \\
&= \int_{-R}^{+R} \pi\left(R^2 - x^2\right) dx \\
&= \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^{+R} \\
&= \frac{4}{3}\pi R^3.
\end{aligned}$$

La même démarche donne pour $n = 4$:

$$\mathrm{Vol}(\mathbb{B}^4(R)) = \frac{\pi^2}{2} R^4.$$

On remarque que les calculs font apparaître des expressions du type :

$$\mathrm{Vol}(\mathbb{B}^{2k}(R)) = \frac{\pi^k}{k!} R^{2k} \tag{V.1}$$

et :

$$\mathrm{Vol}(\mathbb{B}^{2k+1}(R)) = \frac{2^{k+1}\pi^k}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k+1)} R^{2k+1} \tag{V.2}$$

On va montrer que ces formules donnent effectivement le volume de la boule de rayon R de $\mathbb{R}^n$. On a déjà vu que c'était vrai pour $n = 1, 2, 3$ et 4. Nous allons supposer que si on a la formule :

$$\mathrm{Vol}(\mathbb{B}^n(R)) = \frac{\pi^k}{k!} R^{2k}$$

pour $n = 2k$, alors on a la formule :

$$\mathrm{Vol}(\mathbb{B}^n(R)) = \frac{2^{k+1}\pi^k}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k+1)} R^{2k+1}$$

pour $n = 2k + 1$. Le cas où on suppose d'abord la formule vraie pour $n = 2k + 1$ se traite de la même manière.

On veut donc calculer le volume de la boule $\mathbb{B}^{2k+1}(R)$ connaissant celui de $\mathbb{B}^{2k}(R)$. Pour simplifier les notations on posera $x = x_1$ et $y = (x_2, \ldots, x_{2k+1})$ pour un point courant $x = (x_1, \ldots, x_{2k+1})$ de $\mathbb{R}^{2k+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2k}$; B_x sera toujours la section de $\mathbb{B}^{2k+1}(R)$ suivant $x \in [-R, +R]$ (qui est une boule de rayon $\sqrt{R^2 - x^2}$ dans $\mathbb{R}^{2k}$ et $dy = dx_2 \ldots dx_{2k+1}$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{2k}$ vu comme le sous-espace de $\mathbb{R}^{2k+1}$ défini par l'équation $x_1 = 0$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(\mathbb{B}^{2k+1}(R)) &= \int_{-R}^{+R} \left(\int_{B_x} dy \right) dx \\
&= \int_{-R}^{+R} \frac{\pi^k}{k!} \left(\sqrt{R^2 - x^2} \right)^{2k} dx \\
&= \frac{\pi^k}{k!} \int_{-R}^{+R} (R^2 - x^2)^k dx
\end{aligned}$$

En posant $x = R \sin \theta$, on obtient :

$$\mathrm{Vol}(\mathbb{B}^{2k+1}(R)) = \frac{\pi^k}{k!} R^{2k+1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{2k+1} dx$$

Ce qui donne après calcul de $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{2k+1} dx$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(\mathbb{B}^{2k+1}(R)) &= \frac{\pi^k}{k!} R^{2k+1} 2 \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2k)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k+1)} \right) \\
&= \frac{2^{k+1} \pi^k}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k+1)} R^{2k+1}
\end{aligned}$$

qui montre bien que la formule (2) donne le volume de la boule $\mathbb{B}^{2k+1}(R)$. □

1.3. Application : volume d'un ellipsoïde

Soit $\mathcal{E}^n$ l'ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$ défini l'équation cartésienne :

$$\mathcal{E}^n = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2} \leq 1 \right\}$$

où a_i, $i = 1, \ldots, n$ sont des nombres réels strictement positifs. Son volume est donné par l'intégrale :

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{E}^n) = \int_{\mathcal{E}^n} dx_1 \ldots dx_n.$$

Pour la calculer nous allons procéder à un changement de variable et ramener le problème à une boule de $\mathbb{R}^n$. Soit Φ le difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$\Phi(u_1, \ldots, u_n) = (x_1, \ldots, x_n)$$

avec $x_i = a_i u_i$ pour $i = 1, \ldots, n$. Il transforme la boule unité $\mathbb{B}^n$ en l'ellipsoïde $\mathcal{E}^n$. Son déterminant jacobien est égal à $\Delta(\Phi) = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$. La formule de changement de variable nous donne :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(\mathcal{E}^n) &= \int_{\mathcal{E}^n} dx_1 \ldots dx_n \\
&= \int_{\mathbb{B}^n} \Delta(\Phi) dx_1 \ldots dx_n \\
&= \left(\prod_{i=1}^n a_i \right) \mathrm{Vol}(\mathbb{B}^n).
\end{aligned}$$

En tenant compte des calculs faits antérieurement on obtient :

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{E}^n) = \begin{cases} \frac{(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)\pi^k}{k!} & \text{pour } n = 2k \\ \frac{(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n) 2^{k+1} \pi^k}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k+1)} & \text{pour } n = 2k+1 \end{cases}$$

