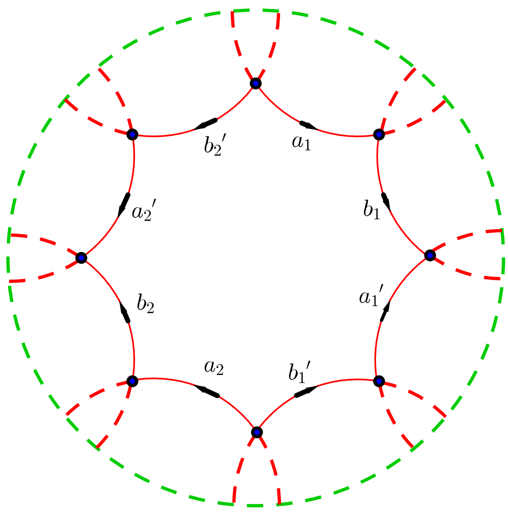
UNIVERSITÉ POLYTECHNIQUE HAUTS-DE-FRANCE

MASTER 1 DE MATHÉMATIQUES
UE : Projet en Mathématiques

par

AZIZ EL KACIMI

Petite introduction à la courbure des surfaces



Le disque hyperbolique et un domaine fondamental
permettant d'obtenir une surface de genre 2.

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2012-2013

CHAPITRE I

SURFACES DIFFÉRENTIABLES

L'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ a une particularité parmi les espaces topologiques : il possède des coordonnées globales (x_1, x_2). Celles-ci permettent d'y faire de l'analyse. Mais d'autres n'ayant aucune structure linéaire se comportent toutefois localement comme $\mathbb{R}^2$; on les appelle *surfaces différentiables.* L'objet de ce chapitre est d'en donner la définition, de décrire certaines de leurs propriétés et les divers objets qui leur sont rattachés.

1. Définitions et exemples

Dans ce paragraphe M sera un espace topologique paracompact *i.e.* M est séparé et tel que tout recouvrement ouvert $\{U_i\}$ admet un recouvrement ouvert $\{V_j\}$ plus *fin* (tout V_j est contenu dans un U_i) et *localement fini* (tout compact ne coupe qu'un nombre fini d'ouverts V_j).

1.1. Définition. *On dira que M est une* **surface topologique** *si tout point $x \in M$ possède un voisinage ouvert U homéomorphe à $\mathbb{R}^2$ i.e. il existe une application bijective $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow U$ telle que φ et son inverse φ^{-1} soient continues.*

Pour connaître un point x de U, il suffit donc de connaître les coordonnées (x_1, x_2) dans $\mathbb{R}^2$ de son image réciproque $\varphi^{-1}(x)$. Pour cette raison, on dira que U est un *ouvert de coordonnées locales* de M au voisinage de x. La paire (U, φ) est appelée *carte locale* et $(x_1, x_2) = \varphi^{-1}(x)$ sont les *coordonnées* de x. Si (U, φ) et (V, ψ) sont deux cartes locales telles que l'intersection $U \cap V$ soit non vide, alors un point $x \in U \cap V$ est repéré par ses coordonnées (x_1, x_2) dans U et ses coordonnées (x'_1, x'_2) dans V. Comme le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \varphi^{-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\varphi} & U \cap V \\ \downarrow & & || \\ \psi^{-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\psi} & U \cap V \end{array}$$

est commutatif, on doit avoir :

$$(x'_1, x'_2) = \psi^{-1} \circ \varphi(x_1, x_2). \tag{I.1}$$

L'application $\psi^{-1} \circ \varphi$ est appelée *changement de coordonnées* de la carte (U, φ) à la carte (V, ψ). Souvent, on a besoin d'une certaine régularité de cette application ; ce qui nous amène à définir la notion de *surface différentiable.* Dorénavant M sera une surface topologique.

1.2. Définition. *Deux cartes locales (U, φ) et (V, ψ) sont dites* **compatibles** *si l'une des conditions suivantes est remplie :*

i) $U \cap V = \emptyset$,

ii) *$U \cap V \neq \emptyset$ et $\psi^{-1} \circ \varphi$ est un difféomorphisme de classe C^∞ ; ceci a un sens car cette application est définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et est à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.*

Un ensemble de cartes locales $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ sur M est appelé *atlas* si $(U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement de M et si deux cartes quelconques (U_i, φ_i) et (U_j, φ_j) sont compatibles.

Deux atlas $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ et $(V_j, \psi_j)_{j\in J}$ sont dits *équivalents* si leur réunion est un atlas *i.e.* pour tout $i \in I$ et tout $j \in J$, les cartes (U_i, φ_i) et (V_j, ψ_j) sont compatibles.

1.3. Définition. *Une classe d'équivalence d'atlas est appelée* **structure différentiable** *sur M. On dira que M est une* **surface différentiable**.

(Pour simplifier, dans toute la suite on dira simplement "surface" au lieu de "surface différentiable".)

Tout ouvert non vide d'une surface est une surface.

Une surface M est dite *orientable* si elle peut être définie à l'aide d'un atlas (U_i, φ_i) pour lequel les difféomorphismes (I.1) préservent l'orientation de $\mathbb{R}^2$: pour $x \in U_i \cap U_j$, le déterminant de l'application linéaire $d\left(\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i\right)(\varphi_i^{-1}(x))$ est strictement positif.

Une surface M est dite *connexe, compacte...* si l'espace topologique sous-jacent M est connexe, compact...

Dans toute la suite de cette section on ne considérera que les surfaces connexes.

1.4. Exemples

Souvent nous ne spécifierons que la manière d'obtenir les cartes. Le lecteur peut vérifier lui-même leur compatibilité. On peut obtenir des exemples de différentes manières. Mais il est clair que le premier est l'espace $\mathbb{R}^2$ lui-même puisqu'il constiue le *modèle local.*

i) Surfaces de $\mathbb{R}^3$

Une application différentiable $U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ (U ouvert de $\mathbb{R}^3$) est dite de *rang constant* si le rang de l'application linéaire $d_xf : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ (différentielle de f au point x) ne dépend pas de x, donc égal à 0 ou 1. On dira que f est une *submersion* si pour tout $x \in U$, d_xf est surjective, donc de rang 1. Pour tout $c \in f(U)$, posons :

$$M = \{x \in U : f(x) = c\}.$$

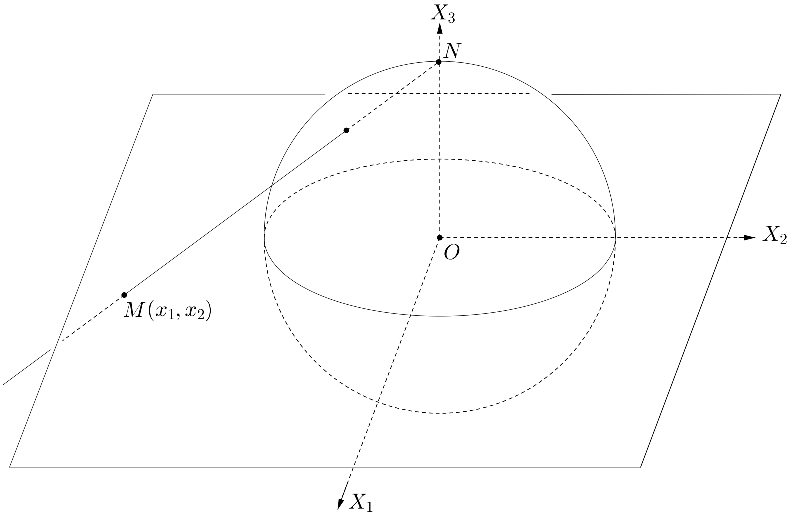
Supposons que f est une submersion. On montre alors, par le *théorème des fonctions implicites* (voir [Ct]), que M est une surface. On dira que f est une *fonction definissant* la surface M.

On appelle *surface* de $\mathbb{R}^3$ toute partie fermée M telle que, pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x et une application différentiable $U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ définissant $M \cap U$.

ii) La sphère $\mathbb{S}^2$

C'est la partie fermée de $\mathbb{R}^3$: $\mathbb{S}^2 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\}$. C'est évidemment une surface de $\mathbb{R}^3$ définie par une submersion ; mais on peut voir aussi sa structure de surface en exhibant explicitement un atlas. Considérons le recouvrement ouvert suivant $U_1 = \mathbb{S}^2 \backslash \{N\}$ et $U_2 = \mathbb{S}^2 \backslash \{S\}$ où N et S sont respectivement le *pôle nord* et le *pôle sud* de la sphère. Alors l'application $\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow U_1 \subset \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\varphi_1(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_1}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{2x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{-1 + x_1^2 + x_2^2}{1 + x_2^2 + x_2^2}\right)$$



est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur U_1. L'application inverse est donnée par :

$$\varphi_1^{-1}(X_1, X_2, X_3) = \left(\frac{X_1}{1 - X_3}, \frac{X_2}{1 - X_3} \right)$$

De même l'application $\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow U_2$ donnée par :

$$\varphi_2(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_1}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{2x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{1 - x_1^2 - x_2^2}{1 + x_2^2 + x_2^2} \right)$$

est aussi un homéomorphisme ; l'inverse $\varphi_2^{-1} : U_2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a pour expression :

$$\varphi_2^{-1}(X_1, X_2, X_3) = \left(\frac{X_1}{1 + X_3}, \frac{X_2}{1 + X_3} \right).$$

L'application de changement de cartes :

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} = \varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$$

s'écrit :

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right)$$

qui est clairement différentiable ainsi que son inverse. Nous avons donc exhibé de façon explicite un atlas de la sphère $\mathbb{S}^2$. Les applications φ_1^{-1} et φ_2^{-1} sont appelées *projections steréographiques* de pôles respectifs N et S.

iii) L'ellipsoïde

Un exemple ressemblant de très près à celui de la sphère. Prenons l'ellipsoïde M de $\mathbb{R}^3$ d'équation : $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1$ où a, b et c sont trois nombres réels strictement positifs. Considérons l'application :

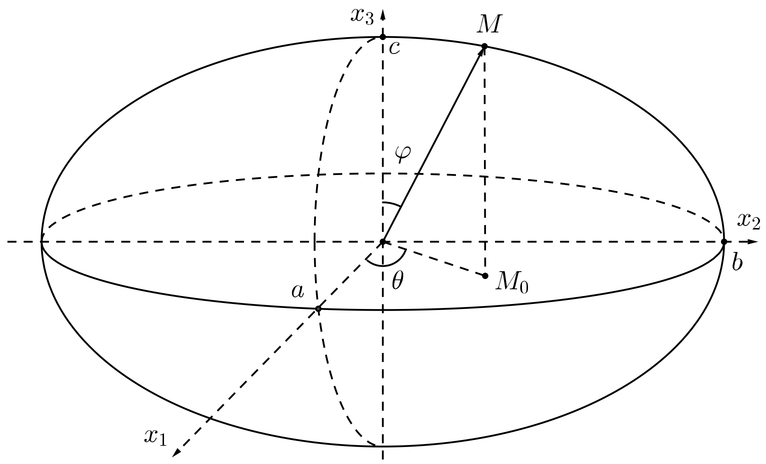
$$f : (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} - 1 \right) \in \mathbb{R}.$$

Elle a pour différentielle au point $x = (x_1, x_2, x_3)$: $d_x f = \left(\frac{2x_1}{a^2}, \frac{2x_2}{b^2}, \frac{2x_3}{c^2}\right)$. Elle est surjective en tout point $(x, y, z) \neq (0,0,0)$ ($(0,0,0)$ ne fait pas partie de M). En vertu du théorème des fonctions implicites, M est une surface différentiable.

Donnons-en une *paramétrisation régulière*, c'est-à-dire une carte locale (ou système de coordonnées locales). Soient L le demi-plan fermé de $\mathbb{R}^3$ défini par $x_2 = 0$ et $x_1 \geq 0$, V l'ouvert $\mathbb{R}^3 \backslash L$ (*i.e.* $\mathbb{R}^3$ privé de L) et $S = M \cap V$; S est un ouvert de M.

On prend $U =]0, 2\pi[\times]0, \pi[$. Le paramétrage de l'ouvert S de la surface M peut être donné, comme dans le cas de la sphère de centre l'origine et de rayon R par l'application suivante :

$$\Phi : (\theta, \varphi) \in U \longmapsto (x_1, x_2, x_3) \in S \quad \text{où} \quad \left\{ \begin{array}{c} x_1 = a \cos\theta \sin\varphi \\ x_2 = b \sin\theta \sin\varphi \\ x_3 = c\cos\varphi. \end{array} \right.$$



L'isomorphisme linéaire $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (ax_1, bx_2, cx_3) \in \mathbb{R}^3$ induit de façon évidente un difféomorphisme $h : \mathbb{S}^2 \longrightarrow M$.

iv) Le plan projectif $P^2(\mathbb{R})$

Nous donnerons d'abord la définition en dimension quelconque. Soit $n \geq 0$ un entier. Sur $\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ on considère la relation d'équivalence $x \sim y$ si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $y = \lambda x$. Le quotient :

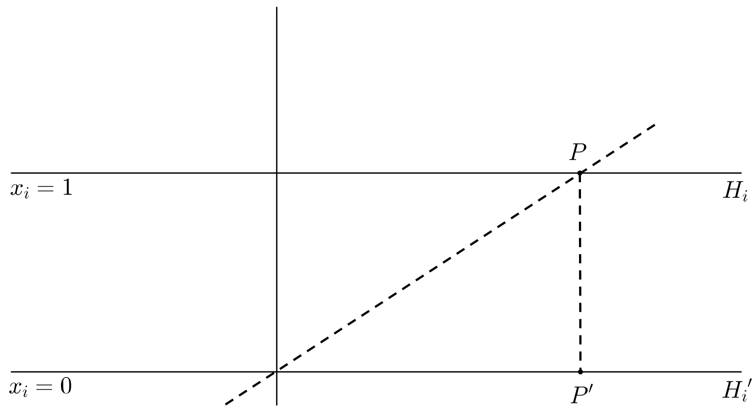
$$P^n(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}) / \sim$$

est l'*espace projectif réel* de dimension n. C'est l'ensemble des droites vectorielles (privées de l'origine) de l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$. Un point x de $P^n(\mathbb{R})$ est représenté par un vecteur non nul de $\mathbb{R}^{n+1}$; les coordonnées $(x_1, \cdots, x_{n+1})$ de ce vecteur donnent donc x ; mais, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $(\lambda x_1, \cdots, \lambda x_{n+1})$ donnent aussi le même point x. Ces coordonnées ne sont donc définies qu'à un facteur multiplicatif près ; on les note $[x_1, \cdots, x_{n+1}]$ et on les appelle *coordonnées homogènes* de x. On note π la projection canonique $\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\} \longrightarrow P^n(\mathbb{R})$. On munit $P^n(\mathbb{R})$ de la *topologie quotient*, c'est-à-dire la topologie $\mathcal{T}$ la plus fine parmi toutes celles qui rendent continue la projection π.

On prend $n = 3$. Pour $i = 1, 2, 3$, on pose $\widetilde{U}_i = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_i \neq 0\}$ et $U_i = \pi(\widetilde{U}_i)$. Les U_i forment un recouvrement ouvert de $P^2(\mathbb{R})$ pour $\mathcal{T}$.

On considère les applications $\varphi_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow U_i$ définies par :

$$\begin{cases} \varphi_1(u,v) = [1,u,v] \\ \varphi_2(u,v) = [u,1,v] \\ \varphi_3(u,v) = [u,v,1]. \end{cases}$$



H_i et H_i' sont les plans d'équations
respectives $x_i = 1$ et $x_i = 0$

Vérifinons la compatibilité entre les cartes. Faisons-le par exemple pour (U_1, φ_1) et (U_2, φ_2) en explicitant $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ qui est une application de $\varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2)$ dans $\varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$. L'élément (u,v) qu'on va prendre dans $\varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^2$ est tel que $u \neq 0$. On a :

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1(u,v) = \varphi_2^{-1}([1,u,v]) = \varphi_2^{-1}\left(\left[\frac{1}{u}, \frac{u}{u}, \frac{v}{u}\right]\right) = \left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right) = (u',v').$$

Ceci montre que le changement de coordonnées $(u',v') = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1(u,v)$ est C^∞ (et même analytique réel). Le recouvrement ouvert $\{U_i\}$ et les applications φ_i forment donc un atlas définissant une structure de surface différentiable sur $P^2(\mathbb{R})$.

Cette surface n'est pas orientable. En effet, la matrice jacobienne de la transformation $(u,v) \longmapsto (u',v')$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u'}{\partial u} & \frac{\partial u'}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial v'}{\partial u} & \frac{\partial v'}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{u^2} & 0 \\ \\ \frac{-v}{u^2} & \frac{1}{u} \end{pmatrix}$$

et a pour déterminant jacobien $-\frac{1}{u^3}$ qui est strictement négatif pour $u > 0$ et strictement positif pour $u < 0$.

