

# Sur les suites des descendants d'un polygone

par

AZIZ EL KACIMI ALAOU ET ABDELLATIF ZEGGAR

(Janvier 2024)

## Résumé

Soient  $\mathcal{P} = [A_1, \dots, A_n]$  un  $n$ -polygone (avec  $n \geq 4$ ) du plan euclidien  $\mathbb{E}$  et  $\lambda$  un réel dans l'intervalle  $]0, 1[$ . On note  $\mathcal{P}_1 = [A'_1, \dots, A'_n]$  le  $n$ -polygone dont les sommets  $A'_1, \dots, A'_n$  sont les  $\lambda$ -barycentres  $A'_k = (1-\lambda)A_k + \lambda A_{k+1}$ , avec  $1 \leq k \leq n$  et  $A_{n+1} = A_1$ ; on dira que  $\mathcal{P}_1$  est le *premier*  $\lambda$ -descendant de  $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}$ . On itère ce processus; à l'étape  $q \geq 1$  on obtient le  $q^{\text{ème}}$   $\lambda$ -descendant  $\mathcal{P}_q$  de  $\mathcal{P}$ . On définit ainsi une suite  $\{\mathcal{P}_q\}$  de  $n$ -polygones qu'on appelle la suite des  $\lambda$ -descendant de  $\mathcal{P}$ .

Dans ce papier : (I) on donne une généralisation du théorème de Varignon à n'importe quel polygone pair et pondéré; (II) on montre que, pour tout  $n$  pair et pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un rang  $q_\varepsilon$  tel que, pour tout  $q \geq q_\varepsilon$ ,  $\mathcal{P}_q$  est  $\varepsilon$ -multiparallélogramme, c'est-à-dire  $\varepsilon$ -proche d'un *multiparallélogramme* ( $n$ -polygone pair ayant un centre de symétrie).

## 1 Polygones et Multiparallélogrammes

Dans tout ce qui suit  $\mathbb{E}$  sera le plan affine euclidien. Si  $A$  et  $B$  sont deux points de  $\mathbb{E}$ ,  $[A, B]$  sera le segment d'extrémités  $A$  et  $B$  donné par  $[A, B] = \{(1-t)A + tB : t \in [0, 1]\}$ . Sa *longueur*  $AB$  est la norme  $\|\overrightarrow{AB}\|$  du vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .

### 1.1 Définitions

Pour tout nombre entier  $n \geq 3$ , on appellera *n-polygone* (on dit aussi *n-gone* ou encore polygone d'ordre  $n$ ) de  $\mathbb{E}$ , tout ensemble  $\{[A_1, A_2], [A_2, A_3], \dots, [A_n, A_1]\}$  (ligne brisée décrite dans cet ordre) constitué de segments  $[A_1, A_2], [A_2, A_3], \dots, [A_n, A_1]$  de  $\mathbb{E}$ . Ici les points  $A_1, \dots, A_n$  sont supposés distincts deux à deux.

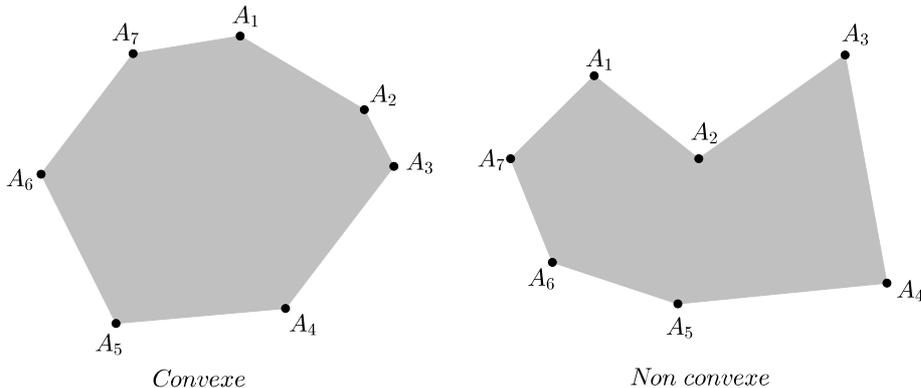
Un tel ensemble sera noté  $[A_1, \dots, A_n]$ . On dira que  $[A_1, \dots, A_n]$  est *pair* (resp. *impair*) si  $n$  est pair (resp. impair).

**1.1.1.** Pour tout entier relatif  $p$ , on posera  $A_p = A_k$  où  $k$  est le reste de la division euclidienne de  $p$  par  $n$  ( $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ). En particulier,  $A_{n+1} = A_1$ .

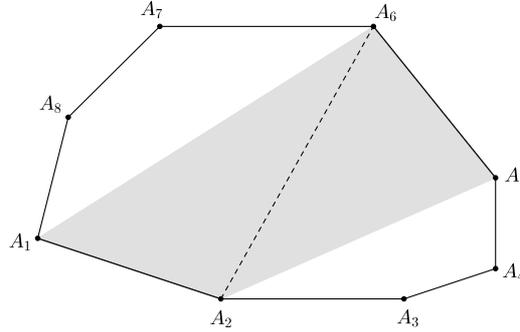
**1.1.2.** Il est bien connu qu'un 3-polygone, un 4-polygone, un 5-polygone, un 6-polygone... sont appelés respectivement *triangle*, *quadrilatère*, *pentagone*, *hexagone*...