2. Volume des sphères

Nous allons commencer par définir la mesure canonique sur la sphère $\mathbb{S}^n(R)$. La construction de cette mesure se fera à l'aide de coordonnées bien adaptées qu'on appelle habituellement les *coordonnées sphériques.*

2.1. La mesure canonique sur la sphère

On note Ω l'ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$ donné par :

$$\Omega = \left\{ (r, \theta) : r > 0, \ -\frac{\pi}{2} < \theta_1, \ldots, \theta_{n-1} < +\frac{\pi}{2} \text{ et } 0 < \theta_n < 2\pi \right\}.$$

où $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$. On considère l'application $\Omega \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}^{n+1}$ qui à $(r, \theta_1, \ldots, \theta_n)$ associe le point $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ donné par :

$$\begin{aligned}
x_1 &= r \cos\theta_1 \cdot \ldots \cdot \cos\theta_{n-1} \cos\theta_n \\
x_2 &= r \cos\theta_1 \cdot \ldots \cdot \cos\theta_{n-1} \sin\theta_n \\
x_3 &= r \cos\theta_1 \cdot \ldots \cdot \cos\theta_{n-2} \sin\theta_{n-1} \\
\ldots &= \ldots \cdot \ldots \\
x_n &= r \cos\theta_1 \sin\theta_2 \\
x_{n+1} &= r \sin\theta_1
\end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que cette application est de classe C^∞ (analytique même), injective et que l'image $\Phi(\Omega)$ est un ouvert E de $\mathbb{R}^{n+1}$ dont le complémentaire a une mesure de

Lebesgue nulle (pour s'en assurer le lecteur pourrait faire un dessin dans le cas de la sphère $\mathbb{S}^2(R)$ de $\mathbb{R}^3$). L'application Φ a pour déterminant jacobien (calcul facile mais indigeste) :

$$\Delta(\Phi) = r^n \cos^{n-1}\theta_1 \cdot \cos^{n-2}\theta_2 \cdot \ldots \cdot \cos\theta_{n-1}.$$

Si $h : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction intégrable, le théorème de changement de variable nous donne :

$$\int_E h(x)d\lambda = \int_\Omega (f \circ \Phi) dr d\theta_1 \ldots d\theta_n.$$

On fixe $R > 0$; la mesure :

$$d\sigma = R^n \cos^{n-1}\theta_1 \cdot \cos^{n-2}\theta_2 \cdot \ldots \cdot \cos\theta_{n-1} d\theta_1 \ldots d\theta_n$$

est appelée l'*élément d'aire* sur $\mathbb{S}^n(R)$. A titre d'exercice, le lecteur peut montrer que cette mesure est invariante par toute isométrie linéaire de $\mathbb{R}^{n+1}$ *i.e.* une application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ qui vérifie :

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ où $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_{n+1} y_{n+1}$.

2.2 Le volume de $\mathbb{S}^n(R)$

Il est donné par l'intégrale :

$$\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n(R)) = \int_{\mathbb{S}^n(R)} d\sigma$$

qui est égale à :

$$R^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}\theta_1 d\theta_1 \cdot \ldots \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\theta_{n-1} d\theta_{n-1} \cdot \int_0^{2\pi} d\theta_n.$$

En utilisant les formules :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k} x dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2k)} \frac{\pi}{2}$$

et :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+1} x dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2k)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k+1)},$$

que le lecteur pourrait établir facilement, on obtient :

$$\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{2k}(R)) = \frac{2^{k+1}\pi^k}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1)} R^{2k}. \tag{V.3}$$

et :

$$\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{2k+1}(R)) = \frac{2\pi^{k+1}}{k!} R^{2k+1}. \tag{V.4}$$

Ce qui termine les calculs. □

EXERCICES

Exercice 1

Soit Ω un ensemble non vide. Pour toute partie finie E de Ω, on note $|E|$ son cardinal. On munit Ω de la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on pose :

$$m(A) = \begin{cases} |A| & \text{si } A \text{ est fini} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

1 - Montrer que m est une mesure sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$. (On dira que m est la *mesure de comptage* sur Ω.)

8 - Montrer que m est σ-finie si, et seulement si, Ω est dénombrable.

Exercice 2

On considère l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}, m)$ où m est la mesure de comptage. Pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ on pose :

$$\mu(A) = \limsup \frac{1}{n} m(A \cap \{1, \cdots, n\}).$$

et on note $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties A de $\mathbb{N}$ pour lesquelles la limite qui suit existe :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n} m(A \cap \{1, \cdots, n\}) \right).$$

1 - Montrer que si A est fini, $\mu(A) = 0$.

2 - Montrer que μ est additive sur $\mathcal{A}$.

3 - Montrer que μ n'est pas σ-additive.

Exercice 3

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mu)$ un espace mesuré. On suppose que la mesure μ est σ-finie. On pose :

$$E = \{\omega \in \Omega : \mu(\{\omega\}) > 0\}.$$

Montrer que E est dénombrable.