2. Applications différentiables

2.1. Définition. *On dira qu'une application $f : M \longrightarrow N$ entre deux surfaces est* ***différentiable*** *au point $x \in M$ si, pour toute carte locale (U, φ) de M contenant x, toute carte locale (V, ψ) de N contenant $f(x)$ et tout voisinage ouvert W de x contenu dans U et tel que $f(W) \subset V$, l'application :*

(I.2) $$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : \varphi^{-1}(W) \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \psi^{-1}(V) \subset \mathbb{R}^2$$

est différentiable au point $\varphi^{-1}(x)$. On dit que f est ***différentiable****, si elle est différentiable en tout point de M.*

En particulier, on dira qu'une fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ est *différentiable* si, pour toute carte locale (U, φ), la fonction :

$$f \circ \varphi : \varphi^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow U \longrightarrow \mathbb{R}$$

est différentiable. La dérivée partielle de $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ sera donc par définition :

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial x_k}(\varphi^{-1}(x)). \tag{I.3}$$

Si l'application f est différentiable, bijective et f^{-1} différentiable, on dira que f est un *difféomorphisme* de M sur N.

On notera $C^\infty(M, N)$ l'ensemble des applications différentiables de M dans N et simplement $C^\infty(M)$ lorsque $N = \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) ; ce dernier est une algèbre pour la multiplication des fonctions. L'ensemble des difféomorphismes d'une surface est un groupe (pour la composition des applications) noté $\mathrm{Diff}(M)$.

2.2. Partition de l'unité.

C'est l'un des instruments les plus puissants en Analyse ; il permet de recoller des objets définis localement en objets globaux.

Soient M une surface et $\rho : M \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction. On appelle *support* de ρ et on note $\mathrm{supp}(\rho)$ l'adhérence de l'ensemble $\{x \in M : \rho(x) \neq 0\}$.

Soit $\mathcal{U} = (U_i)_i$ un recouvrement ouvert de M. On dira que $\mathcal{U}$ est *localement fini* si tout point $x \in M$ possède un voisinage qui ne rencontre qu'un nombre fini d'ouverts de la famille $\mathcal{U}$. Sur une surface (paracompacte comme cela a été supposé avant) un tel recouvrement existe toujours ; on peut même le choisir dénombrable.

Soit $\mathcal{U} = (U_i)_i$ un recouvrement localement fini sur M. On appelle *partition de l'unité subordonnée* à $\mathcal{U}$ une famille de fonctions réelles différentiables positives $(\rho_i)_i$ telles que :

- pour tout $i \in I$, $\mathrm{supp}(\rho_i)$ est contenu dans U_i,
- $\displaystyle\sum_{i \in I} \rho_i = 1$.

Proposition. *Tout recouvrement localement fini $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ admet une partion de l'unité différentiable $(\rho_i)_{i \in I}$.*

3. Espace tangent

Soient M une surface et $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ un atlas définissant M. On a vu qu'une fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable si, pour tout $i \in I$, la fonction :

$$f \circ \varphi_i : \varphi^{-1}(U_i) \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow U_i \longrightarrow \mathbb{R}$$

est différentiable et que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ est donnée par :

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial (f \circ \varphi_i)}{\partial x_k}(\varphi_i^{-1}(x)).$$

Pour tout $k = 1, 2$, on obtient donc un opérateur $\frac{\partial}{\partial x_k}$ qui à toute fonction différentiable f sur U_i associe la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_k}$. En chaque point $x \in U_i$, les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \frac{\partial}{\partial x_2}(x)$ sont linéairement indépendants. Si (U_j, φ_j) est une autre carte locale de système de coordonnées (x'_1, x'_2), un point $x \in U_i \cap U_j$ est repéré par ses coordonnées (x_1, x_2) dans U_i et ses coordonnées (x'_1, x'_2) dans U_j et on a :

$$(x'_1, x'_2) = \varphi_{ij}(x_1, x_2)$$

avec $\varphi_{ij} = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$. Il est alors facile de montrer que, pour tout $k = 1, 2$, on a :

$$\text{(I.4)} \qquad \frac{\partial}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial x'_1}{\partial x_k}(x)\frac{\partial}{\partial x'_1}(x) + \frac{\partial x'_2}{\partial x_k}(x)\frac{\partial}{\partial x'_2}(x).$$

En tout point $x \in M$, les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \frac{\partial}{\partial x_2}(x)$ engendrent donc sur $\mathbb{R}$ un espace vectoriel de dimension 2 indépendant de la carte choisie (U_i, φ_i) pour le définir.

3.1. Définition. *On appelle* **espace tangent** *à M en x, l'espace vectoriel T_xM engendré par les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \frac{\partial}{\partial x_2}(x)$ à l'aide d'une carte quelconque (U_i, φ_i).*

Pour les surfaces M de $\mathbb{R}^3$, on peut percevoir de manière très concrète la notion d'espace tangent. Si M est une surface de $\mathbb{R}^3$ définie localement sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^3$ par une équation du type $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ où $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est C^∞, alors l'espace tangent à M au point $a = (a_1, a_2, a_3)$ est le noyau de la forme affine sur $\mathbb{R}^3$:

$$\text{(I.5)} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \frac{\partial F}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(a)(x_2 - a_2) + \frac{\partial F}{\partial x_3}(a)(x_3 - a_3).$$

Par exemple la sphère $\mathbb{S}^2$ de $\mathbb{R}^3$ est définie par l'équation $F(x_1, x_2, x_3) = 1 - \sum_{k=1}^3 x_k^2 = 0$ et a pour espace tangent au point $a = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ le plan affine de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ d'équation : $x_1 + x_2 + x_3 = \sqrt{3}$.

Pour tout $x \in M$, T_xM est un espace vectoriel réel mais il dépend du point par lequel il "passe". On définit l'ensemble TM comme suit :

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_xM.$$

Un élément de TM est la donnée d'un couple (x, u_x) où x est un point de M et u_x un vecteur de T_xM. On a une projection canonique $\pi : TM \longrightarrow M$ définie par $\pi(x, u_x) = x$.

3.2. Définition. *On appelle* **champ de vecteurs** *sur M toute application $X : M \longrightarrow TM$ telle que, sur toute carte locale (U, φ), X s'écrit $X(x) = f_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1}(x) + f_2(x)\frac{\partial}{\partial x_2}(x)$ où $f_1, f_2 : U \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions C^∞.*

L'ensemble $\mathfrak{X}(M)$ des champs de vecteurs sur M est un module sur l'anneau $C^\infty(M)$ des fonctions de classe C^∞. On peut y définir une structure multiplicative de la façon suivante : soient X et Y deux champs de vecteurs sur M qu'on peut écrire sur la carte locale (U, φ) :

$$X(x) = f_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1}(x) + f_2(x)\frac{\partial}{\partial x_2}(x) \quad \text{et} \quad Y(x) = g_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1}(x) + g_2(x)\frac{\partial}{\partial x_2}(x).$$

Un calcul facile montre que pour toute fonction $h : M \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^∞, on a :

$$X(Y(h)) - Y(X(h)) = \sum_{k,\ell} \left(f_k \frac{\partial g_\ell}{\partial x_k} \frac{\partial h}{\partial x_\ell} - g_\ell \frac{\partial f_k}{\partial x_\ell} \frac{\partial h}{\partial x_k} \right).$$

On définit ainsi un nouveau champ (local) de vecteurs $XY - YX$; on montre que ceci ne dépend pas de la carte choisie ; on obtient alors un champ de vecteurs global $XY - YX$ qu'on note $[X, Y]$ et qu'on appelle *crochet* de X et Y ; $[X, Y]$ est le commutateur de X et Y vus comme opérateurs (*différentiels d'ordre* 1) sur $C^\infty(M)$. On vérifie facilement l'identité suivante dite *identité de Jacobi* :

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [Y, X]] = 0. \tag{I.6}$$

On dira que $(\mathfrak{X}(M), [\ ,\ ])$ est l'*algèbre de Lie* des champs de vecteurs sur M.

3.3. Application tangente

Soit h une application différentiable d'une surface M dans une autre surface N. On supposera que M et N sont définies par les atlas respectifs $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ et $(V_j, \psi_j)_{j\in J}$ et, pour ne pas alourdir les notations, on fera comme si les ouverts de coordonnées U_i et V_j étaient en fait l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$. Pour tout $x \in M$ de coordonnées (x_1, x_2), l'application h définit une application linéaire :

$$d_x h : T_x M \longrightarrow T_{h(x)} N \tag{I.7}$$

qui à tout opérateur $\frac{\partial}{\partial x_k}(x)$, $k = 1, 2$, associe l'opérateur $d_x h \left(\frac{\partial}{\partial x_k}(x) \right)$ donné sur une fonction $f : N \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$d_x h \left(\frac{\partial}{\partial x_k}(x) \right)(f) = \frac{\partial y_1}{\partial x_k}(x) \frac{\partial f}{\partial y_1}(h(x)) + \frac{\partial y_2}{\partial x_k}(x) \frac{\partial f}{\partial y_2}(h(x)) \tag{I.8}$$

où (y_1, y_2) sont les coordonnées du point $h(x)$ pour tout $x \in M$. On peut vérifier que la définition de l'application $d_x h$ ne dépend pas du système de coordonnées locales. On l'appelle *application tangente* à h au point $x \in M$.

4. Formes différentielles

Nous les introduisons d'abord sur un ouvert M de $\mathbb{R}^2$ ensuite nous transposerons la définition au cas général par le biais des cartes locales (U_i, φ_i). Nous verrons aussi comment se transportent les formes différentielles par une application différentiable et comment, en degré maximum, elles définissent des mesures sur une surface.

4.1. Généralités

Soient M un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et r un entier naturel. On note $\Lambda^r \mathbb{R}^2$ l'espace des r-formes extérieures sur $\mathbb{R}^2$ (dont on sait qu'il est réduit à $\{0\}$ pour $r < 0$ et $r > 2$).

Une *forme différentielle de degré* r (ou simplemen *r-forme*) sur M est une application $\alpha : M \longrightarrow \Lambda^r \mathbb{R}^2$ de classe C^∞. Pour chaque $x \in M$, $\alpha(x)$ est une r-forme linéaire alternée sur $\mathbb{R}^2$. L'ensemble des r-formes différentielles sur M est un espace vectoriel réel qu'on notera $\Omega^r(M)$; décrivons-le explicitement pour $r = 0, 1, 2$.

i) Pour $r = 0$, $\Lambda^0\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}$. Les 0-forme sont donc les fonctions C^∞, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$.

ii) Prenons $r = 1$. Soit $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞. On sait qu'en tout point $x = (x_1, x_2) \in M$ la différentielle $d_x f$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ *i.e.* $d_x f$ est un élément de $\Lambda^1\mathbb{R}^2$; elle a pour expression :

$$d_x f = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)dx_2. \tag{I.9}$$

Les 1-formes dx_1, dx_2 sont les différentielles des fonctions coordonnées $x \in M \longmapsto x_k \in \mathbb{R}$ pour $k = 1, 2$. Prises en un point, elles constituent une base de l'espace vectoriel $\Lambda^1\mathbb{R}^2$. Comme une 1-forme α sur M est une application $M \longrightarrow \Lambda^1\mathbb{R}^2$, elle s'écrit sous la forme $\alpha = \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2$ où α_1 et α_2 sont des fonction C^∞ sur M.

iii) Prenons $r = 2$. La 2-forme $dx_1 \wedge dx_2$ définit une base de $\Lambda^2\mathbb{R}^2$. Ainsi toute 2-forme différentielle α sur M est du type $\beta = \beta_0 dx_1 \wedge dx_2$ où β_0 est une fonction C^∞ sur M.

On pose $\Omega^*(M) = \Omega^0(M) \oplus \Omega^1(M) \oplus \Omega^2(M)$. C'est un espace vectoriel réel qui possède en plus une structure de module sur l'algèbre $C^\infty(M)$ des fonctions C^∞. Le produit $f\omega$ d'une r-forme ω par une fonction f s'étend aux formes de degré supérieur ou égal à 1. On le définit comme suit :

$$\alpha \wedge \beta = (\alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2) \wedge (\beta_1 dx_1 + \beta_2 dx_2) = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)dx_1 \wedge dx_2.$$

Bien sûr, on a $\alpha \wedge \beta = 0$ lorsque $\text{degré}(\alpha) + \text{degré}(\beta) \geq 3$. On peut vérifier facilement que

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{rs}\beta \wedge \alpha \qquad \text{et} \qquad \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma.$$

L'espace $\Omega^*(M)$ est ainsi muni d'une structure d'*algèbre graduée anticommutative.*

4.2. Effet d'une application différentiable

Soient M et N deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi : M \longrightarrow N$ une application C^∞. Alors pour tout point $x \in M$, la différentielle $d_x\varphi$ est une application linéaire de l'espace $\mathbb{R}^2$ dans lui-même. Pour tout $r \in \mathbb{N}$, elle induit une application linéaire :

$$\varphi^* : \Omega^r(N) \longrightarrow \Omega^r(M)$$

définie pour toute r-forme β sur N de la façon suivante (l'expression sera donnée suivant les valeurs de r) en $x \in M$:

$$\varphi^*(\beta)(x) = \beta(\varphi(x)), \qquad \varphi^*(\beta)(x)(u) = \beta(\varphi(x))(d_x\varphi(u))$$

si β est une fonction ou une 1-forme. Si c'est une 2-forme, ce sera :

$$\varphi^*(\beta)(x)(u_1, u_2) = \beta(\varphi(x))(d_x\varphi(u_1), d_x\varphi(u_2)).$$

Ici, u, u_1 et u_2 sont des vecteurs tangents à M au point x. On dira que $\varphi^*(\beta)$ est l'*image réciproque* de β par φ.

On peut préciser l'écriture à l'aide des composantes φ_1, φ_2 de φ qui sont des fonctions réelles C^∞ sur M. Notons (x_1, x_2) et (y_1, y_2) les coordonnées respectivement sur M et N.

Pour les fonctions, la situation est claire, faisons-le uniquement pour les 1-formes et les 2-formes.

Pour tout $k = 1, 2$ la composante φ_k n'est rien d'autre que la composée $y_k \circ \varphi$, y_k étant considérée comme la restriction à M de la projection $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto y_k \in \mathbb{R}$. Alors si β a pour écriture :

$$\beta = \beta_1(y_1, y_2)dy_1 + \beta_2(y_1, y_2)dy_2 \quad \text{ou} \quad \beta = h(y_1, y_2)dy_1 \wedge dy_2$$

$\varphi^*(\beta)$ s'écrira sur M : $\varphi^*(\beta) = (\beta_1 \circ \varphi)d\varphi_1 + (\beta_2 \circ \varphi)d\varphi_2$ ou $\varphi^*(\beta) = (h \circ \varphi)d\varphi_1 \wedge d\varphi_2$, c'est-à-dire, en termes de coordonnées (x_1, x_2) :

$$\varphi^*(\beta) = \left(\beta_1 \circ \varphi \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \beta_2 \circ \varphi \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(\beta_1 \circ \varphi \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \beta_2 \circ \varphi \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\right) dx_2$$

ou :

$$\varphi^*(\beta) = h \circ \varphi \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\right) dx_1 \wedge dx_2.$$

Les propriétés essentielles de l'application $\varphi^* : \Omega^r(N) \longrightarrow \Omega^r(M)$ sont les suivantes :

(1) Si φ est l'identité de $M \subset \mathbb{R}^2$, φ^* est l'identité de l'espace $\Omega^r(M)$ pour tout r ; si $M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} L$ sont deux applications C^∞ alors $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$.

(2) Si φ est un difféomorphisme alors φ^* est un isomorphisme entre $\Omega^*(N)$ et $\Omega^*(M)$ tel que $(\varphi^*)^{-1} = (\varphi^{-1})^*$ et vérifiant en plus $\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = \varphi^*(\alpha) \wedge \varphi^*(\beta)$.

Mettons-nous maintenant dans le cas général *i.e.* M n'est plus forcément un ouvert de $\mathbb{R}^2$ mais une surface quelconque définie comme toujours par un atlas $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$. On posera $\varphi_{ij} = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$.

Une *r-forme différentielle* sur M est une collection $\alpha = (\alpha_i)_{i \in I}$ où α_i est une r-forme sur l'ouvert $\varphi_i^{-1}(U_i)$ telle que sur toute intersection non vide $U_i \cap U_j$ on ait la condition de recollement :

$$\alpha_i = \varphi_{ij}^*(\alpha_j). \tag{I.10}$$

L'espace des r-formes différentielles sur M sera toujours noté $\Omega^r(M)$. Toutes les propriétés qu'on vient de donner de l'espace $\Omega^r(M)$ dans le cas M difféomorphe à $\mathbb{R}^2$ se transportent systématiquement au cas où M est une surface.

On conviendra que dorénavant l'écriture dans une carte locale (U, x_1, x_2) d'une r-forme α sur M sera comme celles qu'on a données dans 4.1 :

Une fonction f, une 1-forme $\alpha = \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2$ ou une 2-forme $\beta = h dx_1 \wedge dx_2$.

4.3. Intégration d'une forme volume

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$; la restriction de la mesure de Lebesgue $\lambda = dx_1 \otimes dx_2$ induit une mesure λ sur $\mathcal{O}$. Soient $\mathcal{O}'$ un autre ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}'$ un difféomorphisme de classe C^1. Rappelons d'abord la formule de changement de variable pour l'intégrale de Lebesgue :

Une fonction mesurable $f : \mathcal{O}' \longrightarrow \mathbb{R}$ est λ-intégrable si, et seulement si, la fonction $f \circ \varphi$ est μ-intégrable (μ étant la mesure $|J(\varphi)|\lambda$ et $J(\varphi)$ le déterminant jacobien de φ) et on a en plus $\int_{\mathcal{O}'} f d\lambda = \int_{\mathcal{O}} f \circ \varphi |J(\varphi)| d\lambda$.

