PETITE INTRODUCTION AUX ESPACES PROJECTIFS

A. El Kacimi

1. Motivation et définition

1.1. Une première approche

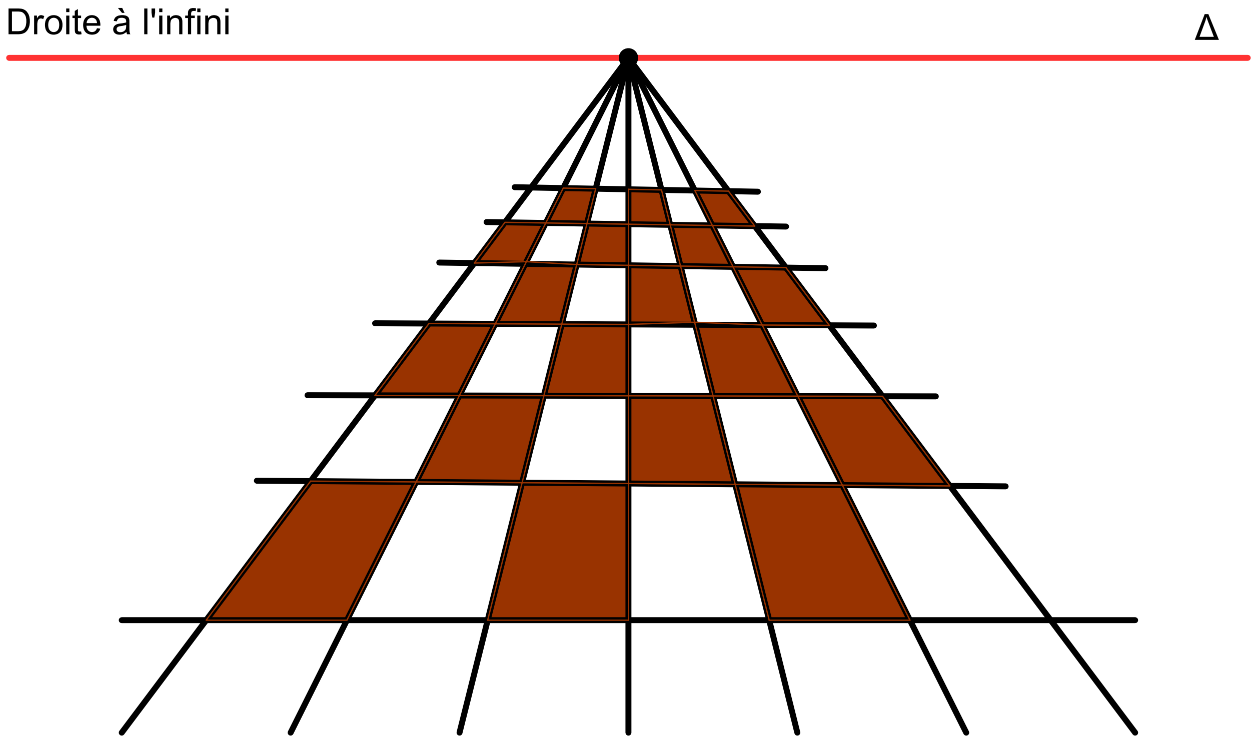

Fig. (1.1)

Dans une salle "infinie" on observe le carrelage du sol : les droites parallèles qui partent du point où on est semblent se rapprocher entre elles au fur et à mesure qu'elles s'éloignent ! Là où elles se "rencontrent" est un *point à l'infini*. Si on fait bouger la direction du carrelage, les nouvelles droites parallèles vont se "rencontrer" en un autre point. On répète l'expérience ; on pourrait donc considérer que l'ensemble de tous ces points à l'infini que l'on obtient se situent sur une droite qu'on pourrait appeler *droite à l'infini* du plan ou *droite à l'horizon* ou en encore, pour utiliser un langage artistique, la *ligne de fuite* !