**1.1.3.** Les points  $A_k$  et les segments  $[A_k, A_{k+1}]$  sont respectivement les *sommets* et les *côtés* (ou *arêtes*) du  $n$ -polygone  $[A_1, \dots, A_n]$ . Si  $A_i$  et  $A_j$  sont deux sommets non consécutifs (*i.e.*  $|i-j| \neq 1$ ), on dit que le segment  $[A_i, A_j]$  est une *diagonale* du polygone.

**1.1.4.** Le polygone  $[A_1, \dots, A_n]$  sera dit *convexe* si, pour chaque côté  $[A_k, A_{k+1}]$ , l'un des deux demi-plans fermés de frontière la droite  $(A_k A_{k+1})$  contient tous les sommets du polygones.



**1.1.5.** Soit  $[A_1, \dots, A_n]$  un  $n$ -polygone pair avec  $n = 2r$ . Les deux sommets  $A_k$  et  $A_{k+r}$  seront dits *sommets opposés*. De même, les deux segments  $[A_i, A_j]$  et  $[A_{i+r}, A_{j+r}]$  seront appelés *segments opposés*. Une diagonale du type  $[A_k, A_{k+r}]$  sera appelée *diagonale principale*. Un quadrilatère du type  $[A_k, A_{k+1}, A_{k+r}, A_{k+r+1}]$ , avec  $1 \leq k \leq r$ , sera appelé *quadrilatère principal*.



Dans cet octogone  $A_2A_6$  est une diagonale principale et  $A_1A_2A_5A_6$  est un quadrilatère principal

Rappelons qu'un *parallélogramme* est un quadrilatère  $[A, B, C, D]$  tel que les diagonales  $[A, C]$  et  $[B, D]$  ont le même milieu. Cette condition est équivalente à l'égalité vectorielle  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{0}$ .

**1.1.6.** On appellera *multipartallélogramme*, tout polygone pair dont tous les quadrilatères principaux sont des parallélogrammes. Par exemple tout polygone régulier pair est un multipartallélogramme.

## 1.2 Proposition

Un polygone  $[A_1, \dots, A_{2r}]$  est un multipartallélogramme si, et seulement si, il existe une symétrie centrale qui envoie  $A_k$  sur  $A_{k+r}$  pour  $k = 1, \dots, r$ .

**Preuve.** Si  $[A_1, \dots, A_{2r}]$  est un multipartallélogramme, pour tout indice  $k \in \{1, \dots, r\}$  les diagonales principales  $[A_k, A_{k+r}]$  ont le même milieu  $O$ . Donc pour tout  $k \in \{1, \dots, r\}$ ,  $A_{k+r}$  est le symétrique de  $A_k$  par rapport au point  $O$ ; celui-ci est donc un centre (l'unique d'ailleurs) de symétrie de  $[A_1, \dots, A_{2r}]$ .

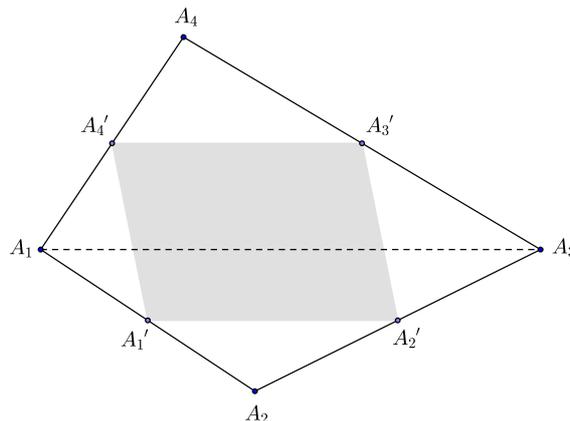
Réciproquement, si  $[A_1, \dots, A_{2r}]$  a un centre de symétrie  $O$ , tel que les sommets  $A_{r+1}, \dots, A_{2r}$  sont respectivement les symétriques des sommets  $A_1, \dots, A_r$ , alors les diagonales principales  $[A_k, A_{k+r}]$  ont le point  $O$  comme milieu commun et donc le polygone  $[A_1, \dots, A_{2r}]$  est un multipartallélogramme.  $\square$

## 1.3 Le théorème classique de Varignon

Soient  $[A_1, A_2, A_3, A_4]$  un quadrilatère quelconque et soient  $A'_1, A'_2, A'_3$  et  $A'_4$  les milieux respectifs des cotés  $[A_1, A_2]$ ,  $[A_2, A_3]$ ,  $[A_3, A_4]$  et  $[A_4, A_1]$ . Alors  $[A'_1, A'_2, A'_3, A'_4]$  est un parallélogramme.

La démonstration est presque immédiate comme on va le voir, mais ceci n'enlève rien à la beauté et à l'intérêt géométrique de ce théorème.

**Preuve.** D'après le théorème de Thalès, le segment  $[A'_1, A'_2]$  est parallèle au segment  $[A_1, A_3]$  et sa longueur vaut la moitié de ce dernier. De façon analogue, il en est de même pour le segment  $[A'_4, A'_3]$ . On en déduit que  $[A'_1, A'_2]$  et  $[A'_4, A'_3]$  sont parallèles et égaux, c'est-à-dire  $[A'_1, A'_2, A'_3, A'_4]$  est un parallélogramme.  $\square$



Mais voici une deuxième preuve à l'aide des barycentres; nous la mimerons pour donner une généralisation de ce théorème au cas d'un polygone quelconque.