Indication : Comme μ est σ-finie, on a $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ avec $\mu(\Omega_i) < +\infty$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, considérer l'ensemble :

$$E_i^n = \left\{ \omega \in \Omega_i : \mu(\{\omega\}) > \frac{1}{n} \right\}.$$

Exercice 4

Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable, $(\mu_n)_{n\geq 1}$ une suite de mesures de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels strictement positifs tels que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge et soit de somme 1.

Montrer que $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mu_n$ est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Exercice 5

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On considère la famille :

$$\mathcal{N}_\mu = \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0 \text{ ou } \mu(A^c) = 0\}.$$

Montrer que $\mathcal{N}_\mu$ est une tribu sur Ω.

Exercice 6

Soit $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n, \cdots\}$ un ensemble dénombrable muni de la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels strictement positifs tels que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Pour tout $A \subset \Omega$, on pose :

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 1_A(\omega_n).$$

1 - Montrer que μ est une mesure finie sur Ω.

2 - Montrer que toute mesure finie sur Ω est obtenue de cette manière pour une certaine suite $(a_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels strictement tels que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Exercice 7

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On note $\mathcal{A}_0$ la famille des éléments $A \in \mathcal{A}$ tels que $\mu(A) < +\infty$. Pour $A, B \in \mathcal{A}_0$, on pose :

$$d(A, B) = \mu(A \Delta B)$$

où $A\Delta B$ est la différence symétrique des parties A et B :

$$A\Delta B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B).$$

Montrer que d est une pseudo-métrique sur $\mathcal{A}_0$. Est-elle une métrique ?

Exercice 8 (Espace L^p)

Les espaces L^p ($p \in [1, +\infty[$) jouent un rôle fondamental. Nous allons les définir et donner leurs principales propriétés.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et notons L^p l'ensemble des classes de fonctions réelles (on peut les supposer complexes aussi) mesurables de puissance $p^{\text{ème}}$ μ-intégrable sur Ω. C'est un espace vectoriel. En effet pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout élément f de L^p, $\alpha f \in L^p$. D'autre part la fonction $x \in \mathbb{R} \longrightarrow |x|^p$ étant convexe, on a pour tous $f, g \in L^p$:

$$|f+g|^p \leq (|f|+|g|)^p \leq 2^{p-1}(|f|^p + |g|^p)$$

qui montre bien que $f+g \in L^p$. Pour $f \in L^p$ on pose :

$$||f||_p = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Nous allons montrer que $|| \ ||_p$ est une norme sur l'espace vectoriel L^p qui en fait un espace Banach.

On suppose $p > 1$. Soient $q \in]1, +\infty[$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et a et b deux nombres réels positifs.

1 - Etablir l'inégalité :

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

2 - En déduire que pour $f \in L^p$ et $g \in L^q$, $fg \in L^1$ et qu'on a l'inégalité (dite de Hölder) :

$$||fg||_1 \leq ||f||_p ||g||_q.$$

3 - Démontrer l'inégalité suivante (dite de Minkowski) valable pour tout $p \geq 1$.

$$||f+g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p.$$

4 - En déduire que $|| \ ||_p$ est une norme sur L^p.

Soit (f_n) une suite de Cauchy dans L^p.

5 - Montrer qu'on peut extraire de (f_n) une suite $(f_{n_k})_k$ telle que

$$||f_{n_{k+1}} - f_{n_k}||_p \leq \frac{1}{2^k}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on pose $h_k = |f_{n_1}| + \sum_{j=1}^{k} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|$ et pour tout $\omega \in \Omega$, $h(\omega) = \lim_{k \to +\infty} h_k(\omega)$ (limite qui est finie ou infinie).

6 - Montrer que $||h_k||_p \to ||h||_p$ et que $h_k \in L^p$. En déduire que $h \in L^p$ et donc h est presque partout finie.

7 - Montrer que la suite $(f_{n_k})_k$ est presque partout convergente vers une fonction mesurable f.

(Remarquer que la série dont les termes sont $u_1 = f_{n_1}$ et $u_k = f_{n_k} - f_{n_{k-1}}$ pour $k \geq 2$ a pour somme partielle $S_k = f_{n_k}$ et se rappeler qu'elle est absolument convergente (la limite est précisément h.)

8 - Démontrer que $(f_{n_k})_k$ converge vers f dans L^p.

(Appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $g_k = |f_{n_k} - f|^p$.)

Exercice 9 (Espace L^∞)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Pour toute fonction mesurable f on pose :

$$||f||_\infty = \inf\big\{\alpha : \alpha \in \overline{\mathbb{R}}_+ \quad \text{et} \quad |f| \leq \alpha \quad \mu - \text{pp}\big\}$$

On dira que f est *μ-essentiellement bornée* si $||f||_\infty < +\infty$ et on note $\mathcal{L}^\infty$ l'ensemble de telles fonctions et $L^\infty = \mathcal{L}^\infty/\mathcal{N}$ où $\mathcal{N}$ est l'espace des fonctions mesurables nulles presque partout.

1 - Montrer que $||\ \ ||_\infty$ est une norme sur L^∞.