C'est l'un des points de départ de la géométrie projective. Il décrit la nécessité de compléter le plan affine pour lever l'interdiction à des droites parallèles de se rencontrer. Un autre point de vue est lié à ce qui est le cœur de ce qu'on appelle une *géométrie* au sens de Félix Klein : se donner un groupe et déterminer les propriétés qu'il préserve. Par exemple :

– la *géométrie affine* est l'étude des transformations qui préservent l'alignement (c'est ce qu'on appelle les transformations *affines*) ;

– la *géométrie euclidienne* est l'étude des transformations qui préservent la distance (c'est ce qu'on appelle les *isométries*) ;

– la *géométrie conforme* est l'étude des transformations qui préservent les angles, donc la *forme* (c'est ce qu'on appelle les transformations *conformes* ; elles contiennent les *similitudes*).

Et qu'est-ce que la *géométrie projective* ? Que conserve-t-elle ? Comme l'adjectif "projective" l'indique, tout ce qui se conserve par "projection". On va essayer d'en comprendre quelques éléments sur la figure ci-dessous.

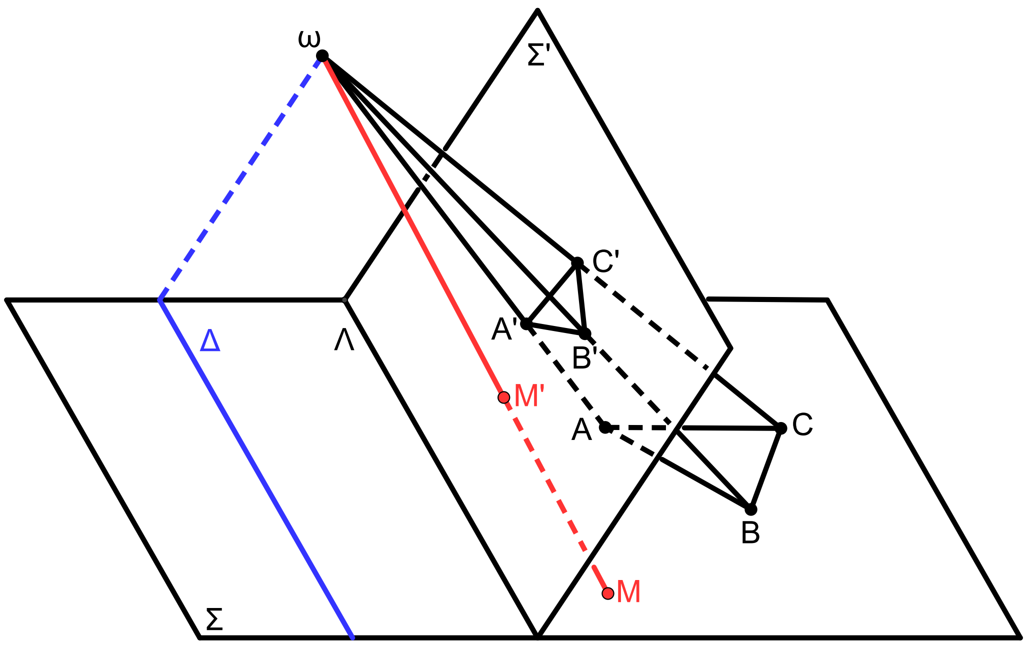

Fig. (1.2)

On se donne deux plans Σ et Σ' dans l'espace et un point ω en dehors des deux. Pour simplifier (parce que ce n'est qu'un exemple de motivation) on suppose que Σ et Σ' se coupent en une droite Λ. Le plan parallèle à Σ' et passant par ω coupe Σ en une droite Δ parallèle à Λ.