Pour prouver que le quadrilatère  $[A'_1, A'_2, A'_3, A'_4]$  est un parallélogramme, nous nous servons de l'associativité des barycentres. En effet, si  $O = \text{Bar}\{(A_1, 1), (A_2, 1), (A_3, 1), (A_4, 1)\}$  est l'isobarycentre des sommets  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$  alors :

$$O = \text{Bar}\{(A'_1, 2), (A'_3, 2)\} = \text{Bar}\{(A'_1, 1), (A'_3, 1)\} \text{ et } O = \text{Bar}\{(A'_2, 2), (A'_4, 2)\} = \text{Bar}\{(A'_2, 1), (A'_4, 1)\}.$$

Les diagonales  $[A'_1, A'_3]$  et  $[A'_2, A'_4]$  ont donc le même milieu  $O$ . Ce qui prouve que  $[A'_1, A'_2, A'_3, A'_4]$  est bien un parallélogramme.  $\square$

Comme nous l'avons déjà annoncé, voici une généralisation du théorème de Varignon. Elle a la forme qui suit. Pour la preuve, nous utiliserons l'associativité des barycentres comme ce que nous avons fait dans le cas d'un quadrilatère.

## 2 Généralisation du théorème de Varignon

### 2.1 Le cas d'un quadrilatère

Soient  $[A_1, A_2, A_3, A_4]$  un quadrilatère quelconque et  $\lambda$  un nombre réel dans l'intervalle  $]0, 1[$ . On associe à chacun des deux côtés opposés  $[A_1, A_2]$  et  $[A_3, A_4]$  leurs  $\lambda$ -barycentres respectifs

$$A'_1 = (1 - \lambda)A_1 + \lambda A_2 \text{ et } A'_3 = (1 - \lambda)A_3 + \lambda A_4.$$

De même, On associe à chacun des deux autres côtés opposés  $[A_2, A_3]$  et  $[A_4, A_1]$  leurs  $(1 - \lambda)$ -barycentres respectifs

$$A'_2 = \lambda A_2 + (1 - \lambda)A_3 \text{ et } A'_4 = \lambda A_4 + (1 - \lambda)A_1.$$

Le quadrilatère  $[A'_1, A'_2, A'_3, A'_4]$  ainsi obtenu est un parallélogramme.

**Preuve.** Soit le barycentre  $O = \text{Bar}\{(A_1, (1 - \lambda)), (A_2, \lambda), (A_3, (1 - \lambda)), (A_4, \lambda)\}$ . Alors l'associativité des barycentres permet d'obtenir :

$$O = \text{Bar}\{(A'_1, 1), (A'_3, 1)\} \text{ et } O = \text{Bar}\{(A'_2, 1), (A'_4, 1)\}.$$

Le point  $O$  est donc le milieu commun des deux diagonales  $[A'_1, A'_3]$  et  $[A'_2, A'_4]$  du quadrilatère  $[A'_1, A'_2, A'_3, A'_4]$ . Ce qui prouve que ce dernier est bien un parallélogramme.  $\square$

Ce résultat généralise le théorème classique de Varignon rappelé dans la section précédente. Ce dernier correspond au cas où  $\lambda = \frac{1}{2}$ .

Comme nous l'avons déjà annoncé, voici une généralisation du théorème de Varignon à un polygone d'ordre pair plus grand ou égal à 4. Elle a la forme qui suit. Pour la preuve, nous utiliserons l'associativité des barycentres comme ce que nous avons fait dans le cas d'un quadrilatère.

### 2.2 Théorème principal I (Le cas général d'un polygone pair)

Soient  $[A_1, \dots, A_{2r}]$  un polygone pair et  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  un  $r$ -uplet d'éléments de l'intervalle  $]0, 1[$  tels que  $\lambda_1 + \dots + \lambda_r = 1$ . On pose  $\lambda_{j+r} = \lambda_j$ , pour  $1 \leq j \leq r$ , et on associe à chaque sommet  $A_k$  le barycentre  $G_k = \text{Bar}\{(A_k, \lambda_k), \dots, (A_{k+r-1}, \lambda_{k+r-1})\}$ . Alors le polygone  $[G_1, \dots, G_{2r}]$  est un multiparallélogramme.

**Preuve.** On doit prouver que toutes les diagonales principales  $[G_k, G_{k+r}]$  du polygone  $[G_1, \dots, G_{2r}]$  ont le même milieu. Considérons le barycentre  $G = \text{Bar}\{(A_1, \lambda_1), \dots, (A_{2r}, \lambda_{2r})\}$ . Les deux ensembles de points pondérés (où on a posé  $A_{k+2r-1} = A_{k-1}$ ) :

$$\Gamma_k = \{(A_k, \lambda_k), \dots, (A_{k+r-1}, \lambda_{k+r-1})\} \text{ et } \Gamma'_k = \{(A_{k+r}, \lambda_{k+r}), \dots, (A_{k+2r-1}, \lambda_{k+2r-1})\}.$$

forment une partition de l'ensemble des sommets pondérés  $\Gamma = \{(A_1, \lambda_1), \dots, (A_{2r}, \lambda_{2r})\}$ . De plus,  $\Gamma_k$ , ayant un poids total égal à 1, a pour barycentre le point  $G_k$  et  $\Gamma'_k$ , ayant également un poids total égal

à 1, admet pour barycentre le point  $G_{k+r}$ . La règle d'associativité des barycentres permet donc d'avoir la relation :

$$G = \text{Bar}\{(G_k, 1), (G_{k+r}, 1)\}.$$

Toutes les diagonales principales  $[G_k, G_{k+r}]$  ont donc le point  $G$  comme milieu commun. Ce qui prouve que le polygone  $[G_1, \dots, G_{2r}]$  est bien un multiparallélogramme.  $\square$