Soit maintenant ω une 2-forme différentielle à support compact sur $\mathbb{R}^2$; alors ω s'écrit $\omega = f dx_1 \wedge dx_2$ où f est une fonction à support compact. On définit l'intégrale de ω sur $\mathbb{R}^2$ comme étant le nombre :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \omega = \int_{\mathbb{R}^n} f dx_1 \otimes dx_2.$$

On vérifie facilement que, si $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est un difféomorphisme, alors :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi^* \omega = (\text{signe de } J(\varphi)) \int_{\mathbb{R}^2} \omega.$$

Ceci étant, nous allons préciser quand et comment on peut *intégrer sur une surface* M définie par un atlas $\mathcal{U} = (U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ où U_i est un recouvrement (localement fini de M). *Alors M est orientable si elle vérifie l'une des assertions équivalentes suivantes* :

i) *Les déterminants jacobiens de tous les difféomorphismes de changement de cartes $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$ sont positifs* ;

ii) *Il existe sur M une forme différentielle ω de degré 2 partout non nulle ; ω est appelée* ***forme volume*** *sur M.*

Supposons M connexe orientée par la donnée d'une 2-forme volume ω. Soit $(\rho_i)_{i \in I}$ une partition de l'unité différentiable subordonnée au recouvrement $\mathcal{U}$. Alors la 2-forme $\rho_i \omega$ est à support dans U_i et on a $\omega = \sum_{i \in I} \rho_i \omega$. Le nombre :

$$\sum_{i \in I} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_i^*(\rho_i \omega)$$

(s'il existe) *ne dépend ni du choix de l'atlas* (U_i, φ_i) *ni de la partition de l'unité* (ρ_i). On l'appelle *intégrale de ω sur M* et on note $\int_M \omega$. L'intégrale vérifie les propriétés de linéarité évidentes :

$$\int_M \omega + \tau = \int_M \omega + \int_M \tau \qquad \text{et} \qquad \int_M \lambda \omega = \lambda \int_M \omega \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R}$$

sous réserve, bien sûr, de l'existence de ces différentes quantités.

Ainsi, toute forme volume ω sur M induit une mesure μ sur la surface, définie pour toute fonction f continue à support compact par :

$$\int_M f(x) d\mu(x) = \int_M f\omega.$$

5. Actions de groupes

Nous présentons de manière brève la notion d'action d'un groupe. Elle sert, entre autres, à construire des exemples divers de surfaces.

Soit M une surface munie d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$. Pour tout $x \in M$, on notera $\mathcal{O}_x$ sa classe d'équivalence. Si U est une partie de M, $\mathrm{Sat}(U)$ sera son *saturé i.e.*

$\mathrm{Sat}(A) = \bigcup_{x \in A} \mathcal{O}_x$. On dira que $\mathcal{R}$ est *ouverte* si, pour tout ouvert U de M, $\mathrm{Sat}(U)$ est un ouvert de M. Soient $\mathcal{R}$ une telle relation d'équivalence, $B = M/\mathcal{R}$ le quotient et notons $\pi : M \longrightarrow B$ la projection canonique. On munit B de la *topologie quotient* : V est un ouvert de B si, et seulement si, $\pi^{-1}(V)$ est un ouvert de M. Cette topologie sur B rend la projection π continue.

Soient Γ un groupe dénombrable discret (cela signifie qu'il est muni de la topologie discrète *i.e.* tout singleton $\{\gamma\}$ est un ouvert) et M une surface. On notera $\mathrm{Diff}(M)$ le groupe des difféomorphismes de M.

5.1. Définition. *Une* ***action*** *de* Γ *sur* M *est une application continue* $\Phi : \Gamma \times M \longrightarrow M$ *telle que :*

i) $\Phi(e, x) = x$ *pour tout* $x \in M$*,* e *étant l'élément neutre de* Γ *;*

ii) $\Phi(\gamma\gamma', x) = \Phi(\gamma, \Phi(\gamma', x))$ *pour tous* $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ *et tout point* $x \in M$ *;*

iii) *pour tout* $\gamma \in \Gamma$*, l'application partielle* $\Phi(\gamma, \cdot) : x \in M \longrightarrow \Phi(\gamma, x) \in M$ *est un élément de* $\mathrm{Diff}(M)$.

La donnée d'une action Φ de Γ sur M permet de définir une *représentation* de Γ dans le groupe $\mathrm{Diff}(M)$ *i.e.* un morphisme de groupes $\rho : \gamma \in \Gamma \longmapsto \Phi(\gamma, \cdot) \in \mathrm{Diff}(M)$. Tout élément $\gamma \in \Gamma$ sera confondu avec $\rho(\gamma)$ et pour tout point $x \in M$, $\rho(\gamma)(x) = \Phi(\gamma, x)$ sera noté simplement γx. L'ensemble $\mathcal{O}_x = \{\gamma x \ : \ \gamma \in \Gamma\}$ est appelé *orbite* de x.

i) On dira que $x \in M$ est un *point fixe* de Φ si $\gamma x = x$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. L'ensemble $\mathrm{Fix}(\Phi)$ des points fixes de Φ est un fermé de M.

ii) Pour tout $x \in M$, posons $\Gamma_x = \{\gamma \in \Gamma \ : \ \gamma x = x\}$; alors Γ_x est un sous-groupe de Γ appelé *groupe d'isotropie* de x.

iii) On dira que l'action Φ est *libre* si, pour tout $x \in M$, $\Gamma_x = \{e\}$.

iv) Une partie M_0 de M est dite *invariante* par Φ si, pour tout $x \in M_0$, l'orbite $\mathcal{O}_x$ est entièrement contenue dans M_0.

Toute action Φ de Γ sur M définit une *relation d'équivalence* $\mathcal{R}$:

$$x \,\mathcal{R}\, y \Longleftrightarrow \text{il existe } \gamma \in \Gamma \text{ tel que } y = \gamma x. \tag{I.11}$$

Cette relation d'équivalence est ouverte ; en effet, pour tout ouvert U de M, son saturé :

$$\mathrm{Sat}(U) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma U$$

est un ouvert car, pour tout γ, γU est ouvert puisque γ est un difféomorphisme. On munit $X_\Phi = M/\Phi = M/\mathcal{R}$ de la topologie quotient. On dira que l'action $\Phi : \Gamma \times M \longrightarrow M$ est :

v) *totalement discontinue* si tout point $x \in M$ admet un voisinage ouvert U tel que, pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ distincts, on ait $\gamma_1 U \cap \gamma_2 U = \emptyset$;

vi) *séparante* si tous points $x, y \in M$ non équivalents admettent des voisinages ouverts respectifs U et V tels que, pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, on ait $\gamma_1 U \cap \gamma_2 V = \emptyset$;

vii) *propre* si, pour tout compact $K \subset M$, l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma : \gamma K \cap K \neq \emptyset\}$ est fini.

Si Γ est fini et agit librement, alors il agit de façon séparante et totalement discontinue (démonstration laissée au lecteur).

On dira que deux actions Φ_1 et Φ_2 définies respectivement sur les surfaces M_1 et M_2 sont *conjuguées*, s'il existe un difféomorphisme $h : M_1 \longrightarrow M_2$ tel que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{\Phi_1(\gamma,\cdot)} & M_1 \\ h\downarrow & & \downarrow h \\ M_2 & \xrightarrow{\Phi_2(\gamma,\cdot)} & M_2. \end{array} \tag{I.12}$$

Dans toute la suite de cette section, Γ sera un groupe topologique, dénombrable et discret. Dans ce cas, si Γ agit librement et proprement, il agit de façon séparante et totalement discontinue.

5.2. Proposition. *Soient M une surface et Φ une action libre et propre de Γ sur M. Alors le quotient $X_\Phi = M/\Phi$ est une surface et la projection canonique $\pi : M \longrightarrow X_\Phi$ est un difféomorphisme local i.e. tout point $x \in M$ admet un vosinage ouvert U tel que la restriction $\pi : U \longrightarrow \pi(U)$ soit un difféomorphisme. Si Ψ est une action conjuguée à Φ, les surfaces X_Φ et X_Ψ sont difféomorphes.*

Il est souvent utile de savoir s'il existe une partie d'une surface M (géométriquement intérssante) qui contient le moins possible d'éléments dans chaque orbite. Ceci nous amène à la définition qui suit.

5.3. Définition. *Soit Φ une action libre et propre de Γ sur une surface M. On appelle* ***domaine fondamental*** *de cette action toute partie fermée Δ de M telle que :*

i) L'intérieur $\mathrm{int}(\Delta)$ de Δ est non vide.

ii) La réunion de tous les $\gamma(\Delta)$ (pour γ parcourant Γ) est égale à M.

iii) $\gamma(\mathrm{int}(\Delta)) \cap \mathrm{int}(\Delta) = \emptyset$ pour tout $\gamma \in \Gamma \backslash \{\text{identité}\}$.

iv) La famille $\{\gamma(\mathrm{int}(\Delta)) : \gamma \in \Gamma\}$ est localement finie : un compact ne rencontre qu'un nombre fini de cette famille.

L'ensemble $\partial\Delta = \Delta \backslash \mathrm{int}(\Delta)$ est le *bord* du domaine fondamental ; il est de mesure nulle (pour la mesure canonique de M : celle donnée par la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$ à l'aide des cartes locales). La surface quotient $X = M/\Gamma$ est obtenue à partir de Δ en identifiant les points de $\partial\Delta$ qui sont Γ-équivalents. On admet la :

Proposition. *Toute action libre propre de Γ sur une surface M admet un domaine fondamental. Ce domaine est compact si, et seulement si, $X = M/\Gamma$ l'est.*

5.4. Quelques exemples

i) Soient $M = \mathbb{R}^2$ et $\Gamma = \mathbb{Z}^2$, $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ dont les composantes sont toutes non nulles. On définit une action $\Phi : \Gamma \times M \longrightarrow M$ par $\Phi(q, x) = x + \tau q$ où :

$$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad q = (q_1, q_2) \in \mathbb{Z}^2 \quad \text{et} \quad q\tau = (q_1\tau_1, q_2\tau_2).$$

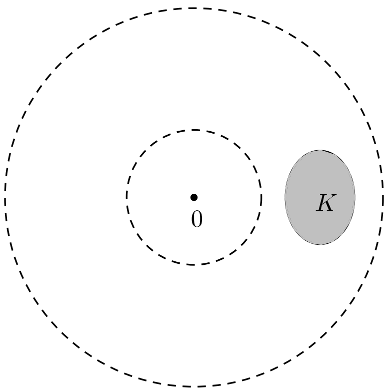
Alors Φ est une action libre et propre ; le quotient M/Γ est une surface. La structure différentiable sur M/Γ ne dépend pas du τ choisi. Cette variété est le tore $\mathbb{T}^2$; elle est obtenue en identifiant deux à deux les côtés opposés d'un parallélogramme (voir sa construction géométrique précise dans Complément 5).

ii) Voici une autre manière de définir le tore $\mathbb{T}^2$. Soient λ tel que $0 < \lambda < 1$ et γ de difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ donné par $\gamma(z) = \lambda z$. L'action de $\Gamma = \langle\gamma\rangle \simeq \mathbb{Z}$ engendrée par γ n'est pas libre puisque γ fixe l'origine 0 mais elle l'est, de façon évidente, sur $\widetilde{M} = \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$. Elle est aussi propre sur $\widetilde{M}$. En effet, soit K un compact de $\widetilde{M}$; alors il existe un entier $n > 0$ tel que K soit contenu dans la couronne ouverte :

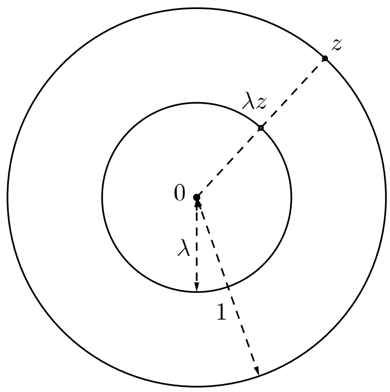
$$C = \{z : \lambda^n < |z| < \lambda^{-n}\}$$

(voir (a) dans le dessin ci-dessous). Il est alors évident que $\lambda^r(K)\cap K = \emptyset$ et $\lambda^{-r}(K)\cap K = \emptyset$ pour tout entier $r > 2n$.

Il n'est pas difficile de voir que la couronne fermée $\Delta = \{z : \lambda \leq |z| \leq 1\}$ est un domaine fondamental de l'action en question. Le quotient $M = \widetilde{M}/\Gamma$ s'obtient en identifiant le point z sur le cercle de rayon 1 au point λz sur le cercle de rayon λ (*cf.* (b)). Naturellement, ce quotient est un tore $\mathbb{T}^2$.



(a)



(b)

iii) Soient M la sphère $\mathbb{S}^2$, ensemble des vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^3$ vérifiant la relation $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ et Γ le groupe multiplicatif $\{1, -1\}$ (qu'on peut aussi identifier au groupe additif $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) ; Γ agit sur $\mathbb{S}^2$ de la façon suivante :

$$\Phi : (\gamma, x) \in \Gamma \times \mathbb{S}^2 \longmapsto \gamma x \in \mathbb{S}^2.$$

L'action Φ est libre et le quotient $\mathbb{S}^2/\Gamma$ est une surface non orientable ; c'est le plan projectif $P^2(\mathbb{R})$ que nous avons défini dans la sous-section 1.4.

6. Courbes complexes

Elles se définissent de la même manière que les surfaces différentiables : la notion de difféomorphisme entre ouverts de $\mathbb{R}^2$ est remplacée par celle d'application biholomorphe entre ouverts de $\mathbb{C}$. Soit M une surface topologique de dimension 2.

6.1. Définition. *On dira que M est une* ***courbe complexe*** *si elle admet un atlas $(U_k, \varphi_k)_{k\in I}$ où, pour tout $k \in I$, φ_k est un homéomorphisme d'un ouvert de $\mathbb{C}$ sur U_k tel que si $U_k \cap U_j \neq \emptyset$ l'homéomorphisme qui suit soit biholomorphe :*

$$\varphi_j \circ \varphi_k : \varphi_k^{-1}(U_k \cap U_j) \subset \mathbb{C} \longrightarrow \varphi_j^{-1}(U_k \cap U_j) \subset \mathbb{C}.$$

Par définition même, toute courbe complexe est munie naturellement d'une structure de surface analytique réelle ; c'est donc a fortiori une surface différentiable.

Toute partie ouverte d'une courbe complexe (en particulier tout ouvert de $\mathbb{C}$) est une courbe complexe.

6.2. Exemples

Ils seront définis de manière presque similaire que pour le cas réel. Evidemment, le premier exemple de courbe complexe est l'espace $\mathbb{C}$.

i) Courbes complexes de $\mathbb{C}^2$

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}^2$, $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et $c \in f(U)$. On note M l'ensemble $\{z \in U : f(z) = c\}$. Supposons qu'en tout point $z = (z_1, z_2)$ de M, la différentielle $d_z f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ (qui est une application $\mathbb{C}$-linéaire) est surjective. *Alors la version complexe du théorème des fonctions implicites montre que M possède une structure de courbe complexe.* On dira que f est une *fonction définissant M.*

Contrairement au cas réel, il existe beaucoup de courbes complexes qui ne peuvent pas être obtenues de cette manière : il n'existe pas de version holomorphe du *théorème de plongement de Whitney.* Par exemple, une courbe complexe compacte M ne peut jamais être plongée (de manière holomorphe bien sûr) dans un $\mathbb{C}^2$ (ni même dans aucun $\mathbb{C}^n$) : en effet, un plongement serait obtenu à l'aide de deux fonctions holomorphes $f_1, f_2 : M \longmapsto \mathbb{C}$ qui seraient donc bornées puisque M est compacte, et par suite constantes d'après le principe du maximum.

ii) La sphère $\mathbb{S}^2$

Reprenons les notations de 1.4. ii). On a deux ouverts $U_1 = \mathbb{S}^2 - \{N\}$ et $U_2 = \mathbb{S}^2 - \{S\}$ et deux applications $\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow U_1 \subset \mathbb{R}^3$ et $\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow U_2 \subset \mathbb{R}^3$ qui, en identifiant $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ et en posant $z = x_1 + ix_2$, peuvent sécrire sous la forme :

$$\varphi_1(z) = \left(\frac{z + \overline{z}}{1 + z\overline{z}}, \frac{i(\overline{z} - z)}{1 + z\overline{z}}, \frac{-1 + z\overline{z}}{1 + z\overline{z}} \right)$$

et :

$$\varphi_2(z) = \left(\frac{z + \overline{z}}{1 + z\overline{z}}, \frac{i(\overline{z} - z)}{1 + z\overline{z}}, \frac{1 - z\overline{z}}{1 + z\overline{z}} \right).$$

Leurs inverses s'écrivent respectivement

$$\varphi_1^{-1}(X_1, X_2, X_3) = \frac{X_1}{1 - X_3} + i\frac{X_2}{1 - X_3}$$

et :

$$\varphi_2^{-1}(X_1, X_2, X_3) = \frac{X_1}{1 + X_3} + i\frac{X_2}{1 + X_3}.$$

On pose $\psi_1 = \varphi_1 \circ *$ où $* : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est la conjugaison complexe et $\psi_2 = \varphi_2$. Il est alors facile de vérifier que l'application :

$$\psi_1^{-1} \circ \psi_2 : \psi_2^{-1}(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C}^* \longrightarrow \psi_1^{-1}(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C}^*$$

s'écrit $\psi_1^{-1} \circ \psi_2(z) = \frac{1}{z}$. C'est une transformation biholomorphe de $\mathbb{C}^*$. L'atlas $(U_k, \psi_k)_{k=1,2}$ munit donc la sphère $\mathbb{S}^2$ d'une structure de courbe complexe.

iii) La droite projective complexe

De manière analogue au cas réel, sur $\mathbb{C}^2\backslash\{0\}$ on considère la relation d'équivalence :

$$z \sim w \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ tel que } w = \lambda z.$$

Le quotient $P^1(\mathbb{C})$ de $\mathbb{C}^2\backslash\{0\}$ par cette relation d'équivalence est appelé *droite projective complexe.* On peut montrer, en suivant exactement la démarche entreprise pour le cas réel, que $P^1(\mathbb{C})$ possède une structure de courbe complexe : il suffit de remplacer tout objet réel par son analogue complexe.