Soit M un point de Σ en dehors de Δ. La droite (ωM) coupe le plan Σ' en un unique point M' ; on dira que M' est l'image de M par la *projection* de *pôle* ω. On n'a pas vraiment une application de Σ sur Σ' : les points de Δ n'ont pas d'image dans Σ' par ce procédé. Mais si on adjoint à Σ' une "droite à l'infini" Λ_∞ (comme dans Fig.(1.1)) chaque $M \in \Delta$ définit, avec le point ω, une direction de droites parallèles qui se rencontrent sur Λ_∞ en un point M'. Nous avons donc une application $p : \Sigma \longrightarrow \Sigma' \cup \Lambda_\infty$. Que préserve-t-elle alors ? On voit clairement qu'elle envoie trois points alignés sur trois points alignés ! Elle envoie donc droite de Σ sur droite de $\Sigma' \cup \Lambda_\infty$. Et c'est une propriétété importante (qu'on a déjà dégagée pour les applications affines). On dira alors que la "droite" est une *forme projective*. En revanche une telle application n'envoie pas un cercle sur un autre cercle ; elle peut le déformer un peu : il pourrait se transformer en une *ellipse* par exemple (c'est l'ombre d'une assiette ronde sur un mur), une *parabole* ou une *hyperbole*. (Nous n'avons pas encore étudié ces trois derniers objets qui constituent ce qu'on appelle les *coniques*.) De même que pour la droite on dira alors que la "conique" est une forme projective. Ce sont les premiers *invariants* de la géométrie projective ; il y en a d'autres mais qui ne seront abordés qu'en Master.

1.2. Définition d'un espace projectif

Nous allons donner une définition générale de l'espace projectif et ensuite nous allons voir comment elle se justifie (en nous limitant aux petites dimensions). Comme on l'a un peu senti sur les exemples qu'on vient de considérer, les directions de droites dans un espace vectoriel sont l'ingrédient essentiel.

Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{K}$ (qui sera toujours $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On convient que le mot *droite* désigne un sous-espace vectoriel de dimension 1 (que $\mathbb{K}$ soit $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Sur $\mathcal{E} \setminus \{0\}$ (l'espace $\mathcal{E}$ privé du vecteur nul) on définit une relation comme suit :

$$x \,\mathcal{R}\, y \Longleftrightarrow \text{ il existe } \lambda \in \mathbb{K}^* \text{ tel que } y = \lambda x. \tag{1}$$

On vérifie facilement que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence ; une classe d'équivalence n'est rien d'autre qu'une droite de $\mathcal{E}$ privée du vecteur nul (c'est la "même chose" que $\mathbb{R}^*$ lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{C}^*$ lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). L'ensemble quotient $(\mathcal{E} \setminus \{0\})/\mathcal{R}$ (celui des classes d'équivalence) est appelé *espace projectif* associé à $\mathcal{E}$; on le note $\mathbb{P}(\mathcal{E})$. (Il est noté $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ lorsque $\mathcal{E} = \mathbb{K}^{n+1}$.) Ses éléments sont appelés *points*. On a une application naturelle, la *projection canonique* :

$$\pi : \mathcal{E} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E}) \tag{2}$$

qui associe à tout vecteur non nul la droite qu'il engendre et donc le point qu'elle définit dans $\mathbb{P}(\mathcal{E})$. Lorsque $\mathcal{E}$ est euclidien, on peut montrer (mais on ne le fera pas ici) que $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ peut être équipé d'une unique topologie pour laquelle l'application π est à la fois continue et ouverte.

• L'espace vectoriel $\mathcal{E} = \{0\}$ ne contient aucune droite. Donc $\mathbb{P}(\mathcal{E}) = \emptyset$.

• Lorsque $\mathcal{E}$ est de dimension 1 il ne contient qu'une seule droite. Donc $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ est réduit à un point.