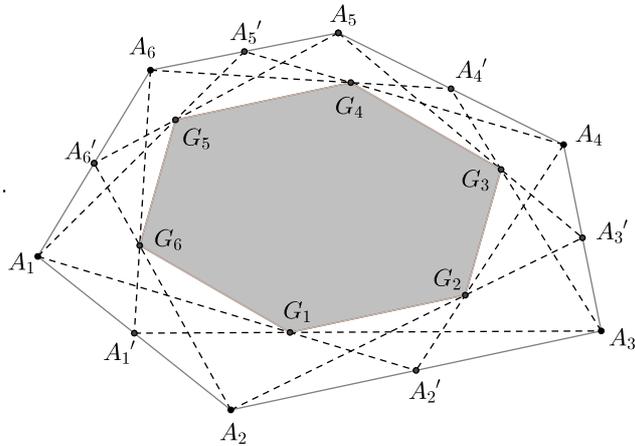
Le nombre de sommets est  $2 \times 3$ .

Pour  $k = 1, \dots, 6$ ,  $A'_k$  est le milieu de  $[A_k A_{k+1}]$ .

Donc  $G_k$  est l'isobarycentre de  $A_k, A_{k+1}, A_{k+2}$ .

On obtient ainsi l'hexagone  $[G_1, \dots, G_6]$

dont on voit clairement que c'est un multiparallélogramme.



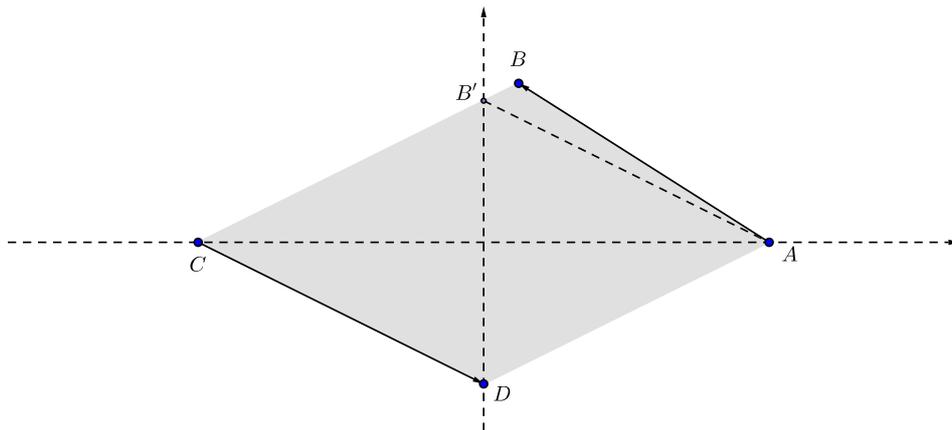
### 3 Les $\varepsilon$ -multiparallélogrammes

#### 3.1 Définitions

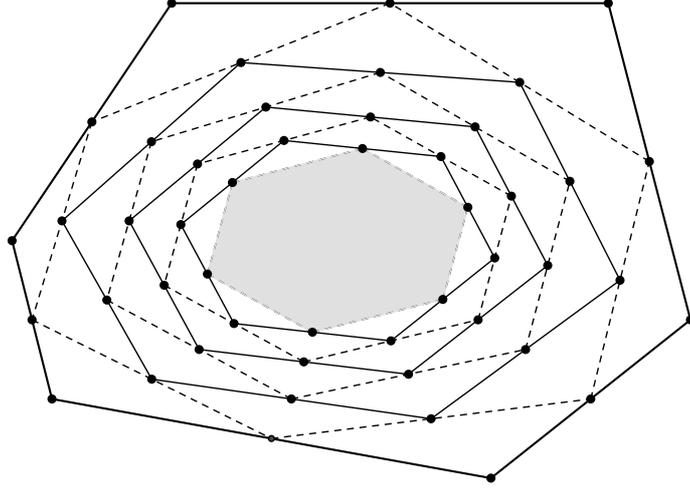
Soit  $\varepsilon$  un nombre réel strictement positif. Un quadrilatère  $[A, B, C, D]$  sera appelé  $\varepsilon$ -parallélogramme si  $\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\| \leq \varepsilon$ . De même, un polygone pair  $[A_1, \dots, A_{2r}]$  sera appelé  $\varepsilon$ -multiparallélogramme si tous ses quadrilatères principaux  $[A_k, A_{k+1}, A_{k+r}, A_{k+r+1}]$  ( $1 \leq k \leq r$ ) sont des  $\varepsilon$ -parallélogrammes.

#### 3.2 Exemple

Si on munit  $\mathbb{E}$  d'un repère cartésien orthonormé, les points  $A(2, 0)$ ,  $B\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)$ ,  $C(-2, 0)$  et  $D(0, -1)$  sont tels que  $\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\| = \varepsilon$ . Le quadrilatère  $[A, B, C, D]$  est donc un  $\varepsilon$ -parallélogramme.