6.3. Applications holomorphes

Soient M et N deux courbes complexes. *On dira qu'une application $f : M \longrightarrow N$ est **holomorphe** au point $z \in M$ si, pour toute carte locale de M, (U, φ) contenant z et toute carte locale (V, ψ) de N contenant $f(z)$ et tout voisinage ouvert W de z contenu dans U et tel que $f(W) \subset V$, l'application :*

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : \varphi^{-1}(W) \subset \mathbb{C} \longrightarrow \psi^{-1}(V) \subset \mathbb{C} \tag{I.13}$$

*est holomorphe au point $\varphi^{-1}(z)$. On dira que f est **holomorphe** si elle est holomorphe en tout point de M.*

Une fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite *holomorphe* si pour toute carte locale (U, φ) la fonction qui suit est holomorphe :

$$f \circ \varphi : \varphi^{-1}(U) \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow U \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Si f est holomorphe, bijective et f^{-1} holomorphe on dira que f est un *biholomorphisme* de M sur N. On dit aussi que M et N sont *biholomorphiquement équivalentes.*

On notera $\mathcal{H}(M, N)$ l'ensemble des applications holomorphes de M dans N et tout simplement $\mathcal{H}(M)$ lorsque $N = \mathbb{C}$; ce dernier est une algèbre pour la multiplication des fonctions. L'ensemble des biholomorphismes (ou automorphismes) d'une courbe complexe est un groupe (pour la composition des applications) noté $\mathrm{Aut}(M)$; c'est bien sûr un sous-groupe de $\mathrm{Diff}(M)$.

Une surface différentiable ou courbe complexe est dite *connexe, compacte etc.* si elle est connexe, compacte *etc.* en tant qu'espace topologique. Par exemple $\mathbb{S}^2$, $P^2(\mathbb{R})$ et $P^1(\mathbb{C})$ sont connexes et compactes.

On dira qu'un groupe Γ (dénombrable, discret) *agit holomorphiquement* sur une courbe complexe M si, pour tout élément $\gamma \in \Gamma$, l'homéomorphisme $z \in M \longmapsto \gamma z \in M$ est un biholomorphisme. La définition de la conjugaison de deux actions se transpose au cas des courbes complexes : on demande à h dans le diagramme (VII.12) d'être biholomorphe et on dira que les actions sont *holomorphiquement conjuguées.* On a une version complexe de la proposition 5.2.

6.4. Proposition. *Soient M une courbe complexe et Φ une action holomorphe, libre et propre de Γ sur M. Alors le quotient $Z_\Phi = M/\Phi$ est une courbe complexe et la projection canonique $\pi : M \longrightarrow Z_\Phi$ est un biholomorphisme local i.e. tout point $z \in M$ admet un vosinage ouvert U tel que la restriction $\pi : U \longrightarrow \pi(U)$ soit un biholomorphisme. Si Ψ est une action holomorphiquement conjuguée à Φ, les courbes complexes Z_Φ et Z_Ψ sont holomorphiquement équivalentes.*

À titre d'exemple, reprenons celui que nous avons donné en 5.4.i). Soient $M = \mathbb{C}$, $\Gamma = \mathbb{Z}^2$ et $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ dont les composantes sont toutes non nulles. On définit une action $\Phi : \Gamma \times M \longrightarrow M$ par $\Phi(q, z) = z + \tau q$ où $z \in \mathbb{C}$, $q = (q_1, q_2) \in \mathbb{Z}^2$ et $q\tau = q_1\tau_1 + iq_2\tau_2$. Alors Φ est une action holomorphe, libre et propre ; le quotient M/Γ est une courbe complexe notée $\mathbb{T}_\tau$ et appelée *courbe elliptique*.

Contrairement au cas réel, la structure complexe de $\mathbb{T}_\tau$ dépend fortement du choix du vecteur $\tau \in \mathbb{R}^2$. Nous développons tout cela dans Complément 5.

CHAPITRE II

SURFACES RIEMANNIENNES

Dans ce chapitre nous introduisons la notion de *métrique riemannienne* sur une surface et le premier élément géométrique qu'elle permet de définir : la *longueur* d'une courbe tracée sur celle-ci. Nous donnons quelques exemples fondamentaux.

1. Métriques riemanniennes

Soit M une surface définie par un atlas $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$. Pour tout $x \in M$, T_xM est un espace vectoriel réel de dimension 2. Soient T_x^*M le dual de T_xM et $T^*M = \bigcup_{x\in M} T_x^*M$. Sur une carte locale (U, φ) de coordonnées (x_1, x_2), $\frac{\partial}{\partial x_1}(x)$ et $\frac{\partial}{\partial x_2}(x)$ sont des vecteurs tangents à M au point x ; notons dx_1 et dx_2 les éléments de T_x^*M définis par :

$$dx_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x)\right) = 1, \quad dx_1\left(\frac{\partial}{\partial x_2}(x)\right) = 0, \quad dx_2\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x)\right) = 0, \quad dx_2\left(\frac{\partial}{\partial x_2}(x)\right) = 1.$$

Rappelons qu'une 1-*forme différentielle* sur M est une application $\omega : M \longrightarrow T^*M$ qui à tout x associe une forme linéaire ω_x sur T_xM de telle sorte que, sur toute carte (U, φ) de coordonnées locales (x_1, x_2), ω s'écrive :

$$\omega(x) = \omega_1(x)dx_1 + \omega_2(x)dx_2$$

où ω_1 et ω_2 sont des fonctions C^∞ sur U.

Soit S^2T_xM l'espace vectoriel réel des *formes bilinéaires symétriques* sur T_xM *i.e.* les applications $\varphi : T_xM \times T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

i) les applications $\varphi(u, \cdot) : v \longrightarrow \varphi(u, v)$ et $\varphi(\cdot, v) : u \longrightarrow \varphi(u, v)$ soient linéaires ;
ii) pour tous $u, v \in T_xM$, $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$.

Tout endomorphisme $\gamma_x : T_xM \longrightarrow T_xM$ induit un endomorphisme de S^2T_xM noté γ_x^* défini par $\gamma_x^*(\varphi)(u, v) = \varphi(\gamma_x(u), \gamma_x(v))$ pour $\varphi \in S^2T_xM$ et $u, v \in T_xM$. Posons :

$$\mathcal{S}^2 = \bigcup_{x\in M} S^2T_xM$$

C'est l'ensemble des couples $(x, g(x))$ où $x \in M$ et $g(x)$ une forme bilinéaire symétrique.

Par exemple, deux 1-formes α et β sur M permettent de définir une 2-forme symétrique sur M notée $\alpha\otimes\beta$ par $(\alpha\otimes\beta)(u, v) = \alpha(x)(u)\beta(x)(v)$ pour $u, v \in T_xM$. On dira que $\alpha\otimes\beta$ est le *produit tensoriel* de α et β.

1.1. Définition. *Une* ***métrique riemannienne*** *sur M est une application $g : M \longrightarrow \mathcal{S}^2$ où, pour tout $x \in M$, $g(x)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive et telle que, sur toute carte (U, φ) de coordonnées locales (x_1, x_2), g s'écrive :*

$$g(x) = g_{11}(x)dx_1 \otimes dx_1 + g_{12}(x)dx_1 \otimes dx_2 + g_{21}(x)dx_2 \otimes dx_1 + g_{22}(x)dx_2 \otimes dx_2$$

où les $g_{k\ell}$ sont des fonctions C^∞ sur U avec $g_{12} = g_{21}$.

Cela signifie que, pour tout $x \in M$, $g(x)$ est un produit scalaire sur T_xM et que la famille $(g(x))_{x\in M}$ varie de manière C^∞ en x. Les fonctions $g_{k\ell}$ sont définies par les formules :

$$g_{k\ell}(x) = g(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_k}(x), \frac{\partial}{\partial x_\ell}(x)\right) \qquad \text{avec} \qquad k, \ell = 1, 2.$$

1.2. Construction de métriques

Nous allons donner une construction explicite des métriques riemanniennes en utilisant la structure différentiable de M décrite à l'aide d'un atlas $\mathcal{U} = (U_i, \varphi_i)_{i\in I}$; ceci montrera en particulier que de tels objets existent toujours. On supposera que le recouvrement $\{U_i\}$ est *localement fini* (*i.e.* tout point de M admet un voisinage compact qui ne rencontre qu'un nombre fini d'ouverts U_i).

Soit (U, φ) un élément de l'atlas $\mathcal{U}$. Pour la structure différentiable usuelle sur $\mathbb{R}^2$, l'homéomorphisme $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow U$ est un difféomorphisme de classe C^∞. Pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, l'application $d_x\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow T_{\varphi(x)}U$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Soit $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$; pour tous $u, v \in T_{\varphi(x)}U$ on pose :

$$g(x)(u, v) = \langle \varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(v)\rangle.$$

Soit (x_1, x_2) un système de coordonnées sur U. Alors en chaque point $x \in U$, g a pour expression :

$$g(x) = \sum_{k,\ell=1}^{2} g_{k\ell}(x) dx_k \otimes dx_\ell \tag{II.1}$$

qui n'est rien d'autre que celle donnée dans la définition 1.1.

Notons g^i la métrique riemannienne sur U_i que l'on vient de construire. Soit $(\rho_i)_{i\in I}$ une partition de l'unité C^∞ subordonnée au recouvrement $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$. Pour tout $x \in M$ on pose :

$$g(x) = \sum_{i\in I} \rho_i(x) g^i(x).$$

Il est facile de vérifier que g ainsi définie est une métrique riemannienne sur M. Une surface M munie d'une métrique riemannienne g est appelée *surface riemannienne* ; elle sera notée (M, g).

1.3. Longueur d'une courbe

On appelle *courbe* dans une surface M toute application γ continue d'un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ dans M ; on dira que γ est C^1 *par morceaux* s'il existe une partition dénombrable de I en intervalles I_n tels que la restriction de γ à l'intérieur de chacun des I_n soit une courbe de classe C^1 et les dérivées à gauche et à droite aux extrémités des I_n existent. On appelle *champ de vecteurs le long d'une courbe* $\gamma : I \longrightarrow M$ toute application différentiable qui à tout $t \in I$ associe un vecteur tangent $X(t) \in T_{\gamma(t)}M$. Par exemple, si γ est différentiable, l'image $d_t\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ du champ canonique $\frac{\partial}{\partial t}$ sur I par la dérivée de γ est un champ de vecteurs le long de γ.

Supposons M munie d'une métrique riemannienne $g = \langle\ ,\ \rangle$ et soit $\gamma : I \longrightarrow M$ une courbe C^1 par morceaux. On appelle *longueur* du segment $\gamma([t_0, t_1])$ le nombre positif :

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left\langle \frac{d\gamma}{dt}(t), \frac{d\gamma}{dt}(t)\right\rangle} dt \tag{II.2}$$

où l'intégrale est, bien entendu, calculée en dehors des points de discontinuité de $\frac{d\gamma}{dt}(t)$.

1.4. Définition. *Soient (M, g) et (N, h) deux surfaces riemanniennes et $\varphi : M \longrightarrow N$ une application de classe C^∞. On dira que :*

*(1) φ est une **isométrie locale** si pour tout point $x \in M$ et tous vecteurs u et v tangents à M en x, on a : $h(y)(d_x\varphi(u), d_x\varphi(v)) = g(x)(u, v)$ où $y = \varphi(x)$. Ceci signifie que l'application linéaire $d_x\varphi : T_xM \longrightarrow T_yN$ est une isométrie. Si en plus φ est bijective on dira que φ est une **isométrie** ;*

*(2) φ est **conforme** s'il existe une fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que, pour tout $x \in M$, on ait : $h(y)(d_x\varphi(u), d_x\varphi(v)) = e^{f(x)} \cdot g(x)(u, v)$. La fonction e^f est appelée **facteur de conformité** de φ.*

Comme on peut le voir facilement, une isométrie est une application conforme de facteur de conformité 1 et une application conforme préserve les angles. L'ensemble $\mathrm{Isom}(M, g)$ des isométries de la surface riemannienne (M, g) est un groupe appelé *groupe des isométries* de (M, g). L'ensemble $\mathrm{Conf}(M, g)$ des transformations bijectives conformes de M est appelé *groupe conforme* de (M, g). On a bien sûr :

$$\mathrm{Isom}(M) \subset \mathrm{Conf}(M) \subset \mathrm{Diff}(M).$$

2. Exemples de surfaces riemanniennes

Nous allons en donner parmi celles dites usuelles car elles sont naturelles et apparaissent souvent en tête des exemples.

2.1. Métrique usuelle sur $\mathbb{R}^2$

Sur $\mathbb{R}^2$ on a une base de champs de vecteurs globaux $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)$. On définit une métrique riemannienne sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$g(x) = dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2. \tag{II.3}$$

Le groupe des isométries $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2, g)$ de cette surface riemannienne n'est rien d'autre que celui des isométries affines de $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1y_1 + x_2y_2$. C'est le produit semi-direct $\mathbb{R}^2 \rtimes \mathrm{O}(2)$ où $\mathbb{R}^2$ est vu comme le groupe des translations et $\mathrm{O}(2)$ est engendré par les rotations de centre l'origine et la réflexion d'axe une droite vectorielle.

2.2. Graphe d'une fonction

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application C^∞. Alors son graphe $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in U \times \mathbb{R} \ : \ x_3 = f(x_1, x_2)\}$ est une surface plongée dans $\mathbb{R}^3$ à l'aide de l'application C^∞ :

$$F : (x_1, x_2) \in U \longrightarrow (x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \in \mathbb{R}^3.$$

Pour tout $x \in U$, les vecteurs $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}$ forment une base de l'espace tangent T_xU. Leurs images par la différentielle d_xF sont les vecteurs de $T_{F(x)}M \subset \mathbb{R}^3$:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(x) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix}$$

Sur $\mathbb{R}^3$ on considère le produit scalaire usuel $\langle\ ,\ \rangle$; on le restreint à chaque espace tangent $T_{F(x)}M$ et on obtient ainsi une métrique riemannienne g sur M. Pour tout $k = 1, 2$ posons $p_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}$. Alors :

$$\langle e_k, e_\ell \rangle = \begin{cases} 1 + p_k^2 & \text{si } k = \ell \\ p_k p_\ell & \text{sinon.} \end{cases}$$

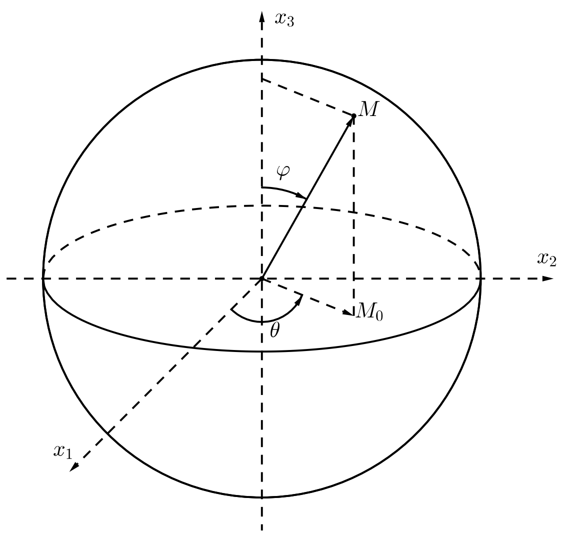
D'où l'expression de la métrique dans le système de coordonnées (x_1, x_2) :

(II.4) $$g = (1 + p_1^2)dx_1 \otimes dx_1 + (1 + p_2^2)dx_2 \otimes dx_2 + 2p_1p_2dx_1 \otimes dx_2.$$

2.3. La sphère

On note $\mathbb{S}^2$ la sphère unité de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. Si on ôte le pôle nord $= (0, 0, 1)$ et le pôle sud $=(0, 0, -1)$ l'ouvert M qui reste a pour repésentation paramétrique par les variables $\theta \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in]0, \pi[$:

$$\begin{cases} x_1 = \cos\theta \sin\varphi \\ x_2 = \sin\theta \sin\varphi \\ x_3 = \cos\varphi \end{cases}$$



L'application $F : (\theta, \varphi) \in \mathbb{R}\times]0, \pi[\longrightarrow (x_1, x_2, x_3) \in M$ n'est pas injective mais sa différentielle l'est en tout point (θ, φ). Elle est donnée par la matrice :

$$\begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi \\ 0 & -\sin\varphi \end{pmatrix}$$

L'espace tangent à M au point $F(\theta, \varphi)$ est donc engendré par les vecteurs :

$$e_1 = \begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Les différents produits scalaires $\langle e_k, e_\ell \rangle$, pris dans $\mathbb{R}^3$, donnent la métrique riemannienne sur M :

(II.5) $$g = \sin^2\varphi d\theta \otimes d\theta + d\varphi \otimes d\varphi.$$

Le groupe $\mathrm{Isom}(\mathbb{S}^2)$ s'identifie au groupe $\mathrm{O}(3)$ des isométries linéaires de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ ou groupe des matrices orthogonales 3×3.