• Si $\mathcal{E}$ est de dimension 2 (un plan vectoriel), on dira que $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ est une *droite projective* (réelle si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et complexe si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

• Si $\mathcal{E}$ est de dimension 3, on dira que $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ est un *plan projectif* (réel si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et complexe si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

2. Éléments rattachés à $\mathbb{P}(\mathcal{E})$

2.1. Les coordonnées homogènes

Soient $\mathcal{E}$ un espace vectoriel (réel ou complexe) de dimension $n+1$ et $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ l'espace projectif qui lui est associé. On se donne une base $(e_1, \cdots, e_{n+1})$ de $\mathcal{E}$. Soit x un point de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$; alors x est donné par une droite vectorielle ℓ de $\mathcal{E}$ et tout vecteur u de cette droite représente le point x. Les coordonnées $(x_1, \cdots, x_{n+1})$ de u sont appelées *coordonnées homogènes* de x. Elles ne sont pas uniques et sont données à un scalaire multiplicatif près : $(x_1, \cdots, x_{n+1})$ et $(x'_1, \cdots, x'_{n+1})$ représentent le même point si, et seulement si, elles sont *proportionnelles*, c'est-à-dire il existe un scalaire non nul λ tel que :

$$x'_1 = \lambda x_1, \cdots, x'_{n+1} = \lambda x_{n+1}. \tag{3}$$

2.2. La dimension projective

Comme $\mathcal{E}$ est un objet géométrique, il est naturel de chercher à comprendre dans quel sens il ressemble à une “courbe”, une “surface”, un “solide” ou autre ; autrement dit, que pourrait être sa “dimension” par exemple ? Dans certains manuels de géométrie il est décrété que :

par définition, la dimension de l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ est n lorsque celle de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ est $n+1$!

Cela se comprend assez facilement pour $\mathcal{E} = \{0\}$ et $\dim(\mathcal{E}) = 1$. Mais pourquoi omettre une motivation de façon générale ? On va expliquer pourquoi $\dim(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$ ne peut être que n lorsque $\dim(\mathcal{E}) = n+1$. D'abord il faut se rappeler un peu que la notion de *dimension* n'est rien d'autre que celle de *degré de liberté* : nombre de paramètres pour “décrire une situation”. C'est cela qu'on va voir pour motiver la définition de la dimension de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$. On se mettra dans le cas réel et on supposera que $\mathbb{P}(\mathcal{E}))$ est euclidien.

• Prenons $n = 1$ c'est-à-dire $\dim(\mathcal{E}) = 2$. Chaque point x de l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ est représenté par une droite Δ dans $\mathcal{E}$; celle-ci coupe le cercle unité en deux points M_1 et M_2 (*cf.* Fig. (1.3)) ; chacun des deux points M_1 et M_2 représente x. Les points de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ correspondent bijectivement aux points de l'arc semi-ouvert qui part de A dans le sens trigonométrique vers B (ce dernier étant exclu).