Considérons maintenant un polygone pair quelconque  $\mathcal{P} = [A_1, \dots, A_{2r}]$ . Pour un nombre réel  $\lambda$  fixé dans l'intervalle  $]0, 1[$ , on peut considérer le polygone  $\mathcal{P}' = [A'_1, \dots, A'_{2r}]$  tel que pour chaque indice  $k$ , le sommet  $A'_k$  est le  $\lambda$ -barycentre  $(1 - \lambda)A_k + \lambda A_{k+1}$ ; c'est le *premier  $\lambda$ -descendant* de  $\mathcal{P}$ . En itérant cette opération de passage aux  $\lambda$ -barycentres, on définit une suite de polygones  $\mathcal{P}_q = [A_{q,1}, \dots, A_{q,2r}]$  par :  $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}_{q+1} = \mathcal{P}'_q$  pour tout  $q \in \mathbb{N}$ . C'est la suite des  $\lambda$ -descendants de  $\mathcal{P}$ . En voici une image avec  $\lambda = \frac{1}{2}$ ;



Le dessin suggère que lorsque  $q$  est suffisamment grand, le  $q^{\text{ème}}$   $\lambda$ -descendant de  $\mathcal{P}$  a l'aspect d'un multiparallélogramme. C'est effectivement le cas et ce qu'exprime le théorème qui suit.

### 3.3 Théorème principal II

Soit  $\lambda$  un nombre réel dans l'intervalle  $]0, 1[$ . Pour tout nombre réel  $\varepsilon > 0$ , il existe un rang  $q_\varepsilon$  tel que, pour tout  $q \geq q_\varepsilon$ , le  $q^{\text{ème}}$   $\lambda$ -descendant  $\mathcal{P}_q$  de  $\mathcal{P}$  est un  $\varepsilon$ -multiparallélogramme.

(Certains auteurs ont étudié indépendamment le cas particulier  $\lambda = \frac{1}{2}$  par des méthodes légèrement différentes. On les trouve sur le net en googlant simplement par mots clés. Par exemple la référence [2].)

**Preuve du théorème.** Pour chaque rang  $q \in \mathbb{N}$ , on considère le  $r$ -uplet  $\mathcal{V}_q = (v_{q,1}, \dots, v_{q,r})$  de  $\mathbb{E}^r$  défini par :

$$v_{q,k} = \overrightarrow{A_{q,k}A_{q,k+1}} + \overrightarrow{A_{q,k+r}A_{q,k+r+1}} \text{ pour } k \in \{1, \dots, r\}.$$

Autrement dit, les composantes de  $\mathcal{V}_q$  sont les vecteurs  $\overrightarrow{A_{q,k}A_{q,k+1}} + \overrightarrow{A_{q,k+r}A_{q,k+r+1}}$  des quadrilatères principaux  $[A_{q,k}, A_{q,k+1}, A_{q,k+r}, A_{q,k+r+1}]$  du polygone  $\mathcal{P}_q$ . Nous avons :

$$\sum_{k=1}^r v_{q,k} = \vec{0} \text{ pour tout } q \in \mathbb{N}.$$

En effet, pour chaque rang  $q \in \mathbb{N}$ , avec la relation de Chasles, nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^r v_{q,k} &= \sum_{k=1}^r \overrightarrow{A_{q,k}A_{q,k+1}} + \sum_{k=1}^r \overrightarrow{A_{q,k+r}A_{q,k+r+1}} \\ &= \overrightarrow{A_{q,1}A_{q,r+1}} + \overrightarrow{A_{q,r+1}A_{q,1}} \\ &= \vec{0}. \end{aligned}$$

D'autre part, pour  $q \in \mathbb{N}$  et  $k \in \{1, \dots, r\}$ , nous avons, par définition :

$$A'_{q,k} = (1 - \lambda)A_{q,k} + \lambda A_{q,k+1} \text{ ou encore } \overrightarrow{A_{q,k}A'_{q,k}} = \lambda \overrightarrow{A_{q,k}A_{q,k+1}}.$$

On en déduit que :

$$\overrightarrow{A'_{q,k}A'_{q,k+1}} = \overrightarrow{A'_{q,k}A_{q,k}} + \overrightarrow{A_{q,k}A_{q,k+1}} + \overrightarrow{A_{q,k+1}A'_{q,k+1}} = (1 - \lambda)\overrightarrow{A_{q,k}A_{q,k+1}} + \lambda \overrightarrow{A_{q,k+1}A_{q,k+2}}.$$

$$\begin{aligned} v_{q+1,k} &= \overrightarrow{A'_{q,k}A'_{q,k+1}} + \overrightarrow{A'_{q,k+r}A'_{q,k+r+1}} \\ &= (1 - \lambda)\overrightarrow{A_{q,k}A_{q,k+1}} + \lambda \overrightarrow{A_{q,k+1}A_{q,k+2}} + (1 - \lambda)\overrightarrow{A_{q,k+r}A_{q,k+r+1}} + \lambda \overrightarrow{A_{q,k+r+1}A_{q,k+r+2}} \\ &= (1 - \lambda)\left[\overrightarrow{A_{q,k}A_{q,k+1}} + \overrightarrow{A_{q,k+r}A_{q,k+r+1}}\right] + \lambda\left[\overrightarrow{A_{q,k+1}A_{q,k+2}} + \overrightarrow{A_{q,k+r+1}A_{q,k+r+2}}\right] \\ &= (1 - \lambda)v_{q,k} + \lambda v_{q,k+1}. \end{aligned}$$

Ce qui implique que  $\mathcal{V}_{q+1} = \mathcal{L}(\mathcal{V}_q)$  où  $\mathcal{L}$  est l'endomorphisme  $\mathcal{L} : \mathbb{E}^r \longrightarrow \mathbb{E}^r$  qui à  $Z = (z_1, \dots, z_r)$  associe :

$$\mathcal{L}(Z) = ((1 - \lambda)z_1 + \lambda z_2, (1 - \lambda)z_2 + \lambda z_3, \dots, (1 - \lambda)z_{r-1} + \lambda z_r, (1 - \lambda)z_r + \lambda z_1).$$

Par récurrence, on obtient  $\mathcal{V}_q = \mathcal{L}^q(\mathcal{V}_0)$  pour tout  $q \in \mathbb{N}$ .