2.4. Le demi-plan $\mathbb{H}$

On note $\mathbb{H}$ le demi-espace $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x_2 > 0\}$ sur lequel on définit la métrique riemannienne :

$$g = \frac{dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2}{x_2^2} \tag{II.6}$$

Par la suite, nous donnerons de manière explicite le groupe d'isométries de cette surface riemannienne ainsi que d'autres propriétés en remarquant que :

$$\mathbb{H} = \{z = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C} \;:\; x_2 > 0\}$$

et que la métrique en question s'écrit aussi sous la forme :

$$h = -\frac{4dz \otimes d\overline{z}}{(z - \overline{z})^2} \tag{II.7}$$

où $dz = dx_1 + idx_2$ et $d\overline{z} = dx_1 - idx_2$. (L'utilisation de la coordonnée complexe se prête mieux au calcul que celle des coordonnées réelles.)

CHAPITRE III
COURBURE

La *courbure* est le premier des invariants importants en géométrie riemannienne. Pour les surfaces, il y a différentes manières de l'introduire, notamment en passant par celle des courbes, mais nous avons choisi d'utiliser la notion de *connexion.* Nous ne faisons pas beaucoup de démonstrations mais nous détaillons le calcul des courbures des exemples fondamentaux. Les sections 1 et 2 sont une adaptation aux surfaces de ce qui est exposé pour les variétés en général dans [Ca].

1. Connexions

Soit M une surface de $\mathbb{R}^3$. Un champ de vecteurs sur M le long d'une courbe différentiable $\gamma : I \longrightarrow M$ est une application différentiable :

$$X : t \in M \longrightarrow (X_1(t), X_2(t), X_3(t)) \in T_{\gamma(t)}M.$$

On aimerait trouver une manière de dériver le champ X en demandant à la dérivée de rester tangente à M. Ce problème ne se pose pas uniquement dans ce cadre : de manière générale on est amené à chercher des *lois* permettant de dériver des objets tels que champ de vecteurs. Cela se fait à l'aide d'un outil géométrique appelé *connexion*, et qui est très utile en géométrie différentielle.

1.1. Connexions affines

Soit M une surface. On note TM son fibré tangent et $\mathfrak{X}(M)$ le $C^\infty(M)$-module des champs de vecteurs sur M. On appelle *connexion affine* sur M toute application :

$$\nabla : (X, Y) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$$

$C^\infty(M)$-linéaire par rapport au premier facteur, additive par rapport au second et telle que $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$ pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ et toute fonction $f \in C^\infty(M)$ (où $X(f)$ est la dérivée de f dans la direction de X).

Mettons-nous dans un ouvert de coordonnées locales (U, x_1, x_2). Alors on a une base de champs de vecteurs sur U : $X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$ et $X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}$. Pour connaître la connexion ∇, il suffit de connaître les quantités $\nabla_{X_i} X_j$ avec $i, j = 1, 2$; mais celles-ci s'écrivent :

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^k X_k \tag{III.1}$$

où Γ_{ij}^k sont des fonctions C^∞ sur U. La connaissance (localement) de ∇ revient donc à celle des fonctions Γ_{ij}^k, $i, j, k = 1, 2$ appelées *symboles de Christoffel* de la connexion ∇.

On suppose M munie d'une connexion affine ∇. Soient $\gamma : I \longrightarrow M$ une courbe différentiable et X un champ de vecteurs le long de γ. Alors :

Il existe une unique loi qui associe à X un champ de vecteurs le long de γ noté $\frac{DX}{dt}$ appelé ***dérivée covariante*** *de X le long de γ et vérifiant les proporiétés suivantes :*

i) $\frac{D}{dt}(X+Y) = \frac{DX}{dt} + \frac{DY}{dt}$,
ii) $\frac{D}{dt}(fX) = f\frac{DX}{dt} + \frac{df}{dt}X$,
iii) *si X est la restriction à l'image de γ d'un champ $\widetilde{X}$ sur M alors* $\frac{DX}{dt} = \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}}\widetilde{X}$.

Ecriture locale explicite

On suppose que l'ouvert (U, x_1, x_2) de coordonnées locales est tel que $U \cap \gamma(I) \neq \emptyset$. On peut écrire $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$ et $X = \sum_{j=1}^{2} f_j X_j$ avec $f_j \in C^\infty(U)$. Alors, en utilisant les propriétés énoncées de la dérivée covariante, on établit :

$$\frac{DX}{dt} = \sum_{j=1}^{2} \frac{df_j}{dt} X_j + \sum_{i,j=1}^{2} \frac{dx_i}{dt} f_j \nabla_{X_i} X_j$$

ou encore :

$$\text{(III.2)} \qquad \frac{DX}{dt} = \sum_{k=1}^{2} \left\{ \frac{df_k}{dt} + \sum_{i,j=1}^{2} f_j \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^k \right\} X_k.$$

Soit X un champ de vecteurs le long d'une courbe γ. On dira que X est *parallèle* si sa dérivée covariante $\frac{DX}{dt}$ est identiquement nulle.

Soit $\gamma : I \longrightarrow M$ une courbe, $t_0 \in I$ et X_0 un vecteur de $T_{\gamma(t_0)}M$. Alors on peut construire un champ unique X parallèle le long de toute la courbe γ et prenant la valeur X_0 au point t_0. Un tel champ est appelé *transport parallèle* de X_0 le long de γ. Si on l'écrit sous la forme $X = \sum_{j=1}^{2} f_j X_j$, ses composantes f_j sont les solutions du système différentiel :

$$\frac{df_k}{dt} + \sum_{i,j=1}^{2} f_j \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^k = 0 \quad \text{avec} \quad k = 1, 2$$

qui sont uniques en raison de la condition initiale $(f_1(t_0), f_2(t_0)) = X_0$.

Une connexion affine ∇ sur M est dite *symétrique* si elle vérifie pour tous champs $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ la relation :

$$\text{(IX.3)} \qquad \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

Localement pour $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ on a $\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, Y_j] = 0$ et donc pour tous $i, j, k = 1, 2$: $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

1.2. Connexions riemanniennes

Soit (M, g) $(g = \langle\ ,\ \rangle)$ une surface riemannienne munie d'une connexion affine ∇. On dira que ∇ est *compatible* avec g si, pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, on a :

$$\text{(III.4)} \qquad X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle.$$

En particulier si X, Y sont des champs de vecteurs définis le long d'une courbe γ on a :

$$\frac{d}{dt}\langle X, Y\rangle = \left\langle \frac{DX}{dt}, Y \right\rangle + \left\langle X, \frac{DY}{dt} \right\rangle.$$

On arrive à un théorème fondamental qui assure l'existence d'une connexion affine symétrique compatible avec une métrique g.

Théorème de Levi-Civita. *Soit M une surface munie d'une métrique riemannienne g qu'on notera aussi $\langle\ ,\ \rangle$. Alors, il existe sur M une unique connexion affine ∇ symétrique et compatible avec g. Elle est appelée* **connexion de Levi-Civita** *de la surface riemannienne (M, g).*

Un calcul simple montre que ∇ est définie de façon unique par l'identité :

$$\langle \nabla_Y X, Z\rangle = \frac{1}{2}\{X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle - \langle [X, Z], Y\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle - \langle [X, Y], Z\rangle\}$$

Faisant $X = X_j$, $Y = X_i$ et $Z = X_k$ et $\langle X_i, X_j\rangle = g_{ij}$ on obtient :

$$\sum_{\ell=1}^{2} g_{\ell k}\Gamma_{ij}^{\ell} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j}g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k}g_{ij}\right).$$

D'où l'on déduit, en notant $(g^{\ell k})$ l'inverse de la matrice $(g_{\ell k})$:

$$\text{(IX.5)} \qquad \Gamma_{ij}^{\ell} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2} g^{\ell k}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j}g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k}g_{ij}\right).$$

1.3. Géodésiques

Soit $g = \langle\ ,\ \rangle$ une métrique riemannienne sur M. Une courbe $\gamma : I \longrightarrow M$ est dite *géodésique* si $\frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) = 0$ identiquement. Cela se traduit par le système d'équations différentielles :

$$\text{(III.6)} \qquad \frac{d^2x_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{2}\Gamma_{ij}^{k}\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt} = 0 \quad \text{avec} \quad k = 1, 2$$

où les $x_i(t)$ sont les composantes de γ dans le système de coordonnées (U, x_1, x_2).

Si γ est une géodésique, la restriction de γ à tout intervalle fermé $[t_0, t_1]$ est appelée *segment de géodésique* de $\gamma(t_0)$ à $\gamma(t_1)$. On a :

$$\frac{d}{dt}\left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}\right\rangle = 2\left\langle \frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right), \frac{d\gamma}{dt}\right\rangle = 0.$$

La norme $\alpha = \left|\left|\frac{d\gamma}{dt}\right|\right|$ du vecteur $\frac{d\gamma}{dt}$ est donc constante. On en déduit alors que :

$$s(t) = \text{longueur}([\gamma(t_0), \gamma(t)]) = \int_{t_0}^{t}\left|\left|\frac{d\gamma}{dt}\right|\right| dt = \alpha(t - t_0).$$

Si $\alpha = 1$ la géodésique est dite *normalisée*. En remplaçant t par s on *paramètre γ par la longueur de l'arc*. Quand on peut faire cela sur tout l'intervalle $]-\infty, +\infty[$ on dira que γ est *complète*. La surface riemannienne (M, g) est alors dite *complète* si toute géodésique est complète.

Les géodésiques sont les courbes qui minimisent localement la distance entre les points de la surface.

2. Courbure

Une *métrique riemannienne* sur une surface permet d'y introduire un invariant fondamental appelé *courbure*. Celle-ci a pour fonction de distinguer à quel point un morceau de cette surface peut être "loin" d'un disque plan. On peut illustrer cela en constatant qu'il est impossible de coller de *façon isométrique* la pelure d'une orange sur le plan d'une table ! C'est cet invariant que nous nous proposons de définir dans ce paragraphe.

Dans toute la suite, M sera une surface munie d'une métrique riemannienne g et de sa connexion de Levi-Civita ∇ associée.

2.1. Tenseur de courbure

On appelle *courbure* de (M, g) l'application qui à tout $(X, Y) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$ associe l'application $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ définie par :

$$R(X,Y)Z = \nabla_{[X,Y]}Z - (\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z). \tag{IX.7}$$

Pour tous $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$, posons :

$$(X, Y, Z, T) = \langle R(X, Y)Z, T\rangle. \tag{III.8}$$

La courbure R de (M, g) vérifie les propriétés qui suivent dont la démonstration consiste en de simples calculs.

i) L'application $(X, Y) \longrightarrow R(X, Y)$ est $C^\infty(M)$-bilinéaire.
ii) Pour tous $(X, Y) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$, l'application $Z \longrightarrow R(X, Y)Z$ est $C^\infty(M)$-linéaire.
iii) $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$ (*identité de Bianchi*).
iv) $(X, Y, Z, T) = -(Y, X, Z, T)$ et $(X, Y, Z, T) = -(X, Y, T, Z)$.
v) $(X, Y, Z, T) = (Z, T, X, Y)$.

Ecriture locale

Comme toujours on pose $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ avec $i = 1, 2$. Le champ $R(X_i, X_j)X_k$ s'écrit dans la base (X_1, X_2) :

$$R(X_i, X_j)X_k = \sum_{\ell=1}^{2} R^\ell_{ijk} X_\ell \tag{III.9}$$

où les R^ℓ_{ijk}, $i, j, k, \ell = 1, 2$ sont des fonctions C^∞ sur l'ouvert de coordonnées locales (U, x_1, x_2). Elles s'expriment en fonction des symboles de Christoffell Γ^k_{ij}. Il suffit de voir que $R(X_i, X_j)X_k = \nabla_{X_j}\nabla_{X_i}X_k - \nabla_{X_i}\nabla_{X_j}X_k$ qui donne :

$$R^s_{ijk} = \sum_{\ell=1}^{2} \Gamma^\ell_{ik}\Gamma^s_{j\ell} - \sum_{\ell=1}^{2} \Gamma^\ell_{jk}\Gamma^s_{i\ell} + \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma^s_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma^s_{jk}. \tag{III.10}$$

De même :

$$(X_i, X_j, X_k, X_s) = R_{ijks} = \langle R(X_i, X_j)X_k, X_s\rangle = \sum_{l=1}^{2} R^\ell_{ijk} g_{\ell s}. \tag{III.11}$$

Les fonctions R_{ijks} vérifient les relations suivantes découlant immédiatement de celles du "crochet" $(\ ,\ ,\ ,\ )$:

$$\text{(III.12)} \qquad \begin{cases} R_{ijks} + R_{jkis} + R_{kijs} = 0 \\ R_{ijks} = -R_{jiks} \\ R_{ijks} = -R_{ijsk} \\ R_{ijks} = R_{ksij} \end{cases}$$

2.2. La courbure sectionnelle

On considère toujours une surface M munie d'une métrique riemannienne $g = \langle\ ,\ \rangle$ et de la connexion de Levi-Civita associée.

Lemme. *Soient $x \in M$ et (X, Y) une base de T_xM. Alors la quantité qui suit ne dépend pas de (X, Y) :*

$$\text{(III.13)} \qquad \kappa(X, Y) = \frac{(X, Y, X, Y)}{||X||^2||Y||^2 - \langle X, Y\rangle^2}.$$

La démonstration est facile bien qu'elle soit un peu calculatoire. Le nombre $\kappa(X, Y)$ (où (X, Y) est une base quelconque de T_xM) sera noté $\kappa(x)$ et appelé *courbure sectionnelle* de (M, g) au point x. C'est une fonction C^∞ sur la surface M. On dira que (M, g) est à *courbure constante* si cette fonction est constante.

3. Exemples de calcul

3.1. La surface euclidienne $\mathbb{R}^2$

Les champs $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, 2$ sont définis globalement, commutent et forment une base de l'espace tangent en chaque point $x \in \mathbb{R}^2$. On munit $\mathbb{R}^2$ de la métrique ;

$$g = dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2$$

qui a pour matrice associée la matrice identité *i.e.* :

$$g_{ij} = \langle X_i, X_j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On vérifie facilement que $\nabla_{X_i} X_j = 0$ pour tous $i, j = 1, 2$. Comme, par définition, les symboles de Christoffel sont donnés par :

$$\text{(III.14)} \qquad \Gamma^\ell_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2} g^{\ell k}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j}g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k}g_{ij}\right)$$

ils sont identiquement nuls. Par suite la *courbure sectionnelle est identiquement nulle.*

Les géodésiques de $\mathbb{R}^2$ sont les courbes $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$ qui vérifient le système différentiel :

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}(t) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2x_2}{dt^2}(t) = 0$$

et sont les droites affines $\gamma(t) = (a_1t + b_1, a_2t + b_2)$. Elles sont donc complètes.