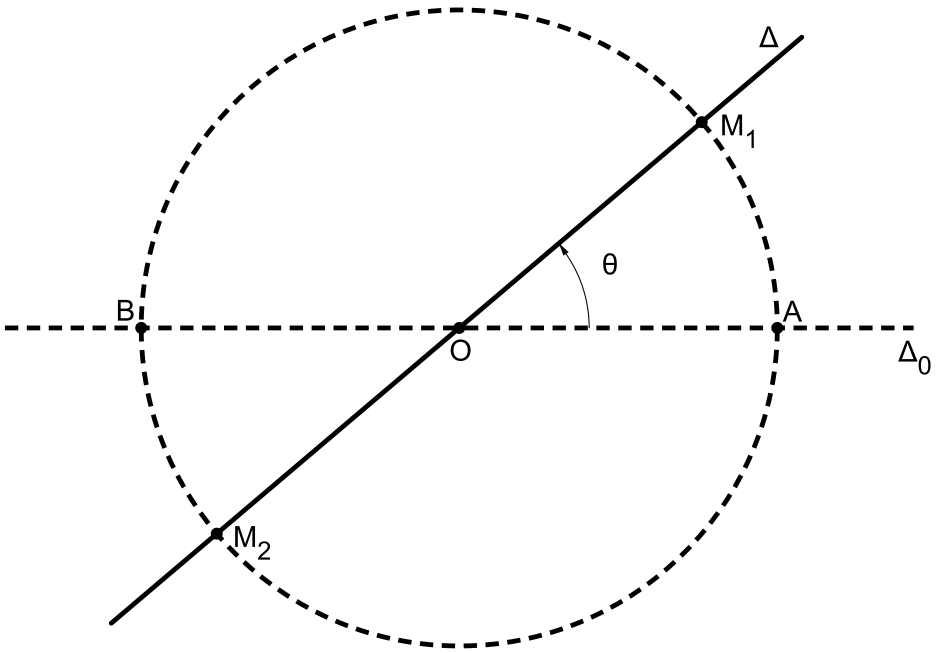

Fig. (1.3)

Pour connaître le point M_1 il suffit donc de connaître la valeur de l'angle θ ; un seul paramètre suffit : il est normal alors de décréter que la dimension de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ est 1.

• Prenons maintenant $n = 2$ c'est-à-dire $\dim(\mathcal{E}) = 3$. Alors comme avant, chaque point x de l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ est représentée par une droite Δ dans $\mathcal{E}$; celle-ci coupe la sphère unité en deux points M_1 et M_2 (*cf.* Fig. (0.4)). Les points de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ correspondent bijectivement à ceux d'une demi-sphère (un ballon sectionné par un plan passant par son centre). Comme on peut le voir sur le dessin un point de cette demi-sphère est repéré par les mesures (φ, θ) de deux angles. Deux paramètres, et exactement deux, suffisent : il est normal alors de décréter que la dimension de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ est 2.

• Si on continue le même type de raisonnement pour $n \geq 3$, on peut voir que les points de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ correspondent bijectivement à ceux d'une demi-sphère de la sphère unité $\mathbb{S}^n$ de l'espace euclidien $\mathcal{E}$ de dimension $n+1$; chacun de ces derniers est décrit par n paramètres. Ce qui justifie le fait qu'on décrète que la dimension de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ est n.

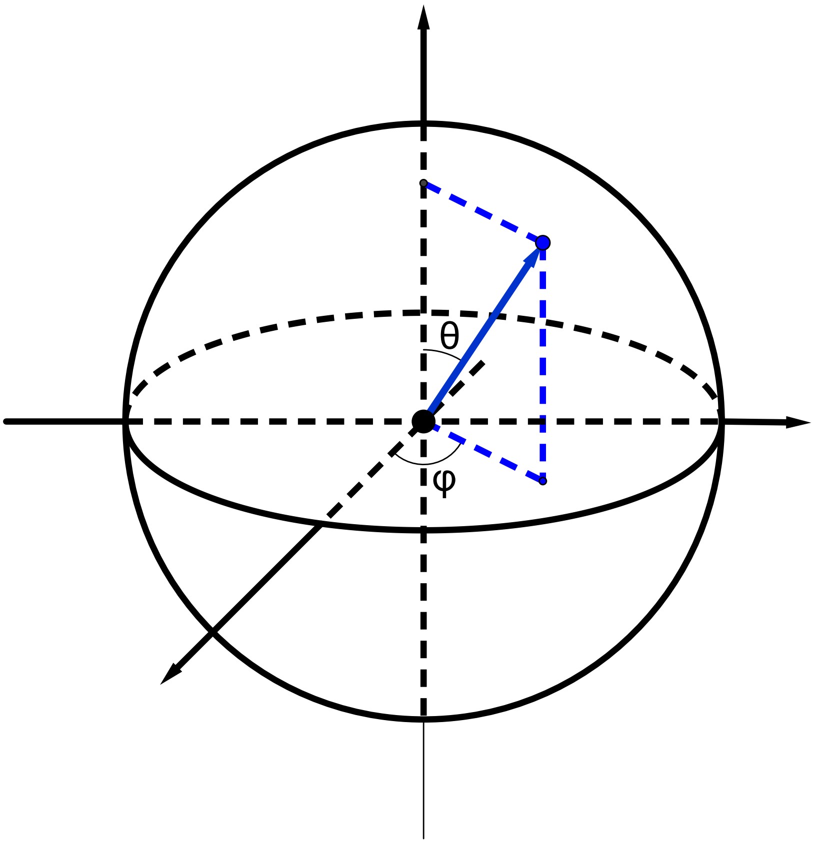

Fig. (1.4)