En identifiant  $\mathbb{E}$  au plan complexe  $\mathbb{C}$ , on peut considérer la matrice  $\mathcal{M}$  de l'endomorphisme  $\mathcal{L}$  dans la base canonique de l'espace vectoriel complexe  $\mathbb{C}^r$ . Cette matrice est donnée par :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 - \lambda & \lambda \\ \lambda & 0 & \cdots & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Il s'agit d'une matrice circulante de la forme :

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{r-1} \\ a_{r-1} & a_0 & \cdots & a_{r-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}.$$

Il est bien connu (cf. [3]) que le déterminant d'une telle matrice est le nombre complexe  $\det(\mathcal{C})$  donné par :

$$\det(\mathcal{C}) = P(1)P(\omega)P(\omega^2) \cdots P(\omega^{r-1})$$

où  $\omega = e^{\frac{2i\pi}{r}}$  et  $P$  est le polynôme défini par :  $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_{r-1}X^{r-1}$ .

On en déduit que si  $I_r$  est la matrice identité d'ordre  $r$  et  $\mu$  un nombre complexe quelconque, nous avons :

$$\det(\mathcal{C} - \mu I_r) = P_\mu(1)P_\mu(\omega)P_\mu(\omega^2) \cdots P_\mu(\omega^{r-1}) \text{ où } P_\mu(X) = (a_0 - \mu) + a_1X + \cdots + a_{r-1}X^{r-1}.$$

Ce qui implique que les valeurs propres de  $\mathcal{C}$  sont les nombres complexes  $\mu$  vérifiant la relation :

$$P_\mu(1)P_\mu(\omega)P_\mu(\omega^2) \cdots P_\mu(\omega^{r-1}) = 0$$

Dans le cas de la matrice circulante  $\mathcal{M}$  où  $a_0 = 1 - \lambda$ ,  $a_1 = \lambda$  et  $a_j = 0$  pour  $j \in \{2, \dots, r-1\}$ , les valeurs propres sont les nombres complexes  $\mu$  tels que  $P_\mu(\omega^j) = (1 - \lambda - \mu) + \lambda\omega^j = 0$  pour  $j \in \{0, 1, \dots, r-1\}$  i.e. les nombres complexes  $\mu_j = 1 - \lambda + \lambda\omega^j$  pour  $j \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ . Ces valeurs propres étant deux à deux distinctes, la matrice  $\mathcal{M}$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  et on peut donc la décomposer sous la forme :

$$\mathcal{M} = \mathcal{N}^{-1} \times \text{diag}(1, \mu_1, \dots, \mu_{r-1}) \times \mathcal{N} \text{ où } \mathcal{N} \in \text{GL}_r(\mathbb{C}).$$

Ce qui implique que

$$\forall q \in \mathbb{N}, \mathcal{M}^q = \mathcal{N}^{-1} \times \text{diag}(1, \mu_1^q, \dots, \mu_{r-1}^q) \times \mathcal{N} \text{ avec } |\mu_j| = \left| (1 - \lambda) + \lambda e^{\frac{2i\pi j}{r}} \right| < 1 \text{ pour } 1 \leq j \leq r-1$$

En effet :

$$\begin{aligned} |\mu_j|^2 &= \left[ (1 - \lambda) + \lambda \cos \frac{2\pi j}{r} \right]^2 + \lambda^2 \left( \sin \frac{2\pi j}{r} \right)^2 \\ &= (1 - \lambda)^2 + 2(1 - \lambda)\lambda \cos \frac{2\pi j}{r} + \lambda^2 \\ &= 1 - 2(1 - \lambda)\lambda \left( 1 - \cos \frac{2\pi j}{r} \right) \\ &< 1. \end{aligned}$$

La suite matricielle  $(\mathcal{M}^q)_{q \in \mathbb{N}}$  est donc convergente vers la matrice  $\mathcal{M}^* = \mathcal{N}^{-1} \times \text{diag}(1, 0, \dots, 0) \times \mathcal{N}$  et la suite vectorielle  $(\mathcal{V}_q) = (\mathcal{M}^q(\mathcal{V}_0))$  converge vers  $\mathcal{V}_* = \mathcal{M}^*(\mathcal{V}_0)$ . D'autre part, par passage aux limites dans la relation de récurrence  $\mathcal{M}(\mathcal{V}_q) = \mathcal{V}_{q+1}$ , on obtient  $\mathcal{M}(\mathcal{V}_*) = \mathcal{V}_*$ . Ce qui implique que  $\mathcal{V}_*$  est un élément de la droite vectorielle  $\text{Ker}(\mathcal{M} - I_r) = \text{Vect}\{(1, \dots, 1)\}$ . Il existe donc un nombre complexe  $\alpha$  tel que  $\mathcal{V}_* = (\alpha, \dots, \alpha)$ . De plus, si  $\varphi$  est la forme linéaire définie par :