3.2. La sphère $\mathbb{S}^2$

La sphère $\mathbb{S}^2$ étant plongée dans $\mathbb{R}^3$, elle hérite d'une métrique riemannienne dont l'écriture en coordonnées sphériques est $g = \sin^2\varphi d\theta \otimes d\theta + d\varphi \otimes d\varphi$. La matrice de g s'écrit donc :

$$g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} \sin^2\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } g^{-1} = (g^{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin^2\varphi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour adapter les calculs aux formules dont on dispose on posera $x_1 = \theta$ et $x_2 = \varphi$. Les champs $\frac{\partial}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial}{\partial x_2}$ seront respectivement $\frac{\partial}{\partial\theta}$ et $\frac{\partial}{\partial\varphi}$. On a bien entendu $[X_1, X_2] = 0$. La formule (IX.13) donne :

$$\begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} \\ \Gamma^1_{21} & \Gamma^1_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \\ \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} \\ \Gamma^2_{21} & \Gamma^2_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\varphi\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculons maintenant la quantité $(X_1, X_2, X_1, X_2) = \langle R(X_1, X_2)X_1, X_2\rangle$. On a :

$$\nabla_{X_2}\nabla_{X_1}X_1 = \nabla_{X_2}(\Gamma^1_{11}X_1 + \Gamma^2_{11}X_2) = \nabla_{X_2}(-\cos\varphi\sin\varphi X_2) = -\cos(2\varphi)X_2$$

et :

$$\nabla_{X_1}\nabla_{X_2}X_1 = \nabla_{X_1}(\Gamma^1_{21}X_1 + \Gamma^2_{21}X_2) = \nabla_{X_1}\left(\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}X_1\right) = -(\cos\varphi)^2X_2.$$

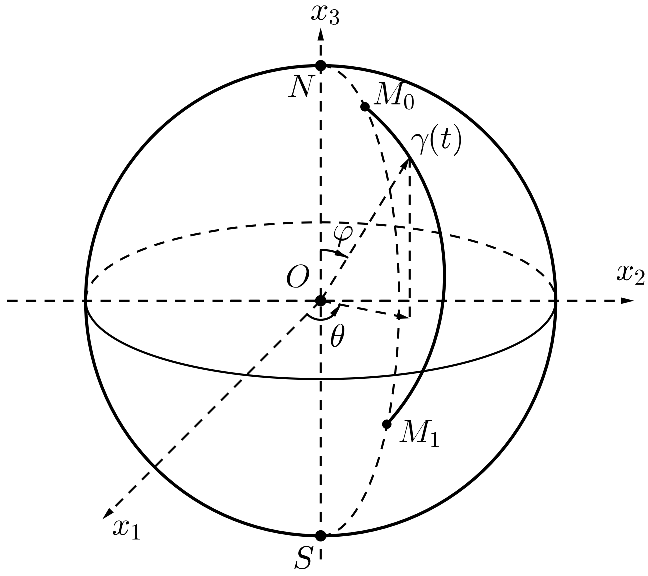
Finalement on obtient $R(X_1, X_2)X_1 = \nabla_{X_2}\nabla_{X_1}X_1 - \nabla_{X_1}\nabla_{X_2}X_1 = \sin^2\varphi X_2$ et donc $(X_1, X_2, X_1, X_2) = \sin^2\varphi$. La formule donnant la courbure sectionnelle par rapport à la base (X_1, X_2) est :

$$\kappa(X_1, X_2) = \frac{(X_1, X_2, X_1, X_2)}{||X_1||^2||X_2||^2 - \langle X_1, X_2\rangle^2}$$

Comme $||X_1||^2 = \sin^2\varphi$, $||X_2|| = 1$ et X_1 et X_2 orthogonaux on obtient $\kappa(X_1, X_2) = 1$.

La sphère $\mathbb{S}^2$ munie de sa métrique standard (celle induite par la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^3$) est une *surface riemannienne compacte orientable simplement connexe de courbure sectionnelle constante égale à* 1.

Déterminons les géodésiques de $\mathbb{S}^2$. Soient M_0 et M_1 deux points sur la sphère $\mathbb{S}^2$ non diamétralement opposés. Quitte à effectuer un changement de repère à l'aide d'une rotation linéaire (qui est une isométrie de $\mathbb{S}^2$), on peut supposer qu'ils se situent sur un même méridien (*cf.* dessin ci-dessous). Soit $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ de classe C^1 tel que $\gamma(0) = M_0$ et $\gamma(1) = M_1$ et que, pour tout $t \in [0, 1]$, le point $\gamma(t)$ ait pour coordonnées angulaires $(\theta(t), \varphi(t))$ avec $\theta \in]0, 2\pi[$ et $\varphi \in]0, \pi[$.



La métrique riemannienne sur l'ouvert de $\mathbb{S}^2$, image de $]0,2\pi[\times]0,\pi[$ par la représentation paramétrique, s'écrit $g = (\sin\varphi)^2 d\theta \otimes d\theta + d\varphi \otimes d\varphi$. Donc la longueur du chemin γ est donnée par la formule :

$$\ell(\gamma; M_0, M_1) = \int_0^1 \sqrt{(\sin(\varphi(t))^2\theta'(t)^2 + \varphi'(t)^2} dt.$$

D'où l'estimation :

$$\ell(\gamma; M_0, M_1) = \int_0^1 \sqrt{(\sin(\varphi(t))^2\theta'(t)^2 + \varphi'(t)^2} dt \geq \int_0^1 |\varphi'(t)| dt \geq |\varphi(1) - \varphi(0)|.$$

L'égalité a lieu si $\theta'(t) = 0$ *i.e.* si la fonction $\theta(t)$ est constante. Cela signifie que la courbe est sur le plan passant par les trois points O, M_0 et M_1, donc γ est un arc du grand cercle que trace ce plan sur la sphère.

Le même raisonnement peut être mené sur une sphère de rayon quelconque (et pas forcément centrée à l'origine). On a donc l'assertion suivante :

Soit $S(0, R)$ la sphère de rayon R centrée à l'origine et munie de la métrique induite par celle de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. Alors les géodésiques de cette surface riemannienne sont les grands cercles i.e. les cercles de $\mathbb{R}^3$ centrés à l'origine et de rayon R.

3.3. Le demi-espace $\mathbb{H}$

On rappelle que $\mathbb{H}$ est le demi-plan supérieur $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$ muni de la métrique riemannienne :

$$g = \frac{dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2}{x_2^2}$$

dont la matrice associée est $g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_2^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_2^2} \end{pmatrix}$. On calcule les symboles de Christoffel de la même manière que précédemment :

$$(\Gamma^1_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{x_2} \\ -\frac{1}{x_2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (\Gamma^2_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{x_2} \end{pmatrix}$$

Ceci nous donne :

$$\begin{aligned}\nabla_{X_2}\nabla_{X_1}X_1 =&\nabla_{X_2}(\Gamma_{11}^1 X_1+\Gamma_{11}^2 X_2)\\ =&\nabla_{X_2}\left(\frac{1}{x_2}X_2\right)\\ =&\frac{1}{x_2}\nabla_{X_2}X_2-\frac{1}{x_2^2}X_2\\ =&\frac{1}{x_2}\left(\Gamma_{22}^1 X_1+\Gamma_{22}^2 X_2\right)-\frac{1}{x_2^2}X_2\\ =&-\frac{2}{x_2^2}X_2\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\nabla_{X_1}\nabla_{X_2}X_1 =&\nabla_{X_1}(\Gamma_{21}^1 X_1+\Gamma_{21}^2 X_2)\\ =&\nabla_{X_1}\left(-\frac{1}{x_2}X_1\right)\\ =&-\frac{1}{x_2^2}X_2\end{aligned}$$

D'où :

$$R(X_1,X_2)X_1=\nabla_{X_2}\nabla_{X_1}X_1-\nabla_{X_1}\nabla_{X_2}X_1=-\frac{1}{x_2^2}X_2$$

et par suite :

$$(X_1,X_2,X_1,X_2)=\langle R(X_1,X_2)X_1,X_2\rangle=\langle -\frac{1}{x_2^2}X_2,X_2\rangle=-\frac{1}{x_2^2}\langle X_2,X_2\rangle=-\frac{1}{x_2^4}$$

La courbure sectionnelle est finalement :

$$\kappa(X_1,X_2)=\frac{(X_1,X_2,X_1,X_2)}{||X_1||^2||X_2||^2-\langle X_1,X_2\rangle^2}=-1$$

car $||X_1||^2||X_2||^2=\left(\frac{1}{x_2^2}\right)\left(\frac{1}{x_2^2}\right)$ et $\langle X_1,X_2\rangle=0$ (les vecteurs X_1 et X_2 étant orthogonaux).

Le demi-plan $\left(\mathbb{H},\frac{dx_1^2+dx_2^2}{x_2^2}\right)$ est une *surface riemannienne orientable et simplement connexe de courbure sectionnelle constante égale à* -1.

Les surfaces $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{S}^2$ et $\mathbb{H}$ seront supposées munies respectivement des métriques que l'on vient de considérer.

3.4. Un théorème de classification. *Soit* (M,g) *une surface riemannienne complète simplement connexe de courbure sectionnelle* κ *constante. Alors si* :

(1) $\kappa=0$, *M est isométrique à* $\mathbb{R}^2$ *(cas parabolique)* ;
(2) $\kappa=1$, *M est isométrique à* $\mathbb{S}^2$ *(cas elliptique)* ;
(3) $\kappa=-1$, *M est isométrique à* $\mathbb{H}$ *(cas hyperbolique).*

CHAPITRE IV

GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE DES SURFACES

Ce chapitre est consacré exclusivement au demi-plan hyperbolique $\mathbb{H}$. Nous y étudions son groupe d'isométries et ses géodésiques ainsi qu'un exemple de ses sous-groupes discrets Γ opérant proprement et librement sur $\mathbb{H}$. Les quotients $\mathbb{H}/\Gamma$ sont ainsi des surfaces riemanniennes à courbure constante égale à -1 ; on les appelle *surfaces hyperboliques.* Pour en savoir plus sur la géométrie hyperbolique voir [BP], [Ra], [ST] et [Ve].

1. Groupe d'isométries de $\mathbb{H}$

Selon le besoin, on utilisera les coordonnées réelles (x, y) pour repérer un point ou sa coordonnée complexe $z = x + iy$. Rappelons la :

1.1. Définition. *Soient (M, g) et (N, h) deux surfaces riemanniennes. Une application $\gamma : M \longrightarrow N$ est dite* **conforme** *s'il existe une fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout point $z \in M$ (d'image $w = \gamma(z) \in N$) et tous vecteurs $u, v \in T_zM$, on ait :*

$$h(d_z\gamma(u), d_z\gamma(v)) = e^{f(z)}g(u, v). \tag{IV.1}$$

(La fonction e^f est appelée **facteur de conformité** *de γ.) C'est aussi équivalent à dire que γ préserve les angles orientés : l'angle (u, v) dans T_zM est égal à l'angle $(d_z(u), d_z(v))$ dans T_wN.*

Une isométrie locale directe γ est une application conforme ; son facteur de conformité est la fonction identiquement égale à 1. Si $\gamma : M \longrightarrow N$ est bijective et conforme, on dira que γ est une *équivalence conforme* entre M et N ; une équivalence conforme de (M, g) sur elle-même est appelée *transformation conforme* de (M, g). L'ensemble des transformations conformes de (M, g) est un groupe qu'on note $\mathrm{Conf}(M, g)$ et qu'on appelle *groupe conforme* de la surface riemannienne (M, g). Bien sûr, $\mathrm{Isom}^+(M, g)$ (groupe des isométries directes) est un sous-groupe de $\mathrm{Conf}(M, g)$.

1.2. Quelques rappels

On se situe dans le plan $\mathbb{R}^2$ qu'on identifie au plan complexe par $(x, y) \longmapsto z = x + iy$. Le produit scalaire usuel $\langle(x, y), (x', y')\rangle = xx' + yy'$ sur $\mathbb{R}^2$ n'est rien d'autre que la partie réelle du produit hermitien $\langle z, w\rangle = z\overline{w}$ sur $\mathbb{C}$. L'orientation sur $\mathbb{R}^2$ est celle donnée par sa base canonique $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$.

• *Une application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ non nulle qui conserve les angles (orientés ou pas) est une similitude, c'est-à-dire* :

- *le produit d'une rotation et d'une homothétie de même centre si la transformation φ préserve les angles orientés ;*
- *le produit d'une réflexion, d'une rotation et d'une homothétie de même centre si φ ne préserve pas les angles orientés.*

Preuve. Quitte à remplacer φ par $\varphi \circ s$ où s est la réflexion d'axe celui des abscisses, on peut supposer que φ préserve l'orientation.

Soit r la rotation qui amène le vecteur $\varphi(e_1)$ sur $\tau_1 e_1$ avec $\tau_1 > 0$. Posons $\psi = r \circ \varphi$. Comme ψ préserve les angles orientés et qu'elle fixe la direction et le sens de e_1, l'image de

e_2 par ψ est un vecteur du type $\tau_2 e_2$. Ce qui nous donne $\psi(e_1+e_2) = \tau_1 e_1 + \tau_2 e_2$. Comme, encore une fois ψ préserve les angles orientés et fixe la direction et le sens de e_1, $\psi(e_1+e_2)$ est de la forme $\tau(e_1+e_2)$, ce qui impose $\tau_1 = \tau_2 = \tau$. Donc $r \circ \varphi$ est l'homothétie centrée à l'origine et de rapport τ ; par suite, φ est la similitude directe centrée à l'origine et de rapport τ et d'angle $\theta = (e_1, \varphi(e_1))$. $\square$

En coordonnées complexes, une similitude $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ s'écrit $\varphi(z) = \lambda z$ si elle conseve l'orientation et $\varphi(z) = \lambda \overline{z}$ sinon (avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$).

• *Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{C}$. Une application $f : U \longrightarrow V$ est conforme si, et seulement si, f est holomorphe et vérifie $f'(z) \neq 0$ pour tout $z \in U$.*

Preuve. L'implication (f conforme $\Longrightarrow$ f holomorphe et $f'(z) \neq 0$) résulte de ce qu'on vient de voir précédemment. L'implication réciproque est une conséquence du fait que les conditions de Cauchy-Riemann disent exactement que la différentielle $\varphi = d_z f$ de f est une similitude. Nous laissons le soin au lecteur de mettre tout cela en forme. $\square$

Comme pour le plan euclidien et la sphère, nous allons déterminer explicitement le groupe des isométries du demi-plan hyperbolique $\mathbb{H}$.

1.3. Théorème. *Toute isométrie du demi-plan ouvert $\mathbb{H} = \{x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ est de la forme $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ou $f(z) = \frac{-a\overline{z}+b}{-c\overline{z}+d}$ avec a, b, c, d réels tels que $ad - bc = 1$.*

Démonstration. Une isométrie qui préserve l'orientation est une transformation conforme. Elle est donc de la forme $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ où a, b, c, d sont des réels tels que $ad - bc = 1$ (découle du lemme de Schwarz qu'on peut trouver dans [Ct] par exemple). Si elle ne préserve pas l'orientation, elle est du type $f(z) = \frac{-a\overline{z}+b}{-c\overline{z}+d}$ où a, b, c, d sont aussi des réels tels que $ad - bc = 1$.

Reste à montrer qu'une transformation de la forme $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ou $f(z) = \frac{-a\overline{z}+b}{-c\overline{z}+d}$ avec a, b, c, d réels tels que $ad - bc = 1$ est une isométrie de $\mathbb{H}$. On traitera seulement la première forme ; le cas de la seconde s'en déduit immédiatement.

Comme on l'a déjà fait remarquer, la métrique hyperbolique peut aussi s'écrire en la coordonnée complexe z sous la forme :

$$\text{(IV.2)} \qquad \langle\ ,\ \rangle_z = -\frac{4dz \otimes d\overline{z}}{(z-\overline{z})^2}.$$

Dire que f est une isométrie, c'est dire qu'elle préserve cette métrique. Ceci signifie de façon concrète que, pour tout $z \in \mathbb{H}$, on a :

$$\langle\ ,\ \rangle_{f(z)} = -\frac{4d\left(f(z)\right) \otimes d\overline{f(z)}}{\left(f(z) - \overline{f(z)}\right)^2} = -\frac{4dz \otimes d\overline{z}}{(z-\overline{z})^2} = \langle\ ,\ \rangle_z.$$

(i) La métrique $\langle\ ,\ \rangle_z$ est invariante par toute translation $z \longmapsto z + b$ (avec b réel) car :

$$-\frac{4d(z+b) \otimes d\left(\overline{z+b}\right)}{\left((z+b) - (\overline{z+b})\right)^2} = -\frac{4dz \otimes d\overline{z}}{(z-\overline{z})^2} = \langle\ ,\ \rangle_z.$$

(ii) Elle est invariante par l'application $z \longmapsto -\frac{1}{z}$ car :

$$-\frac{4d\left(-\frac{1}{z}\right) \otimes d\left(\overline{-\frac{1}{z}}\right)}{\left(-\frac{1}{z} - \overline{\left(-\frac{1}{z}\right)}\right)^2} = -4\frac{\left(\frac{1}{z^2}\right)dz \otimes \left(\frac{1}{\overline{z}^2}\right)d\overline{z}}{\frac{(z-\overline{z})^2}{(z\overline{z})^2}} = -\frac{4dz \otimes d\overline{z}}{(z-\overline{z})^2} = \langle\ ,\ \rangle_z.$$

(iii) Et finalement, il est immédiat de voir qu'elle est aussi invariante par toute homothétie $z \longmapsto az$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Considérons la transformation $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Si $c = 0$, $ad = 1$ et par suite $\frac{a}{d} > 0$; donc f est de la forme $f(z) = \alpha z + \beta$ avec $\alpha = \frac{a}{d} > 0$; f est donc une isométrie en vertu des points (i) et (iii). Si $c \neq 0$, on peut écrire f sous la forme :

$$f(z) = \frac{a}{c} - \frac{1}{c^2 z + cd}. \tag{IV.3}$$

Par suite f laisse invariante la métrique $\langle\ ,\ \rangle$ en vertu des points (i), (ii) et (iii). La transformation f est finalement une isométrie de $\mathbb{H}$. □

2. Géodésiques

On rappelle qu'une courbe $\gamma : I \longrightarrow M$ (I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$) C^1 par morceaux tracée sur une surface riemannienne (M, g) est une géodésique si elle minimise localement la distance entre les points : le plus court chemin pour aller du point $\gamma(t_0)$ au point $\gamma(t)$ ($t_0, t \in I$ proches) est $\gamma([t_0, t])$. Nous allons décrire explicitement les géodésiques du demi-plan hyperbolique $\mathbb{H}$. Mais avant commençons par une :

2.1. Remarque. *Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{H}$ une géodésique. Alors son image $f \circ \gamma : I \longrightarrow \mathbb{H}$ par toute isométrie f de $\mathbb{H}$ est une géodésique.*

Cette remarque est valable dans toute surface riemannienne (M, g). Plus même : tout ce qui est défini à partir de la métrique (connexion riemannienne, courbure, géodésique...) se "conserve" par le groupe $\mathrm{Isom}(M, g)$ des isométries de (M, g).