2.3. Sous-espaces projectifs

Soit $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ un espace projectif associé à l'espace vectoriel $\mathcal{E}$. Une partie non vide V de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ est dite *sous-espace projectif* de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ si elle est l'image par la projection canonique $\pi : \mathcal{E} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$ d'un sous-espace vectoriel $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ non trivial (*i.e.* non réduit à $\{0\}$). Ainsi par exemple :

- Si $\mathcal{F}$ est une droite vectorielle, $\pi(\mathcal{F})$ est un point de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$.
- Si $\mathcal{F}$ est un plan vectoriel, $\pi(\mathcal{F})$ est une droite de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ (on dira *droite projective*).

Il y a bien sûr une correspondance biunivoque entre les sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ et les sous-espaces vectoriels non triviaux de $\mathcal{E}$. En effet, la correspondance qui à un sous-espace vectoriel $\mathcal{F}$ de dimension ≥ 1 est surjective par définition même et il est facile de vérifier que, si $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont distincts, alors les sous-espaces projectifs associés $\mathbb{P}(\mathcal{F}_1)$ et $\mathbb{P}(\mathcal{F}_2)$ le sont aussi.

3. Repères projectifs

Le repérage d'un vecteur dans un espace vectoriel de dimension n se fait à l'aide de scalaires $(x_1, \cdots, x_n)$ par rapport à une base $(e_1, \cdots, e_n)$; celui d'un point dans un espace affine de dimension n à l'aide de $n+1$ points dans un repère affine $(c_0, c_1, \cdots, c_n)$. Qu'en est-il alors pour un espace projectif de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ de dimension n ? (provenant donc de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ de dimension $n+1$). On pourrait être tenté de penser qu'il suffirait de prendre une base de $\mathcal{E}$ et de la projeter par π pour obtenir un repère de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$. Ce n'est pas tout à fait suffisant malheureusement ; c'est ce qu'on va voir dans cette section 3. On se donne une base $(e_1, \cdots, e_{n+1})$ de $\mathcal{E}$.

3.1. On pose $a_1 = \pi(e_1), \cdots, a_{n+1} = \pi(e_{n+1})$. Dire pourquoi trois points quelconques parmi les $a_1, \cdots, a_{n+1}$ ne sont pas sur une même droite projective.

3.2. Que peut-on comprendre par : *le* $(n+1)$*-uplet* $(a_1, \cdots, a_{n+1})$ *est un candidat pour être un repère éventuel de l'espace projectif* $\mathbb{P}(\mathcal{E})$?

Si tel était le cas, on devrait avoir des scalaires $(x_1, \cdots, x_{n+1})$ repérant le point x indépendamment d'un type de base $(e_1, \cdots, e_{n+1})$ se projetant sur $(a_1, \cdots, a_{n+1})$. Soient $x \in \mathbb{P}(\mathcal{E})$ et $u = x_1 e_1 + \cdots + x_{n+1} e_{n+1}$ un vecteur de $\mathcal{E}$ tel que $\pi(u) = x$. Soit $(e'_1, \cdots, e'_{n+1})$ une autre base se projetant sur $(a_1, \cdots, a_{n+1})$.

3.3. Quelle relation y a-t-il entre les bases $(e_1, \cdots, e_{n+1})$ et $(e'_1, \cdots, e'_{n+1})$? Quel est alors le problème auquel on est confronté ?

3.4. On note e_0 le vecteur $e_1 + \cdots + e_{n+1}$ et a_0 sa projection $\pi(e_0)$. Montrer que le $(n+2)$-uplet $(a_0, a_1, \cdots, a_{n+1})$ définit un système permettant de repérer n'importe quel point x de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$.