2 - Soit $f \in L^\infty$. Montrer qu'il existe $E \in \mathcal{A}$ de mesure nulle tel que :

$$||f||_\infty = \sup_{\omega \in \Omega - E} \big|f(\omega)\big|.$$

3 - Soit (f_n) une suite de Cauchy dans L^∞. Montrer que (f_n) est une suite de Cauchy pour la norme uniforme en dehors d'un ensemble de mesure nulle E.

4 - En déduire que (f_n) converge vers un élément $f \in L^\infty$ pour la norme $||\ \ ||_\infty$ et donc L^∞ est complet.

Exercice 10

On note Ω l'ensemble $[a, b]$ (avec $a < b$) muni de sa tribu borélienne usuelle et de la mesure de Lebesgue λ. Soient $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable et $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$ décroissante.

Soient $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ une subdivision de $[a, b]$ et (r_i) une suite finie dans $[0, 1]$ telle que $1 = r_0 \geq r_1 \geq \cdots r_{n-1} \geq r_n = 0$. Posons :

$$F(x) = \int_{[a,x[} f(t) d\lambda(t) \quad \text{et} \quad r = \sum_{i=0}^{n-1} r_i 1_{[x_i, x_{i+1}[}.$$

1 - Montrer que F est continue.

2 - Montrer que $I = \int_{[a,b]} f(x) r(x) d\lambda(x) = \sum_{i=1}^{n-1} F(x_{i+1})(r_i - r_{i+1})$.

3 - En déduire que I est une combinaison linéaire convexe à coefficients positifs des points réels $F(x_1), \cdots, F(x_n)$ et donc que $I \in F([a, b]$.

Dorénavant on supposera que $g(a) > 0$ et que $x_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$ pour tout $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$G(x) = \frac{g(x)}{g(0)}$$

et :

$$G_n = \sum_{i=0}^{n-1} G(x_i) 1_{[x_i, x_{i+1}[}.$$

On admet que l'ensemble de discontinuité de G est au plus dénombrable et que pour tout point $c < b$ en lequel G est continue, la suite $G_n(c)$ tend vers $G(c)$.

4 - Montrer, en usant le théorème de convergence dominée, que la suite des intégrales $\int_{[a,b]} f(x)G_n(x)\lambda(x)$ converge vers $\int_{[a,b]} f(x)G(x)\lambda(x)$.

5 - En déduire que $\int_{[a,b]} f(x)G(x)d\lambda(x) \in F([a,b])$.

6 - Démontrer la *seconde formule de la moyenne* : étant données f et g vérifiant les hypothèses du probème, il existe $y \in [a,b]$ tel que :

$$\int_{[a,b]} f(x)g(x)d\lambda(x) = g(a) \int_{[a,b]} f(x)d\lambda(x).$$

Exercice 11

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction intégrable. On pose $N = \{\omega \in \Omega : f(\omega) = +\infty\}$.

1 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\mu(N) \leq \frac{1}{n} \int_\Omega f d\mu$.

2 - En déduire que f est presque partout finie.

Soit φ_n une suite croissante de fonctions étagées positives sur Ω. On pose :

$$M = \{\omega \in \Omega : \lim \varphi_n(\omega) = +\infty\}$$

et :

$$I = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \int_M \varphi_n d\mu.$$

3 - Montrer que $\mu(M) = 0$ si, et seulement si, $I < +\infty$.

Exercice 12

Dans cet exercice $\mathbb{R}_+$ sera muni de sa tribu borélienne (pour la topologie usuelle) $\mathcal{B}$ et de la mesure de Lebesgue λ.

1 - Pour tout $n \in \mathbb{R}$, on considère l'intégrale $I_n = \int_{[0,n]} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n d\lambda(x)$. En considérant les fonction $f_n(x) = 1_{[0,n]}(x) \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$, montrer que la suite (I_n) converge et calculer sa limite.

2- Calculer la limite de la suite (J_n) où $J_n = \int_0^{n^2} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-ax} d\lambda(x)$ où a est un réel strictement positif.

Exercice 13

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On considère la famille $\mathcal{N}_\mu$ de parties A de Ω appartenant à $\mathcal{A}$ et telles que $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A^c) = 0\}$. Montrer que $\mathcal{N}_\mu$ est une tribu sur Ω.

Licence 3 - Mathématiques
Année universitaire 2006-2007
Mesure-Intégration – S5MAMESI
Examen - 19 décembre 2006

Durée : 2 heures - Documents non autorisés

Question de cours

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesurable. Soit N une partie de Ω. Quand dit-on que N est de *mesure nulle* ? Soit $(N_k)_{k\geq 1}$ une suite de parties de Ω chacune de mesure nulle. Montrer que la réunion N de toutes les parties N_k est de mesure nulle.