2.2. Proposition. *Soient p_0 et p_1 deux points du demi-plan $\mathbb{H}$ ayant même abscisse x_0 et d'ordonnées respectives y_0 et y_1. Alors la portion de la droite (p_0p_1) contenue dans $\mathbb{H}$ est une géodésique complète.*

Démonstration. Soit $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{H}$ une courbe de classe C^1 telle que $\gamma(0) = p_0$ et $\gamma(1) = p_1$ s'écrivant $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$. On a :

$$\begin{aligned}
\text{longueur}(\gamma([0,1])) &= \int_0^1 \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt \\
&\geq \int_0^1 \frac{|y'(t)|}{y(t)} dt \\
&\geq \left| \int_0^1 \frac{y'(t)}{y(t)} dt \right| \\
&= |\mathrm{Log}(y_1) - \mathrm{Log}(y_0)|.
\end{aligned}$$

La quantité $|\mathrm{Log}(y_1) - \mathrm{Log}(y_0)|$ n'est rien d'autre que la longueur hyperbolique du segment $[p_0p_1]$. Si la courbe γ est une géodésique, l'égalité :

$$\text{longueur}(\gamma([0,1])) = |\mathrm{Log}(y_1) - \mathrm{Log}(y_0)|$$

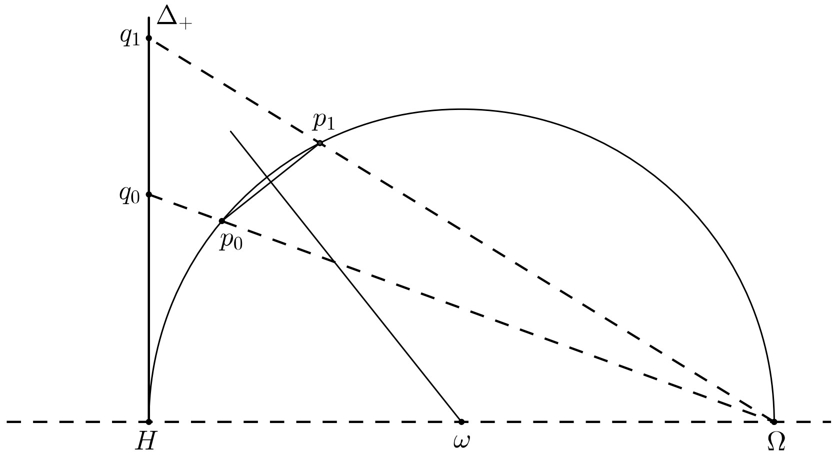
doit avoir lieu, sinon la courbe $\tau(t) = x_0 + iy(t)$ avec $t \in [0, 1]$ (qui joint aussi p_0 à p_1) sera aussi de plus courte longueur. Toute demi-droite ouverte contenue dans $\mathbb{H}$ commençant en un point de l'axe réel et perpendiculaire à celui-ci est une géodésique complète : en effet, elle est paramétrée sur tout l'intervalle $]-\infty, +\infty[$ par $\gamma(t) = x_0 + ie^t$. □

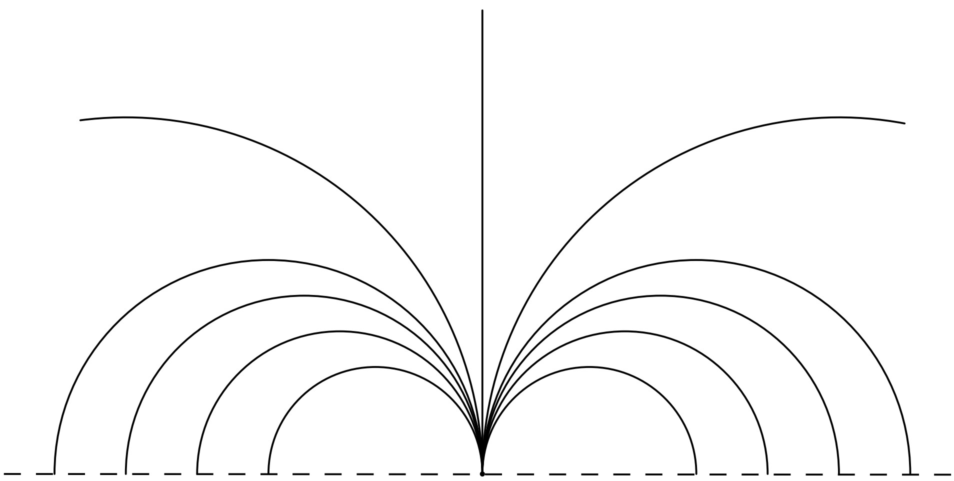
2.3. Proposition. *Soient p_0 et p_1 deux points de $\mathbb{H}$ ayant des abscisses respectives x_0 et x_1 différentes. Alors le demi-cercle contenu dans $\mathbb{H}$, centré sur l'axe réel et passant par les points p_0 et p_1 est une géodésique complète.*

Démonstration. Comme les points p_0 et p_1 n'ont pas la même abscisse, la médiatrice du segment $[p_0p_1]$ coupe l'axe réel en un point ω. Le demi-cercle $\mathcal{C}$ de centre ω et passant par p_0 (et donc aussi par p_1) coupe l'axe réel en deux points Ω et H. Notons ρ le rayon de $\mathcal{C}$ (on a $0 < \rho = \omega\Omega = \omega H = \omega p_0 = \omega p_1$) et posons $\kappa = 4\rho^2$. L'inversion $\mathcal{I}$ de pôle Ω et de puissance κ s'écrit :

$$\mathcal{I}(z) = \frac{\kappa}{\overline{z} - a} + a = \frac{(-0)\overline{z} + \sqrt{\kappa}}{-\left(-\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)\overline{z} + \left(-\frac{a}{\sqrt{\kappa}}\right)} + a \tag{IV.4}$$

(où a est l'abscisse de Ω, qui est aussi son affixe). Cette inversion envoie le demi-cercle $\mathcal{C}$ sur la demi-droite Δ_+ (contenue dans $\mathbb{H}$) issue du point H et orthogonale à l'axe réel. Si $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{H}$ est une courbe géodésique telle que $\gamma(0) = p_0$ et $\gamma(1) = p_1$, sa transformée $\mathcal{I} \circ \gamma$ par l'isométrie $\mathcal{I}$ est aussi une géodésique, donc sera contenue dans Δ_+ ; par suite γ est forcément contenue dans $\mathcal{C}$. On en conclut que la géodésqiue complète passant par p_0 et p_1 est l'image inverse par $\mathcal{I}$ de la demi-droite Δ_+, c'est-à-dire le demi-cercle $\mathcal{C}$. $\square$





Géodésiques partant d'un point sur l'axe réel

3. Surfaces hyperboliques

L'objet de cette section est d'en donner la définition et un exemple de surface compacte obtenue comme quotient de $\mathbb{H}$ par l'action d'un groupe d'isométries.

3.1. SL(2,R) et son action sur $\mathbb{H}$

On rappelle que $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ est le groupe des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels et de déterminant égal à 1. C'est une partie de $\mathbb{R}^4$ donnée par l'injection naturelle :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \hookrightarrow (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$$

qui hérite donc d'une structure d'espace topologique. Comme l'application :

$$(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \longrightarrow ad - bc \in \mathbb{R}$$

est continue, $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathbb{R}^4$, donc un espace localement compact. En plus les applications naturelles :

$$(A,B) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \longrightarrow AB \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$$

et :

$$A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \longrightarrow A^{-1} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$$

sont indéfiniment différentiables (et même analytiques réelles). Ceci confère évidemment à $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ une structure de *groupe de Lie*.

On rappelle qu'une *transformation homographique* de $\mathbb{H}$ s'écrit $\gamma : z \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d}$ où $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ et tels que $ad - bc \neq 0$; elle est définie bien entendu pour $z \neq -\frac{d}{c}$. Une telle transformation est donc associée à la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Un calcul facile montre que si $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, on a :

$$\Im(z)(\gamma(z)) = \frac{\Im(z)}{|cz+d|^2} \tag{IV.5}$$

et donc γ préserve $\mathbb{H}$ et est définie partout sur $\mathbb{H}$. On vérifie qu'au produit de deux matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ correspond la composition $\gamma\gamma'$. Comme les matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$ définissent la même transformation, la condition $ad - bc \neq 0$ (qui assure la bijectivité de γ) peut être remplacée par $ad - bc = 1$. Ainsi le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{H}$. Cette action est *holomorphe* et *isométrique i.e.* la transformation γ associée à une matrice de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ est biholomorphe et est une isométrie. Notons $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ le groupe des transformations biholomorphes de $\mathbb{H}$. On a donc un morphisme de groupes :

$$\rho : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \longrightarrow \gamma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$$

où γ est la transformation $z \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d}$. Le noyau de ρ est constitué des matrices I et $-I$ et induit donc un homomorphisme injectif :

$$\rho : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\{I,-I\} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{H}).$$

Nous travaillerons toujours sur $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ que nous confondrons (modulo le sous-groupe $\{I,-I\}$) avec $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ et dont on notera un élément indifféremment γ ou $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

3.2. Proposition. *L'action de* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ *sur* $\mathbb{H}$ *est transitive i.e. pour tous* $z, z' \in \mathbb{H}$ *il existe un élément* $\phi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ *tel que* $z = \phi(z')$. *En d'autres termes cette action n'a qu'une seule orbite.*

Démonstration. Écrivons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. Un calcul immédiat permet de vérifier que les éléments : $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & y \end{pmatrix}$ et $\gamma' = \begin{pmatrix} 1 & -x' \\ 0 & y' \end{pmatrix}$ transforment z et z' en le point i : $\gamma(z) = i$ et $\gamma'(z') = i$. Par suite, l'élément $\phi = \gamma^{-1} \circ \gamma'$ tranforme z' en z. $\square$

Nous allons terminer par la notion de surface hyperbolique. Elle sera donnée de façon très sommaire car faire les choses en détail nécessite un peu plus de matériel.

Un *sous-groupe discret* de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ est une partie Γ de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ qui est à la fois discrète (son intersection avec tout compact est finie) et un sous-groupe.

3.3. Théorème. *Soit* Γ *un sous-groupe discret de* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. *On considère son action naturelle sur* $\mathbb{H}$, *celle induite par* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ *en tant que groupe d'isométries du demi-plan hyperbolique. Alors* :

i) *Le groupe* Γ *agit proprement sur* $\mathbb{H}$, *c'est-à-dire, pour tout compact* K *du demi-plan* $\mathbb{H}$, *l'ensemble* $\{\gamma \in \Gamma : \gamma(K) \cap K \neq \emptyset\}$ *est fini.*

ii) *Si en plus* Γ *agit librement i.e. le groupe d'isotropie* Γ_x *de tout point* x *est trivial, le quotient* $M = \mathbb{H}/\Gamma$ *est une surface orientable. La métrique hyperbolique sur* $\mathbb{H}$ *induit sur* M *une métrique riemannienne dont la courbure sectionnelle est égale à* -1.

Pour la démonstration, voir [Fr].

Les surfaces de la forme $M = \mathbb{H}/\Gamma$ sont appelées *surfaces hyperboliques.* On démontre (loin d'être trivial) que toute surface riemannienne orientable à courbure constante égale à -1 est de ce type. Pour en construire, il faut donc trouver des sous-groupes discrets de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ qui agissent librement sur $\mathbb{H}$. Nous allons nous restreindre au cas des surfaces compactes. On a le théorème qui suit dont on peut trouver une démonstration dans [Ve].

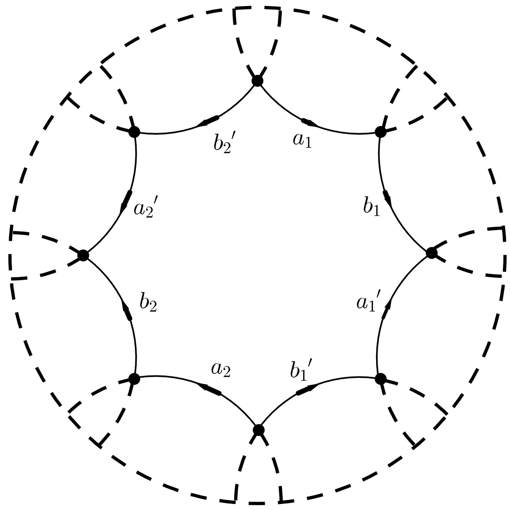
3.4. Théorème de Poincaré. *Soient* $g \geq 2$ *un entier et* Δ_g *un polygone ayant* $4g$ *côtés (des segments de géodésiques)* $a_1, a_1', b_1, b_1' \cdots, a_g, a_g', b_g, b_g'$. *On suppose que tous les sommets de* Δ_g *sont dans* $\mathbb{H}$, *pour tout* $\ell \in \{1, \cdots, g\}$, *les côtés* a_ℓ *et* b_ℓ *sont isométriques respectivement aux côtés* a_ℓ' *et* b_ℓ' *et qu'une orientation est donnée sur chacun des côtés de telle sorte qu'un parcours sans recul sur le bord soit dans le sens* $a_1 b_1 {a_1'}^{-1} {b_1'}^{-1} \cdots a_g b_g {a_g'}^{-1} {b_g'}^{-1}$. *Alors* :

i) *Pour* $\ell \in \{1, \cdots, g\}$, *il existe des isométries* γ_ℓ *et* σ_ℓ *de* $\mathbb{H}$ *préservant l'orientation et telles que* $\gamma_\ell(a_\ell) = a_\ell'$ *et* $\sigma_\ell(b_\ell) = b_\ell'$.

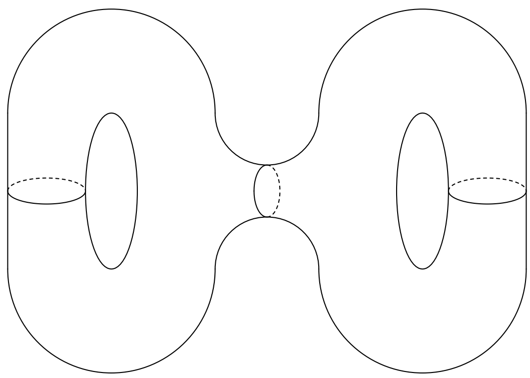
ii) *Les isométries* $\gamma_1, \sigma_1, \cdots, \gamma_g, \sigma_g$ *engendrent un sous-groupe discret* Γ_g *de* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ *qui agit librement et proprement sur* $\mathbb{H}$ *et ayant* Δ_g *comme domaine fondamental. Le groupe* Γ_g *a pour présentation* :

$$\Gamma_g = \left\langle \gamma_1, \sigma_1, \cdots, \gamma_g, \sigma_g \;\middle|\; \gamma_1 \sigma_1 {\gamma_1}^{-1} {\sigma_1}^{-1} \cdots \gamma_g \sigma_g {\gamma_g}^{-1} {\sigma_g}^{-1} = 1 \right\rangle. \tag{IV.6}$$

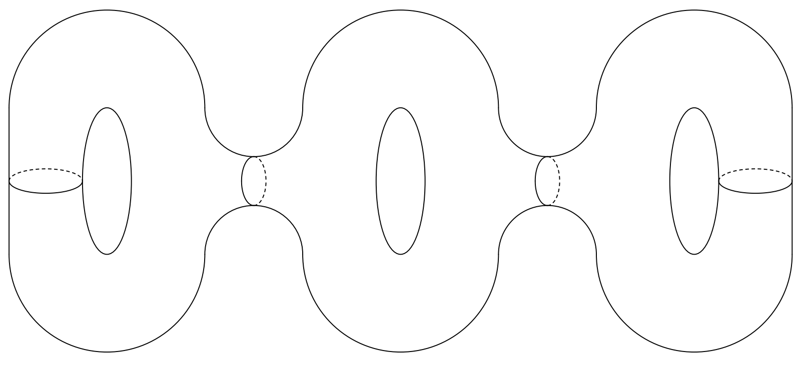
iii) *Le quotient* $M_g = \mathbb{H}/\Gamma_g$ *est une surface hyperbolique compacte orientable ayant exactement* g *pour genre.*



Cet octogone hyperbolique donne la surface ci-dessous pour $g = 2$.



Voici la surface qu'on obtient pour $g = 3$.



Et ainsi de suite pour $g = 4, \cdots$

EXERCICES EN VRAC

Là où il sera considéré, l'espace $\mathbb{R}^3$ sera muni du produit scalaire $\langle x, x'\rangle = x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3'$ pour lequel la base canonique $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est orthonormée.

Exercice 1

On identifie $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ par l'isomorphisme $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \overset{\simeq}{\longmapsto} x + iy = z \in \mathbb{C}$. Soient $\lambda, \alpha \in]0, 1[$ et $a = \lambda e^{2i\pi\alpha}$. On note r la rotation d'angle $2\pi\alpha$ et h l'homothétie complexe $h(z) = az$.

1 - La représentation $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Diff}(\mathbb{C}^*)$ (groupe des difféomorphismes de $\mathbb{C}^*$) qui envoie le générateur 1 sur la rotation r définit une action Φ de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{C}^*$. Pour quelles valeurs de α l'action Φ est-elle fidèle ? libre ? propre ?