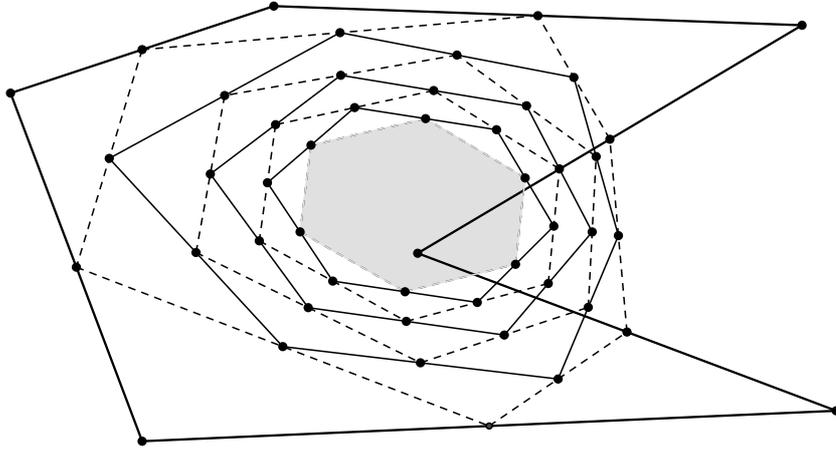
$$\varphi : \mathbb{C}^r \longrightarrow \mathbb{C}, Z = (z_1, \dots, z_r) \longmapsto \varphi(Z) = z_1 + \dots + z_r.$$

on a  $\forall q \in \mathbb{N}, \varphi(\mathcal{V}_q) = 0$ . Donc, en passant à la limite on obtient  $\varphi(\mathcal{V}_*) = 0$  soit  $r\alpha = 0$ . D'où  $\alpha = 0$  et  $\mathcal{V}_* = (0, \dots, 0)$ .

La suite  $(\mathcal{V}_q)$  étant convergente vers  $\mathcal{V}_* = (0, \dots, 0)$ , on en déduit que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un rang  $q_\varepsilon$  tel que  $\|v_{q,k}\| < \varepsilon$  pour  $q \geq q_\varepsilon$  et  $k \in \{1, \dots, r\}$ . Ce qui prouve que  $\mathcal{P}_q$  est un  $\varepsilon$ -multiparallélogramme dès que  $q \geq q_\varepsilon$ .  $\square$

### 3.4 Remarque importante

Le dessin qui suit pourrait laisser penser que, partant d'un polygone non convexe, à partir d'un certain rang  $q$  les descendants sont convexes. Il n'en est pas toujours ainsi comme cela a été démontré dans [1].



## 4 Quelques autres propriétés

### 4.1 Proposition

Soit  $r$  un entier strictement positif. Nous avons les assertions suivantes :

(a) Si  $\mathcal{P} = (A_1, \dots, A_{2r})$  est un  $2r$ -gone qui est un multiparallélogramme, alors pour tout rang  $q$ , le polygone  $\mathcal{P}_q$  est encore multiparallélogramme.

(b) Si  $\mathcal{P} = [A_1, \dots, A_{2r}]$  est un  $2r$ -gone qui n'est pas un multiparallélogramme et si  $r$  est impair, alors il n'existe aucun rang  $q$  tel que  $\mathcal{P}_q$  soit un multiparallélogramme.

**Preuve.** Dire que  $\mathcal{P}_q$  est un multiparallélogramme signifie que  $\mathcal{V}_q = \mathcal{M}^q(\mathcal{V}_0)$  est nul. Autrement dit,  $\mathcal{V}_0 \in \text{Ker}(\mathcal{M}^q)$ . On en déduit que :

(a) Si  $\mathcal{P}$  est un multiparallélogramme, alors  $\mathcal{V}_0 = 0$  et pour tout rang  $q$ ,  $\mathcal{V}_q = \mathcal{M}^q(\mathcal{V}_0) = 0$ . Le polygone  $\mathcal{P}_q$  est donc un multiparallélogramme pour tout rang  $q$ .

(b) Si  $\mathcal{P}$  n'est pas un multiparallélogramme et si  $r$  est impair, alors  $\mathcal{V}_0 \neq 0$  et il n'existe donc aucun rang  $q$  tel que  $\mathcal{V}_q = \mathcal{M}^q(\mathcal{V}_0)$  soit nul. En effet, lorsque  $r$  est impair toutes les valeurs propres  $\mu_j = (1 - \lambda) + \lambda\omega^j$ , avec  $j \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ , sont non nulles. Il n'existe donc aucun rang  $q$  tel que  $\mathcal{P}_q$  soit un multiparallélogramme.  $\square$

## 4.2 Proposition

Soit  $\mathcal{P} = [A_1, \dots, A_{2r}]$  un  $2r$ -gone qui n'est pas un multipartilléogramme. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) Pour tout rang non nul  $q \in \mathbb{N}^*$ , le polygone  $\mathcal{P}_q$  est un multipartilléogramme.
- (b) Il existe un rang non nul  $q \in \mathbb{N}^*$  tel que le polygone  $\mathcal{P}_q$  soit un multipartilléogramme.
- (c)  $r$  est un entier pair et il existe un vecteur non nul  $\vec{\alpha}$  dans  $\mathbb{E}$  tel que :

$$\forall k \in \{1, \dots, r\}, \overrightarrow{A_k A_{k+1}} + \overrightarrow{A_{k+r} A_{k+r+1}} = (-1)^k \vec{\alpha}$$

**Preuve.** Avec l'identification  $\mathbb{E} \simeq \mathbb{C}$  et les notations de la preuve de la proposition précédente, nous allons prouver la suite d'implications (a)  $\implies$  (b)  $\implies$  (c)  $\implies$  (a).

(a)  $\implies$  (b) : est une implication triviale.