Exercice 1

On munit $\Omega = [0, +\infty[$ de sa tribu borélienne $\mathcal{B}$ et de la mesure de Lebesgue λ. En utilisant le théorème de Lebesgue (ou théorème de la convergence dominée), calculer les limites des suites $(I_n)_{n\geq 1}$ et $(J_n)_{n\geq 1}$ où :

$$I_n = \int_0^n \frac{1 + e^{-nx}}{1 + x^2} dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(x + \frac{1}{n}\right) e^{-\pi x^2} dx.$$

Exercice 2

On munit $\mathbb{R}^2$ de sa tribu borélienne $\mathcal{B}$ et de la mesure de Lebesgue λ. Soient $z = (a, b)$ un point de $\mathbb{R}^2$, R un réel strictement positif et Δ_z la partie de $\mathbb{R}^2$ constituée des points (x, y) tels que $(x - a)^2 + (y - b)^2 < R^2$. On note Φ_z la fonction qui à (x, y) de $\mathbb{R}^2$ associe le nombre réel $(x - a)(y - b)1_{\Delta_z}$ où 1_{Δ_z} est la fonction caractéristique de Δ_z.

1 - Montrer que la fonction Φ_z est intégrable.

2 - En utilisant la formule de changement de variable, montrer que l'intégrale de Φ_z vaut $\int_\Delta xy d\lambda(x, y)$ où $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2\}$.

3 - En appliquant le théorème de Fubini, calculer l'intégrale $\int_\Delta xy d\lambda(x, y)$ et en déduire celle de Φ_z.

Exercice 3

On munit $\Omega = [0, 1]$ de sa tribu borélienne $\mathcal{B}$ et de la mesure de Lebesgue λ. Soit $\alpha \in]0, 1[$. On définit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{x^\alpha} & \text{si } x \in]0, 1]. \end{cases}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note χ_n la fonction caractéristique du segment $[\frac{1}{n}, 1]$ et on pose $f_n = \chi_n f$.

1 - Montrer que toutes les fonctions χ_n sont intégrables et calculer leurs intégrales.

2 - Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ tend en croissant vers f. Utiliser ce fait pour montrer que f est intégrable et calculer son intégrale.

Corrigé

Question de cours

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $E_k = \bigcup_{\ell \leq k} N_\ell$. Alors :

$$\mu(E_k) = \mu\left(\bigcup_{\ell \leq k} N_\ell\right) \leq \sum_{\ell=1}^{k} \mu(N_k).$$

Comme pour tout ℓ, l'ensemble N_ℓ est de mesure nulle, on en déduit $\mu(E_k) = 0$. D'autre part, la suite $(E_k)_k$ tend en croissant vers N, donc $\mu(E_k)$ tend en croissant vers $\mu(N)$; par suite $\mu(N) = \lim_{k\to+\infty} \mu(E_k) = 0$. □

Exercice 1

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = 1_{[0,n]} \frac{1+e^{-nx}}{1+x^2}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et $g(x) = \frac{2}{1+x^2}$. Alors :

i) Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ (car e^{-nx^2} tend vers 0) ; mais $f_n(0) = 2$ ne tend pas vers $f(0) = 1$. Donc f_n tend vers f presque partout vers f (la mesure $\lambda(\{0\})$ du singleton $\{0\}$ est nulle).

ii) pour tout n et tout $x \in [0, +\infty[$, on a $|f_n(x)| \leq g(x)$ (car $0 < e^{-nx} \leq 1$) ;

iii) g est intégrable d'intégrale :

$$\int_\Omega g(x) d\lambda(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+x^2} dx = 2\big[\mathrm{Arctg}(x)\big]_0^\infty = \pi.$$

D'après le théorème de Lebesgue, la suite des intégrales $I_n = \int f_n$ tend vers l'intégrale de la fonction f *i.e.* :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_\Omega f(x) d\lambda(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \big[\mathrm{Arctg}(x)\big]_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

• On pose $f_n(x) = 1_{[0,\sqrt{n}]} \left(x + \frac{1}{n}\right) e^{-\pi x^2}$, $f(x) = xe^{-\pi x^2}$ et $g(x) = (x+1)e^{-\pi x^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Il est alors facile de voir que :

i) Pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ (car $\frac{1}{n}$ tend vers 0) ;

ii) pour tout n et tout $x \in [0, +\infty[$, on a $|f_n(x)| \leq g(x)$;

iii) La fonction g est intégrable. En effet, pour $x \geq A$ (avec A positif assez grand), on a $g(x) \leq \frac{1}{x^2}$ et $\phi(x) = \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[A, +\infty[$;

D'après le théorème de Lebesgue, la suite des intégrales $J_n = \int f_n$ tend vers l'intégrale de la fonction f *i.e.* :

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = \int_\Omega f(x) d\lambda(x) = \int_0^{+\infty} x e^{-\pi x^2} dx = \Big[-\frac{1}{2\pi} e^{-\pi x^2} \Big]_0^\infty = \frac{1}{2\pi}.$$

Exercice 2

1 - Soit K le carré dont les sommets ont pour coordonnées $(a-R, b-R)$, $(a+R, b-R)$, $(a+R, b+R)$ et $(a-R, b+R)$. La mesure de son côté est $2R$ et son aire est donc $4R^2$. (La fonction Φ_z est nulle en dehors de K.) On a :

