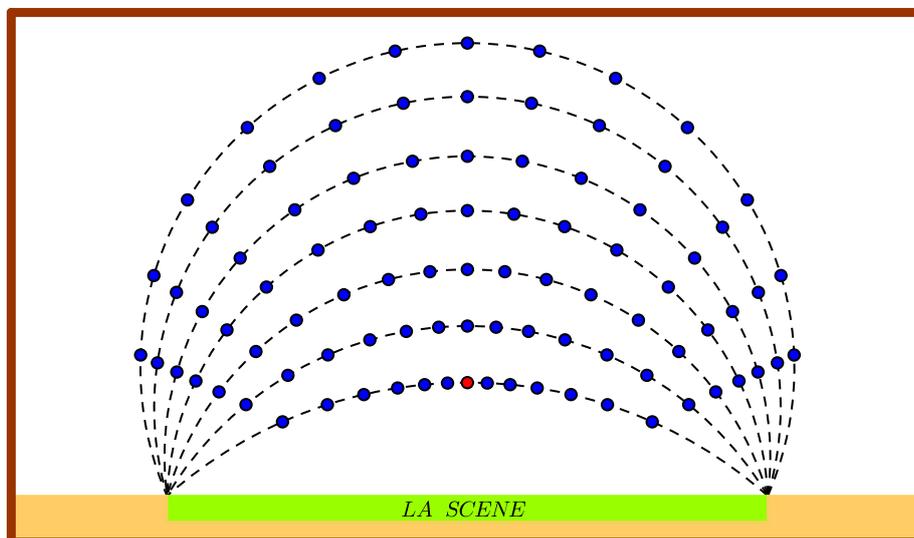


## Où faut-il prendre place pour bien voir ?

Petite histoire en géométrie plane !

AZIZ EL KACIMI



Salle de spectacle

Au *Théâtre de l'Étoile*, on joue *Le fou de Magdalène*, une pièce contant une folle histoire d'amour. Elle est superbement mise en scène, avec, dans le rôle de Magdalène, la belle et gracieuse Devi, sosie parfait de Rym Gaspard qui fut la première actrice à avoir interprété le personnage il y a plus d'un siècle.

Paul est professeur de mathématiques ; il est aussi un passionné de l'art oratoire. Pour rien au monde, il ne manquera l'unique représentation qui aura lieu ce soir à vingt heures. Maniaque, précautionneux et craignant toujours de manquer ses rendez-vous, il quitte son domicile à dix-huit heures. Une demi-heure après, il est devant le guichet. C'est le premier client. Il achète son billet et se rend dans la salle de spectacle. Il n'y a encore personne et peut donc s'asseoir où bon lui semble. Il se met alors à parcourir toutes les rangées en quête du siège d'où il pourrait admirer au mieux la scène. Il le trouve, s'y installe et n'en bouge plus.

Mais sa curiosité géométrique est insaisissable : le moindre motif sur lequel ses yeux balayeurs se rivent le plonge dans des réflexions et le pousse à chercher à comprendre. Cette fois-ci encore il n'y échappe pas. Il commence à se poser des questions : « Pourquoi ce siège au milieu de la première rangée me donne-t-il le meilleur angle de vue ? Comment ferais-je si au lieu de toutes ces rangées il n'y avait qu'un simple banc ? – Pas de panique, lui répond la voix, il suffit de bien poser le problème, fournir une petite dose de travail et jeter un bon *regard géométrique* sur des dessins clairs et précis ! » La sagesse a parlé.

Alors, suivez Paul, il vous emmènera découvrir une parcelle de son jardin géométrique florissant, là où il a puisé les outils qui lui ont servi à résoudre élégamment son problème.

C'est lui qui parle !

Je fais d'abord quelques hypothèses pour modéliser le problème en termes géométriques. En Terminale, je me rappelle que quand on nous soumettait un exercice de physique, on nous demandait de laisser de côté certains paramètres. Par exemple, la phrase « *On néglige les frottements* » accompagnait souvent les énoncés. C'est ce que je vais faire, en supposant que tout se passe dans le plan, ce qui n'est en fait qu'une approximation : en réalité la salle n'est pas vraiment plane et tout ce qui est dedans a une certaine épaisseur.

**Problème.** Où faut-il prendre place sur un banc dans la salle de spectacle pour avoir le plus grand angle de vue sur la scène ?

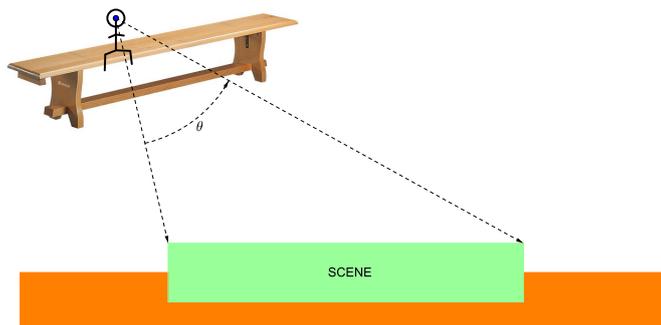


Figure 1

Soit  $\mathbb{E}$  le plan vectoriel  $\mathbb{R}^2$  muni de sa structure affine canonique et de son produit scalaire usuel. Dans le dessin ci-dessous, la scène de théâtre est représentée par un segment  $AB$  de longueur  $d > 0$ . Le problème consiste donc à trouver un point  $M$  sur le segment  $M_0M_1$  de telle sorte que l'angle géométrique  $\widehat{AMB}$  ait une mesure maximale.