(b)  $\implies$  (c) : S'il existe un rang non nul  $q \in \mathbb{N}^*$  tel que le polygone  $\mathcal{P}_q$  soit un multipartilléogramme, alors l'entier  $r$  est pair de la forme  $r = 2s$ , d'après la proposition 4.2, et le vecteur associé  $\mathcal{V}_q = \mathcal{M}^q(\mathcal{V}_0)$  est nul. Ce qui implique que le vecteur non nul  $\mathcal{V}_0 = (v_{0,1}, \dots, v_{0,r})$  est dans le noyau

$$\text{Ker}(\mathcal{M}^q) = \text{Ker}(\mathcal{M}) = \text{Vect}\left\{\underbrace{(-1, 1, \dots, -1, 1)}_{s \text{ fois}}\right\}$$

Il existe donc un scalaire complexe non nul  $\alpha$  tel que  $\mathcal{V}_0 = \alpha \underbrace{(-1, 1, \dots, -1, 1)}_{s \text{ fois}}$ . Soit  $v_{0,k} = (-1)^k \alpha$

pour tout  $k \in \{1, \dots, r\}$  ou encore  $\overrightarrow{A_k A_{k+1}} + \overrightarrow{A_{k+r} A_{k+r+1}} = (-1)^k \vec{\alpha}$ . Ce qui prouve l'assertion (c).

(c)  $\implies$  (a) : Si l'assertion (c) est vraie, alors pour tout rang non nul  $q$ ,  $\mathcal{V}_0 = \alpha \underbrace{(-1, 1, \dots, -1, 1)}_{s \text{ fois}}$  est dans  $\text{Ker}(\mathcal{M}) = \text{Ker}(\mathcal{M}^q)$ . Ce qui implique que  $\forall q \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathcal{V}_q = 0$  et donc que le polygone  $\mathcal{P}_q$  est un multipartilléogramme pour tout rang non nul  $q$ . Ce qui prouve l'assertion (a).  $\square$

Par exemple pour un quadrilatère (un 4-gone)  $\mathcal{P} = [A_1, A_2, A_3, A_4]$  qui n'est pas un paralléogramme, nous avons :

- $\overrightarrow{A_1 A_2} + \overrightarrow{A_3 A_4} = (-1)^1 \vec{\alpha}$  avec  $\vec{\alpha} = -(\overrightarrow{A_1 A_2} + \overrightarrow{A_3 A_4}) \neq \vec{0}$
- $\overrightarrow{A_2 A_3} + \overrightarrow{A_4 A_1} = \overrightarrow{A_2 A_4} + \overrightarrow{A_4 A_3} + \overrightarrow{A_4 A_1} = \overrightarrow{A_2 A_1} + \overrightarrow{A_4 A_3} = (-1)^2 \vec{\alpha}$

sachant que pour le quadrilatère  $\mathcal{P}$ , le quadrilatère des milieux  $\mathcal{P}_1$  est un paralléogramme.

## 4.3 Proposition

Soient  $\mathcal{P} = [A_1, \dots, A_{2r}]$  un  $2r$ -polygone et  $\lambda = \frac{1}{2}$ . Si un quadrilatère  $[A_k, A_{k+2}, A_{k+r}, A_{k+2+r}]$  de  $\mathcal{P}$  n'est pas un paralléogramme, alors pour tout rang  $q \in \mathbb{N}$ , le  $\frac{1}{2}$ -descendant (polygone des milieux)  $\mathcal{P}_q$  n'est pas un multipartilléogramme.

**Preuve.** Supposons que  $\lambda = \frac{1}{2}$  et qu'il existe un quadrilatère  $[A_k, A_{k+2}, A_{k+r}, A_{k+2+r}]$  qui n'est pas un paralléogramme. Alors, dans les triangles  $(A_k, A_{k+1}, A_{k+2})$  et  $(A_{k+r}, A_{k+r+1}, A_{k+r+2})$ , nous avons respectivement

$$\overrightarrow{A'_k A'_{k+1}} = \frac{1}{2} \overrightarrow{A_k A_{k+2}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{A'_{k+r} A'_{k+r+1}} = \frac{1}{2} \overrightarrow{A_{k+r} A_{k+r+2}}$$

Donc  $\overrightarrow{A'_k A'_{k+1}} + \overrightarrow{A'_{k+r} A'_{k+r+1}} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{A_k A_{k+2}} + \overrightarrow{A_{k+r} A_{k+r+2}}) \neq \vec{0}$ . Ce qui implique que le quadrilatère  $[A'_k, A'_{k+1}, A'_{k+r}, A'_{k+r+1}]$  n'est pas un paralléogramme et donc que le polygone des milieux  $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_1$  n'est pas un multipartilléogramme. La proposition précédente permet de conclure que pour tout rang  $q \in \mathbb{N}$ , le polygone des milieux  $\mathcal{P}_q$  n'est pas un multipartilléogramme.  $\square$

## RÉFÉRENCES

- [1] Berlekamp E.R., Gilbert E.N, and F. W. Sinden F.W. *A Polygon Problem*. The American Mathematical Monthly 72, no. 3 (1965) : 233-241.
- [2] Calmès B. *Itération du polygone des milieux*. Prépublication LML, Université d'Artois (Juin 2022).
- [3] Fresnel J. et Matignon, M. *Algèbre et Géométrie - 81 thèmes pour l'agrégation de mathématiques*. Editions Ellipses (2017).

Université Polytechnique Hauts-de-France  
DEMATHS-CERAMATHS  
F-59313 Valenciennes Cedex 9  
France

aziz.elkacimi@uphf.fr  
abdellatif.zeggar@uphf.fr