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^2} \Phi_z(x,y) d\lambda(x,y) \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^2} |\Phi_z(x,y)| d\lambda(x,y) \\
&\leq \int_K \left(\sup_{(x,y)\in K} |(x-a)(y-b)| \right) d\lambda(x,y) \\
&\leq R^2 \lambda(K) \\
&\leq 4R^4 \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

donc Φ_z est intégrable. □

2 - Soient $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par $h(x,y) = (x-a, y-b)$ et Φ la fonction $\Phi(x,y) = xy$; h est un automorphisme affine de $\mathbb{R}^2$ et $\Phi_z(x,y) = (\Phi \circ h)(x,y)$. La restriction de h à Δ_z est un difféomorphisme de Δ_z sur Δ dont la matrice jacobienne est $d_{(x,y)}h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donc de déterminant jacobien 1. La formule de changement de variable nous donne alors :

$$\int_{\Delta_z} \Phi_z(x,y) d\lambda(x,y) = \int_\Delta \Phi(x,y) d\lambda(x,y) = \int_\Delta xy d\lambda(x,y).$$

3 - Comme Φ est intégrable, on peut lui appliquer le théorème de Fubini pour calculer son intégrale. On a :

$$\int \Phi = \int_\Delta xy\lambda(x,y) = \int_{-R}^{+R} x \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} y dy \right) dx = \int_{-R}^{+R} x \left(\Big[\frac{y^2}{2} \Big]_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} \right) dx = 0.$$

$\square$

Exercice 3

1 - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, χ_n est la fonction indictrice de $[\frac{1}{n}, 0]$ qui est de mesure finie ; elle est donc intégrable et son intégrale n'est rien d'autre que $\lambda([\frac{1}{n}, 1]) = 1 - \frac{1}{n}$. $\square$

2 - On a $f_n(0) = f(0) = 0$ pour tout n, donc $f_n(0)$ tend vers $f(0)$. Soit $x \in]0, 1]$. Comme $[\frac{1}{n}, 1]$ tend en croissant vers $]0, 1]$, $1_{[\frac{1}{n},1]}$ tend en croissant vers $1_{[\frac{1}{n},1]}$ et donc $f_n(x)$ tend en croissant vers $f(x)$. En résumé, la suite $(f_n)_n$ tend en croissant vers f. On en déduit que l'intégrale de f_n :

$$\int_\Omega f_n(x) d\lambda(x) = \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha} \left[x^{1-\alpha} \right]_{\frac{1}{n}}^1 = \frac{1}{1-\alpha} \left(1 - \left(\frac{1}{n} \right)^{1-\alpha} \right)$$

tend en croissant vers celle de f :

$$\int_\Omega f(x) d\lambda(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x) d\lambda(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha} \left(1 - \left(\frac{1}{n} \right)^{1-\alpha} \right) = \frac{1}{1-\alpha}.$$

$\square$

Licence 3 - Mathématiques
Année universitaire 2006-2007
Mesure-Intégration – S5MAMESI
Examen - 23 janvier 2007

DURÉE : 2 HEURES - DOCUMENTS NON AUTORISÉS

Question de cours

Soient Ω un ensemble non vide, $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$. Quand dit-on que $\mathcal{A}$ est une *tribu* sur Ω ? Un couple, $(\Omega, \mathcal{A})$ où Ω est un ensemble non vide et $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω, est appelé *espace mesurable*. Qu'appelle-t-on *mesure* sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$?

Exercice 1

On munit $\Omega = \mathbb{N}$ de la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Pour tout $A \subset \mathbb{N}$, on pose :

$$\mu(A) = \begin{cases} |A| & \text{si } A \text{ est fini} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

1 - Montrer que μ est une mesure sur Ω.

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(\omega) = e^{-\omega}$.

2 - Dire pourquoi f est mesurable.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(\omega) = \begin{cases} f(\omega) & \text{si } 0 \leq \omega \leq n \\ 0 & \text{si } \omega \geq n+1. \end{cases}$$

3 - Montrer que f_n est une fonction étagée.

4 - Montrer que la suite (f_n) tend en croissant vers f.

5 - Montrer que la fonction f_n est intégrable et calculer son intégrale.

6 - Montrer que f est intégrable. Calculer l'intégrale $\int_\Omega f(\omega) d\mu(\omega)$.

Exercice 2

On munit $[0, +\infty[$ de sa tribu borélienne usuelle $\mathcal{B}$ et de la mesure de Lebesgue λ. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\phi_n : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie comme suit :

$$\phi_n(x) = \begin{cases} (2n^4)x + (n - 2n^5) & \text{si } x \in [n - \frac{1}{2n^3}, n[\\ (-2n^4)x + (n + 2n^5) & \text{si } x \in [n, n + \frac{1}{2n^3}[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout $x \in [0, +\infty[$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note f_k la fonction $\sum_{n=1}^{k} \phi_n$.

1 - Montrer que f est bien définie et tracer son graphe. Montrer que f est continue.

2 - Montrer que la suite $(f_k)_k$ tend en croissant vers f.

3 - Calculer l'intégrale de chacune des fonctions f_k et en déduire celle de f. (On rappelle que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge et a pour somme $\frac{\pi^2}{6}$.)

4 - Soit $[0, +\infty[\xrightarrow{\psi} \mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable. Est-elle nécessairement bornée ? (La réponse est à justifier bien sûr !)