2 - La représentation $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Diff}(\mathbb{C}^*)$ qui envoie cette fois-ci le générateur 1 sur l'homothétie h définit une autre action Ψ de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{C}^*$.

i) Montrer que l'action Ψ est libre et propre et en donner un domaine fondamental.

ii) Quelle est la surface quotient $M = \mathbb{C}^*/\Psi$?

Exercice 2

Soient M et N deux surfaces différentiables et Γ un groupe dénombrable (discret). On se donne deux actions de Γ : $\Phi : \Gamma \times M \longrightarrow M$ et $\Psi : \Gamma \times N \longrightarrow N$. On rappelle que Φ et Ψ sont dites *conjuguées* s'il existe un difféomorphisme $h : M \longrightarrow N$ tel que, pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $x \in M$ on ait : $h(\Phi(\gamma, x)) = \Psi(\gamma, h(x))$. Au niveau des représentations $\rho : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Diff}(M)$ et $\sigma : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Diff}(N)$, ceci signifie que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a :

$$\sigma(\gamma) = h \circ \rho(\gamma) \circ h^{-1}.$$

1 - On suppose que les actions Φ et Ψ sont libres et propres et conjuguées par un difféomorphisme $h : M \longrightarrow N$. Montrer que h induit un difféomorphisme $\overline{h}$ entre les surfaces M/Φ et N/Ψ (obtenues en prenant les quotients de M et N respectivement par les actions Φ et Ψ).

2 - On définit une action Φ du groupe cyclique $\Gamma = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ sur la sphère unité (de $\mathbb{R}^3$ muni de la norme euclidienne usuelle) $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : ||x|| = 1\}$ par :

$$\Phi(\gamma, x) = \begin{cases} x & \text{si } \gamma = \overline{0} \\ -x & \text{si } \gamma = \overline{1} \end{cases}$$

Montrer que cette action est libre et que la surface quotient $\mathbb{S}^2/\Phi$ est difféomorphe au plan projectif $P^2(\mathbb{R})$.

Exercice 3

Soit M l'ensemble des points (x, y, z) de l'espace $\mathbb{R}^3$ qui vérifient la relation $x_1^2 - x_2^2 - x_3 = 0$.

1 - Montrer qu'une représentation paramétrique régulière $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow M$ de M est donnée par :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(u + v) \\ x_2 = \frac{1}{2}(u - v) \\ x_3 = uv \end{cases}$$

et en déduire ainsi que M est une surface différentiable.

2 - Donner la métrique riemannienne sur M induite par le produit scalaire de $\mathbb{R}^3$.

3 - La surface M est-elle compacte ?

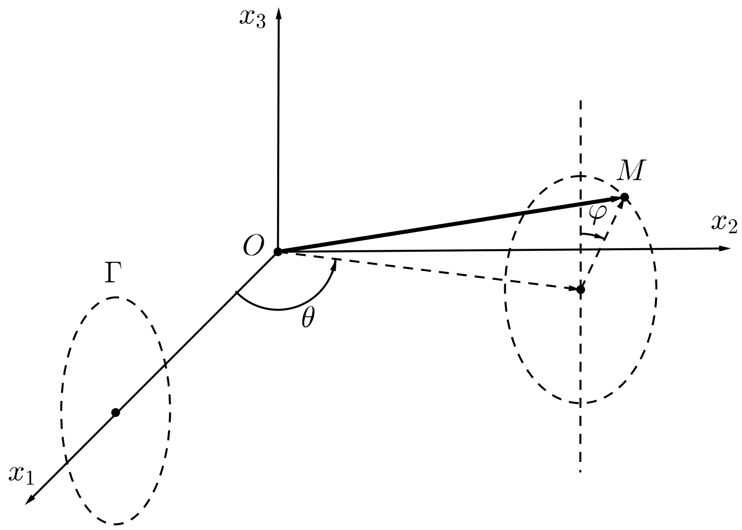
Exercice 4

Soit M une partie de $\mathbb{R}^3$. On appelle *arc* dans M une application continue $\sigma : [0,1] \longrightarrow M$. Les points $\sigma(0)$ et $\sigma(1)$ sont respectivement l'*origine* et l'*extrémité* de σ. On dira que M est *connexe par arcs* si, pour tous points a et b de M, il existe un arc σ dans M ayant a pour origine et b pour extrémité.

Montrer que la sphère : $\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ est connexe par arcs en donnant explicitement, et en illustrant par un dessin, un arc joignant deux points donnés de $\mathbb{S}^2$.

Exercice 5

Soient r et R deux nombres réels tels que $R > r > 0$. Dans le plan $\{x_2 = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$, on note Γ le cercle de centre $(R, 0, 0)$ et de rayon r. On fait tourner ce plan autour de la droite vectorielle (Ox_3). Le cercle Γ engendre alors un tore T.



1 - Montrer que, sur le complémentaire U d'un cercle méridien et d'un cercle parallèlle (qu'on donnera de façon précise), T admet comme représentation paramétrique régulière, l'application : $\Psi : (\theta, \varphi) \in]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[\longmapsto (x_1, x_2, x_3) \in U$ donnée par :

$$\begin{cases} x_1 = (R + r\sin\varphi)\cos\theta \\ x_2 = (R + r\sin\varphi)\sin\theta \\ x_3 = r\cos\varphi \end{cases}$$

2 - Donner la métrique riemannienne g sur U induite par le produit scalaire de $\mathbb{R}^3$.

3 - Calculer la courbure sectionnelle de la surface riemannienne (U, g).

Exercice 6

Soient a et c deux nombres réels tels que $0 < a < c$. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, on note Γ le cercle défini par les équations $x_3 = 0$ et $x_1^2 + x_2^2 = c^2$. Soit $\mathcal{P}$ un plan passant par l'axe

(Ox_3) ; il coupe le cercle Γ en deux points diamétralement opposés F et F'. On considère tous les points $M \in \mathcal{P}$ qui vérifient la relation $|MF - MF'| = 2a$. On note S l'ensemble des points M construits de cette façon pour toutes les positions possibles du plan $\mathcal{P}$.

1 - Montrer que l'ensemble S est invariant par toutes les rotations d'axe (Ox_3).

2 - Soit Γ l'intersection de S avec le plan d'équation $x_3 = 0$. Montrer, en exhibant une paramétrisation adéquate au voisinage de chacun de ses points, que γ est une courbe régulière.

3 - Montrer, en exhibant une paramétrisation adéquate au voisinage de chacun de ses points, que S est une surface régulière.

4 - Donner l'expression de la métrique riemannienne induite par celle de $\mathbb{R}^3$ sur S.

5 - Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que l'intersection de S avec le plan d'équation $x_3 = \lambda$ est une courbe régulière (vecteur tangent partout non nul) fermée simple.

Exercice 7

On note M l'image de l'ouvert $U = \mathbb{R}\times]0, +\infty[\subset \mathbb{R}^2$ par l'application $\Phi : U \longmapsto \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\begin{cases} x_1(u,v) = e^{-v}\cos u \\ x_2(u,v) = e^{-v}\sin u \\ x_3(u,v) = v. \end{cases}$$

1 - Montrer que M est une surface de $\mathbb{R}^3$.

2 - Donner la métrique riemannienne g sur M induite par le produit scalaire de $\mathbb{R}^3$.

3 - Calculer la courbure sectionnelle de la surface riemannienne (M, g).

4 - Donner, en chaque point $p \in M$, des équations cartésiennes de la normale à M.

5 - Montrer que M est difféomorphe à $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

Exercice 8

On pose $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2+x_2^2x_3^2 = 1\}$, $N = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2+x_2^4+x_3^6 = 1\}$ et on munit ces ensembles de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^3$.

1 - Dire pourquoi M et N sont des surfaces.

2 - Les surfaces M et N sont-elles compactes ?

Exercice 9

Soient F le point $(0, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{H}$ le plan d'équation $x_3 = -1$. On pose :

$$M = \{p \in \mathbb{R}^3 : \text{distance de } p \text{ à } F = \text{distance de } p \text{ à } \mathcal{H}\}.$$

1 - Montrer que M est définie par une équation du type $x_3 = f(x_1, x_2)$ dont on donnera l'expression exacte.

2 - Montrer que M est une surface de $\mathbb{R}^3$. En donner une paramétrisation globale.

3 - Donner la métrique riemannienne g sur M induite par le produit scalaire de $\mathbb{R}^3$.

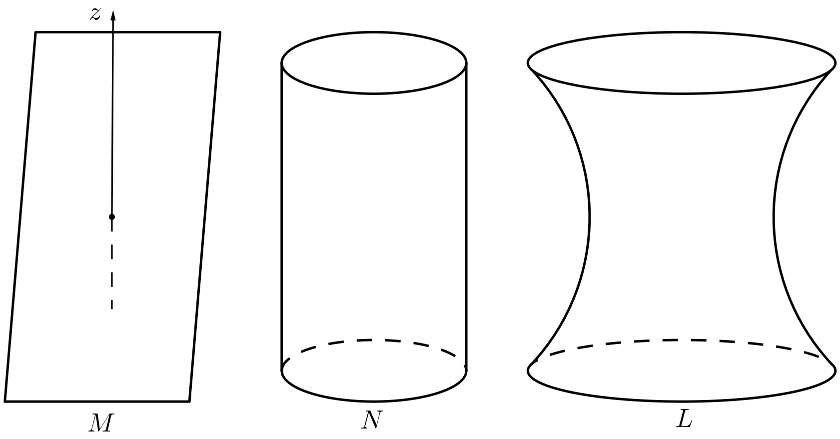
Exercice 10

On considère les surfaces M, N et L de l'espace $\mathbb{R}^3$ données comme suit :

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0 \text{ et } x_1^2 + x_2^2 \neq 0\}$$

$$N = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

$$L = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1\}.$$



1- Montrer que les trois surfaces M, N et L sont deux à deux difféomorphes en exhibant de façon explicite des difféomorphismes (il suffit de faire cela entre M et N et puis entre N et L).

2 - Donner la métrique riemannienne h induite par $\mathbb{R}^3$ sur N et calculer la courbure sectionnelle de la surface riemannienne (N, h).

Exercice 11

On munit le demi-plan $\mathbb{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ de la métrique riemannienne hyperbolique $g = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$.

Soient a un réel strictement positif différent de 1 et $\gamma : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ le difféomorphisme donné par $\gamma(z) = az$. On définit une action Ψ de $\Gamma = \mathbb{Z}$ à l'aide de la représentation ρ de $\mathbb{Z}$ dans Diff($\mathbb{H}$) (groupe des difféomorphimses de $\mathbb{H}$) qui envoie 1 sur γ.

1 - Montrer que l'action Ψ est libre et propre. Dessiner l'orbite du point $z_0 = 1 + i$.

2 - Donner un domaine fondamental de Ψ.

3 - Montrer que la surface quotient $M = \mathbb{H}/\Psi$ est difféomorphe au cylindre ouvert $\mathcal{C} = \Gamma \times]0, \pi[$ où Γ est un cercle.

4 - Quelle métrique riemannienne h faut-il mettre sur $\mathcal{C}$ pour que les deux surfaces riemanniennes (M, g) et $(\mathcal{C}, h)$ soient isométriques ?

Exercice 12

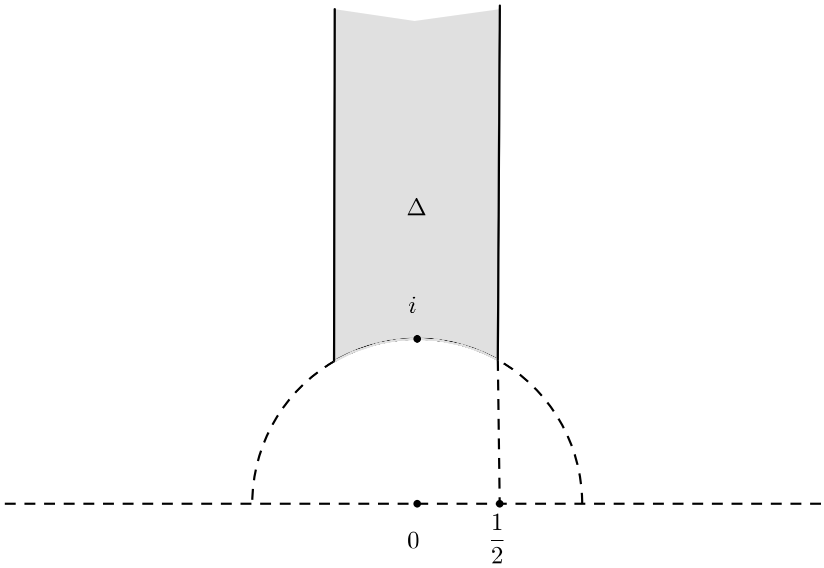
On munit le demi-plan $\mathbb{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ de la métrique riemannienne hyperbolique $g = \frac{dx^2+dy^2}{y^2} = -4\frac{dz \otimes d\bar{z}}{(z-\bar{z})^2}$. Le groupe SL$(2, \mathbb{R})$ des matrices carrées réelles d'ordre 2 et de déterminant 1 agit sur $\mathbb{H}$ par la représentation $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \overset{\rho}{\longmapsto} \left\{z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}\right\}$. Cette action est par isométries.

On note SL$(2, \mathbb{Z})$ le sous-groupe de SL$(2, \mathbb{R})$ dont les éléments sont les matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On admet que SL$(2, \mathbb{Z})$ est discret dans SL$(2, \mathbb{R})$.

Soit Γ l'image de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ par le morphisme $\rho : \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Isom}(\mathbb{H}, g)$. On admet que Γ agit proprement sur $\mathbb{H}$, que $\Delta = \{z = x + iy \in \mathbb{H} : |x| \leq \frac{1}{2} \text{ et } |z| \geq 1\}$ (voir le dessin ci-dessous) en est un domaine fondamental et qu'il est engendré par les isométries $S(z) = -\frac{1}{z}$ et $T(z) = z + 1$.

1 - Montrer que l'action de Γ sur $\mathbb{H}$ n'est pas libre. (Voir le stabilisateur du point i.)

2 - Dessiner le quotient $\mathcal{O} = \mathbb{H}/\Gamma$. À quelle surface connue est-il homéomorphe ?



Exercice 13

Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ on considère les points $A = (1,0)$, $B = (-1,0)$, $C = (0,2)$ et $D = (0,-2)$. On pose $S_1 = \mathbb{R}^2 \backslash \{A, B\}$ et $S_2 = \mathbb{R}^2 \backslash \{C, D\}$; S_1 et S_2 sont deux surfaces régulières.

Montrer que S_1 et S_2 sont difféomorphes (exhiber un difféomorphisme $\varphi : S_1 \longrightarrow S_2$, le plus simple possible).

Exercice 14

On note S la surface $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Soient $\lambda \in]0,1[$ et $\Phi : \Gamma \times S \longrightarrow S$ l'action différentiable de $\Gamma = \mathbb{Z}^2$ définie par $\Phi((k,\ell),(x,t)) = (x + k, \lambda^\ell t)$.

Montrer que Φ est libre et propre. Qu'est-ce que la surface $\Sigma = S/\Gamma$?

RÉFÉRENCES

[Be] Beardon, A. F. *The Geometry of Discrete Groups.* GTM 91, Springer-Verlag, (1983).

[BP] Benedetti, R. & Petronio, C. *Lectures on Hyperbolic Geometry.* Universitex, Springer-Verlag, (1992).

[BBM] Berard Bergery, L., Bourguignon, J. P. & Mazet, E. *Variétés à courbure négative.* Publications Mathématiques de l'Université de Paris VII, (1971).

[Ca] do Carmo, M. *Geometria riemanniena.* Projeto Euclides, Rio de Janeiro, (1988).

[Ct] Cartan, H. *Cours de calcul différentiel.* Collection Méthodes, Hermann, (1977).

[DNF] Doubrovine, B., Novikov, S. & Fomenko, A. *Géométrie contemporaine.* Tomes I, II et III Editions MIR, (1979).

[Fr] Freitag, E. *Hilbert Modular Forms.* Springer-Verlag, (1990).

[JS] Jones, G. & Singerman, D. *Complex Functions. An algebraic and geometric viewpoint.* Cambridge University Press, (1987).

[La] Lang, S. *Faire des Maths : grands problèmes de géométrie et de l'espace.* Revue du Palais de la découverte 12, 114, (1984), 21-72.

[Ma] Maass, H. *Lectures on Modular Functions of one Complex Variable.* Tata Institute of Fundamental Research, (1964).

[Po] Postnikov, M. *Leçons de géométrie. Variétés différentiables.* Editions MIR, (1990).

[Ra] Ratcliffe, J.G. *Foundations of Hyperbolic Geometry.* GTM 149, Springer-Verlag (1994).

[ST] Sá Earp, R. & Toubiana, E. *Introduction à la géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann.* Bibliothèque des Sciences, Diderot Éditeur (1997).

[Ve] Verjovsky, A. *Introducción a la geometría y variedades hiperbólicas.* Publié au Mexique par Instituto Politéchnico Nacional, (1986).

A. El Kacimi Alaoui

LMI, Le Mont Houy

Université Polytechnique Hauts-de-France

59313 Valenciennes Cedex 9 – France

aziz.elkacimi@uphf.fr

http://perso.numericable.fr/azizelkacimi/