On dira alors que $(a_0, a_1, \cdots, a_{n+1})$ est un *repère projectif* de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$. Il permet de repérer sans ambiguïté les points de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$: par définition, les *coordonnées* de x dans ce repère projectif sont ses coordonnées homogènes $(x_1, \cdots, x_{n+1})$ dans n'importe quelle base $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n+1})$ de $\mathcal{E}$ vérifiant :

$$a_1 = \pi(\varepsilon_1), \cdots, a_{n+1} = \pi(\varepsilon_{n+1}) \quad \text{et} \quad a_0 = \pi(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{n+1}). \tag{4}$$

4. Le groupe projectif

On se donne un espace vectoriel $\mathcal{E}$ de dimension $n+1$. On rappelle qu'un *automorphisme* de $\mathcal{E}$ est une application linéaire bijective $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$. Les automorphismes de $\mathcal{E}$ forment un groupe qu'on note $\mathrm{GL}(\mathcal{E})$ et qu'on appelle *groupe linéaire* de $\mathcal{E}$.

4.1. Montrer qu'une *homothétie*, c'est-à-dire une application $h : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ de la forme $h(u) = \lambda u$ où λ est un scalaire indépendant de u, est un automorphimse de $\mathcal{E}$.

4.2. Montrer que h commute avec n'importe quel autre automorphisme g de $\mathcal{E}$. En déduire que le groupe $\mathcal{H}$ des homothéties de $\mathcal{E}$ est *distingué* dans $\mathrm{GL}(\mathcal{E})$ (on dit aussi *normal* ou *invariant*).

Soient maintenant $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux espaces vectoriels (tous les deux réels ou tous les deux complexes) et $\widetilde{f} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$ une application linéaire.

4.3. Montrer que l'injectivité de $\widetilde{f}$ est une condition nécessaire pour qu'elle induise une application $f : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E}')$. Montrer alors que f est aussi surjective.

4.4. Montrer que si $f : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E}')$ est bijective alors $\widetilde{f}$ est un isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}'$. Lorsque $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$ on dira que f est une *homographie* (ou *automorphisme*) de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$.

4.5. Montrer que l'ensemble $\mathcal{H}(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$ des homographies de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ est un groupe (pour la composition des applications) et que l'application naturelle :

$$\phi : \widetilde{f} \in \mathrm{GL}(\mathcal{E}) \longmapsto f \in \mathcal{H}(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$$

est un morphisme de groupes.

4.6. Montrer que le noyau de ϕ est exactement le goupe $\mathcal{H}$ des homothéties de $\mathcal{E}$. En déduire que le groupe $\mathcal{H}(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$ est isomorphe au groupe quotient $\mathrm{GL}(\mathcal{E})/\mathcal{H}$.

Le groupe $\mathcal{H}(\mathbb{P}(\mathcal{E})) \simeq \mathrm{GL}(\mathcal{E})/\mathcal{H}$ est appelé *groupe projectif* de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$. Dans la littérature, les groupes naturellement isomorphes $\mathrm{GL}(\mathcal{E})/\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$ sont souvent tous les deux notés $\mathrm{PGL}(\mathcal{E})$.

5. Exercices

5.1. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de même dimension $n+1$. Soient $(a_0, a_1, \cdots, a_{n+1})$ un repère projectif de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ et $(a'_0, a'_1, \cdots, a'_{n+1})$ un repère projectif de $\mathbb{P}(\mathcal{E}')$.

Montrer qu'il existe une unique homographie $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \xrightarrow{f} \mathbb{P}(\mathcal{E}')$ telle que $f(a_i) = a'_i$ pour tout $i = 0, 1, \cdots, n+1$.

5.2. On prend $\mathcal{E} = \mathbb{C}^2$. Alors $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ est la droite projective complexe qu'on note $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Décrire sur cet exemple les objets qu'on vient d'introduire : point à l'infini, coordonnées homogènes, repère projectif et en particulier la notion d'homographie dont on donnera explicitement l'expression.