Corrigé

On adoptera les notations suivantes : si A est une partie de Ω, A^c sera son complémentaire dans Ω et $|A|$ sera son cardinal (qui est un entier naturel si A est finie et $+\infty$ sinon) ; 1_A sera la fonction indicatrice de A *i.e.* $1_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$ et 0 sinon.

Question de cours

On dira que $\mathcal{A}$ est une *tribu* sur Ω si les axiomes qui suivent sont vérifiés :

i) $\Omega \in \mathcal{A}$;

ii) $A \in \mathcal{A}$ implique $A^c \in \mathcal{A}$ (stabilité par passage au complémentaire) ;

iii) si $(A_n)_{n \geq 1}$ est une suite dans $\mathcal{A}$, la réunion $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$ est un élément de $\mathcal{A}$ (c'est la stabilité par réunion dénombrable).

Une *mesure* sur $\mathcal{A}$ est une application $\mathcal{A} \xrightarrow{\mu} [0, +\infty]$ non constante avec la valeur $+\infty$ et telle que, pour toute suite $(A_n)_{n \geq 1}$ dans $\mathcal{A}$ qui vérifie $n \neq p \Longrightarrow A_n \cap A_p = \emptyset$, on a :

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$

On dira que μ est σ-*additive.* $\square$

Exercice 1

1 - Soient $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite de parties de Ω qui vérifie $n \neq p \Longrightarrow A_n \cap A_p = \emptyset$ et A la réunion $\bigcup_{n \geq 1} A_n$.

1er cas : A est finie. Forcément les A_n qui sont non vides sont finis et en nombre fini; notons les $A_{n_1}, \cdots, A_{n_k}$. On a $A = A_{n_1} \cup \ldots \cup A_{n_k}$ et $A_n = \emptyset$ pour $n \notin \{n_1, \cdots, n_k\}$ (donc $\mu(A_n) = 0$ pour $n \notin \{n_1, \cdots, n_k\}$). Par suite $\big|A\big| = \sum_{j=1}^{k} |A_{n_j}|$. D'où :

$$\mu(A) = |A| = \sum_{j=1}^{k} |A_{n_j}| = \sum_{j=1}^{k} \mu(A_{n_j}) = \sum_{j=1}^{k} \mu(A_{n_j}) + \sum_{n \notin \{n_1, \cdots, n_k\}} \mu(A_n) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n).$$

2ème cas : A est infinie. Deux sous-cas : i) il existe au moins un n_0 tel que la partie A_{n_0} soit infinie ; ii) toutes les parties A_n sont finies mais il existe une sous-suite infinie $(A_{n_k})_k$ telle que chaque A_{n_k} soit non vide. Dans les deux sous-cas on a $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \mu(A_n) = +\infty$. Comme par définition de μ on a $\mu(A) = +\infty$, on en conclut que $\mu(A) = \displaystyle\sum_{n \geq 1} \mu(A_n)$.

L'application μ est donc *σ-additive*. En plus elle vaut 1 sur les singletons donc non constante avec la valeur $+\infty$. Ceci montre que μ est une mesure. □

2 - Comme $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, pour tout $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ (tribu borélienne de $\mathbb{R}$), $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$; donc f est mesurable. □

3 - Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on pose $A_i = \{i\}$ et $A = \displaystyle\bigcup_{j=n+1}^{\infty} A_j$. Alors $(A_0, A_1, \cdots, A_n, A)$ est une partition mesurable de Ω et $1_{A_i}(\omega) = 1$ si $\omega = i$ et 0 sinon. Il est alors facile de vérifier que, pour tout $\omega \in \mathbb{N}$, on a $f_n(\omega) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i 1_{A_i}(\omega)$ avec $a_i = e^{-i} = f(i)$. Cela signifie que $f_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i 1_{A_i}$ c'est-à-dire f_n est une fonction étagée. □

4 - Comme $f_{n+1} = f_n + a_{n+1} 1_{A_{n+1}}$ et $a_{n+1} > 0$, on a $f_n(\omega) \leq f_{n+1}(\omega)$ pour tout $\omega \in \mathbb{N}$, ce qui signifie que la suite (f_n) est croissante. Soit $\omega \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout $n \geq \omega$, $f_n(\omega) = f(\omega)$; donc $f_n(\omega)$ tend vers $f(\omega)$. La suite (f_n) tend donc (simplement) en croissant vers f. □

5 - D'après la question 3, on a $f_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i 1_{A_i}$ *i.e.* f_n est une fonction étagée positive et tous les A_i sont de mesure 1 ; A est de mesure infinie mais f_n est nulle dessus ! La fonction f_n est donc intégrable d'intégrale :

$$\int_{\Omega} f_n(\omega) d\mu(\omega) = \int_{A^c} f_n(\omega) d\mu(\omega) = \sum_{i=0}^{n} a_i \mu(A_i) = \sum_{i=0}^{n} e^{-i} \cdot 1 = \frac{1 - e^{-(n+1)}}{1 - e^{-1}}.$$

□

6 - Comme (f_n) est une suite de fonctions positives intégrables qui tend en croissant vers f, la suite des intégrales des f_n tend en croissant vers celle de f. On a donc :

$$\int_\Omega f(\omega)d\mu(\omega) = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(\omega)d\mu(\omega) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1-e^{-(n+1)}}{1-e^{-1}}\right) = \frac{e}{e-1}$$

ce qui signifie en particulier que f est intégrable. □

Exercice 2

1 - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $A_n =]n - \frac{1}{2n^3}, n + \frac{1}{2n^3}[$ et notons B le complémentaire dans $[0, +\infty[$ de la réunion de tous les A_n. Soit $x \in [0, +\infty[$. Si $x \in B$, on a $\phi_n(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; si $x \notin B$, il existe un unique $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in A_k$ et dans ce cas $\phi_n(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{k\}$. On a alors $f(x) = 0$ si $x \in B$ sinon $f(x) = \phi_k(x)$ si $x \in A_k$; $f(x)$ est donc une quantité bien définie pour tout $x \in [0, +\infty[$.

Montrons d'abord que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction ϕ_n est continue. Le problème se pose seulement aux points $x_0 = n$, $a = n - \frac{1}{2n^3}$ et $b = n + \frac{1}{2n^3}$. Au point $x_0 = n$ la fonction ϕ_n vaut $(-2n^4)n + (n + 2n^5) = n$ et lorsque x tend vers $x_0 = n$ à gauche, la quantité $(2n^4)x + (n - 2n^5)$ tend vers n ; donc ϕ_n est continue en $x_0 = n$. Il est clair que ϕ_n est continue à droite en a. Pour x suffisamment proche et à gauche de a, $\phi_n(x) = 0$ et donc quand x tend vers a à gauche, $\phi_n(x)$ tend vers 0 qui est précisément la valeur de ϕ_n en a donnée par son expression dans l'intervalle $[n - \frac{1}{2n^3}, n[$. Ceci montre que ϕ_n est continue à gauche en a ; donc ϕ_n est continue en a. De la même manière on peut montrer que ϕ_n est continue en b. Par suite ϕ_n est continue partout.

Soit $x \in [0, +\infty[$. Alors il existe $\ell \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in [0, \ell + \frac{1}{2\ell^3}]$; la fonction f coïncide sur l'intervalle $[0, \ell + \frac{1}{2\ell^3}]$ avec la fonction $\phi_1 + \cdots + \phi_\ell$ qui est continue car somme finie de fonctions continues. On en conclut que f est continue en x et donc f est continue sur $[0, +\infty[$. □

2 - Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $f_{k+1} = f_k + \phi_{k+1}$. Comme $\phi_{k+1} \geq 0$, $f_k \leq f_{k+1}$ et donc la suite (f_k) est croissante. Soit $x \in [0, +\infty[$. Alors, pour tout $k \geq x + 1$, $f_k(x) = f(x)$. Donc $f_k(x)$ tend en croissant vers $f(x)$. □

3 - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit Δ_n le triangle dont les sommets sont les points $M_n = (n - \frac{1}{2n^3}, 0)$, $N_n = (n + \frac{1}{2n^3}, 0)$ et $L_n = (n, n)$; alors Δ_n est isocèle de base M_nN_n mesurant $\frac{1}{n^3}$ et de hauteur mesurant n. Un simple regard sur le graphe de la fonction f_k donne :

$$\int_{[0,+\infty[} f_k d\lambda = \int_0^{k+\frac{1}{2k^3}} f_k(x)dx = \sum_{n=1}^{k} \text{aire}(\Delta_n) = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2}n \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2}.$$

Comme f_k est une fonction positive et que la suite (f_k) tend en croissant vers f, on a :

$$\int_{[0,+\infty[} f d\lambda = \lim_{k\to+\infty} \int_{[0,+\infty[} f_k d\lambda = \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

□

4 - Une fonction $\psi : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue et intégrable n'est pas nécessairement bornée comme le montre l'exemple de la fonction f qu'on vient d'examiner : pour $x = n$, $f(x) = n$; f prend donc des valeurs arbitrairement grandes ! □

CONTENU DU PROGRAMME

I. Espaces mesurables

1. Algèbres de Boole et tribus
2. Applications mesurables

II. Espaces mesurés

1. Notion de mesure
2. La mesure de Lebesgue
3. Propriétés vérifiées presque partout

III. Intégrale de Lebesgue

1. Construction de l'intégrale
2. Théorème de la convergence dominée et ses applications

IV. Mesure produit. Mesures images. Densités

1. Théorème de Fubini
2. Théorème de transfert. Formule de changement de variable
3. Densités et théorème de Radon-Nikodym

V. Volume des boules et des sphères

1. Volume de la boule $\mathbb{B}^n$
2. Volume de la sphère $\mathbb{S}^n$

Références

[Ek] El Kacimi, A. *Éléments d'intégration et d'analyse fonctionnelle.* Mathématiques pour le 2ème cycle, Ellipses (1999).

[Ga] Gapaillard, J. *Intégration pour la Licence.* Editions Masson (1997).

[Gr] Gramain, A. *Intégration.* Collection Méthodes, Hermann (1994).