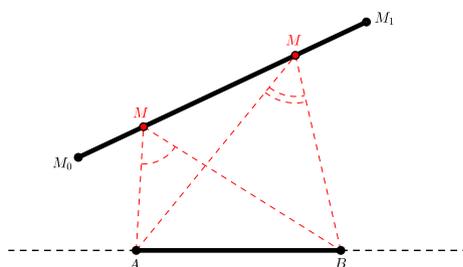


Figure 2

Cette fois-ci, le problème est théorique et, bien qu'élémentaire, sa résolution n'est pas immédiate : elle fait quand même appel à quelques outils relativement importants de la géométrie euclidienne plane.

### 1. L'angle $\theta$ et ses courbes de niveau

**1.1.** On note  $\Omega$  la partie du plan  $\mathbb{E}$  obtenue en privant celui-ci des deux demi-droites fermées  $\delta^+ = \{x = 0 \text{ et } y \geq \frac{d}{2}\}$  et  $\delta^- = \{x = 0 \text{ et } y \leq -\frac{d}{2}\}$  et  $\theta$  l'angle orienté  $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$  ; c'est une fonction  $\theta : M \in \Omega \mapsto \theta(M) \in ]0, 2\pi[$ . Comme on le voit sur le dessin ci-dessous,  $\theta \in ]0, \pi[$  si  $M$  est dans le demi-plan ouvert du côté droit de la droite  $(AB)$  et  $\theta \in ]\pi, 2\pi[$  si  $M$  est dans le demi-plan ouvert du côté gauche ;  $\theta = \pi$  si  $M$  est sur le segment ouvert  $\delta^0 = ]AB[$ .

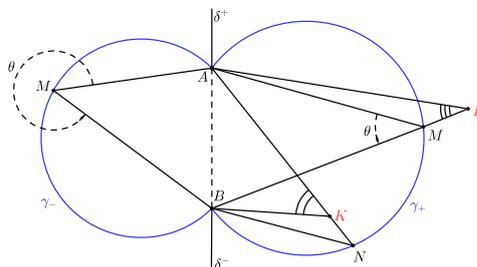


Figure 3

Lorsqu'on prescrit une valeur pour  $\theta$ , par exemple dans  $]0, \pi[$ , le point  $M$  reste sur un arc de cercle  $\gamma_+$ . Tout point à l'intérieur donne un angle plus grand, par exemple  $\widehat{AKB}$  et tout point à

l'extérieur donne un angle plus petit, par exemple  $\widehat{ALB}$ . Ces propriétés seront importantes pour la résolution du problème.

**1.2.** Lorsqu'on fait varier  $\theta$  dans  $]0, 2\pi[$ , l'arc de cercle correspondant varie dans  $\Omega$ . On obtient ainsi une famille de courbes disjointes et recouvrant  $\Omega$  ; toutes sont des arcs de cercles sauf celle correspondant à  $\theta = \pi$  qui se réduit au segment ouvert  $]AB[$ .

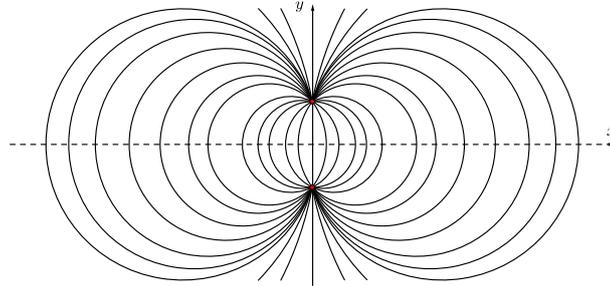


Figure 4

La répartition de ces courbes sur  $\Omega$  peut être décrite analytiquement à l'aide d'une autre fonction définie sur l'axe réel, et donc ne dépendant que de la variable  $x \in \mathbb{R}$ . (Le lecteur souhaitant plonger dans l'exercice peut se référer à la figure ci-dessous.)

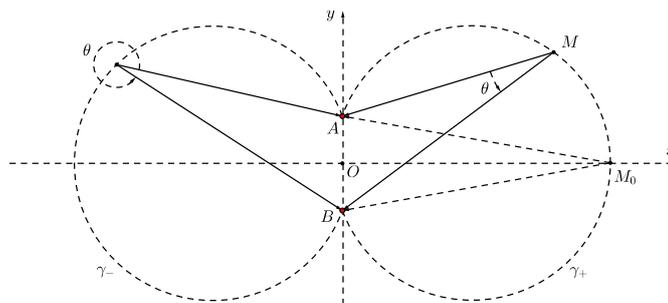


Figure 5

## 2. Là où il faut se mettre !

On se situera dans le demi-plan  $\mathbb{E}^+ = \{(x, y) \in \mathbb{E} : x > 0\}$  puisque c'est là que se trouve la salle de spectacle et où tout se passe de manière effective. Notons  $\mathcal{F}^+$  la famille de nos courbes qui se trouvent dans  $\mathbb{E}^+$ . On a une bijection :

$$\theta \in ]0, \pi[ \mapsto \gamma(\theta) \in \mathcal{F}^+$$

associant à chaque angle  $\theta$  sa courbe de niveau  $\gamma(\theta)$ . Convenons de dire que la courbe  $\gamma$  est *plus petite* que la courbe  $\gamma'$  (et on écrit  $\gamma \leq \gamma'$ ) si le rayon de l'arc  $\gamma$  est plus petit que celui de  $\gamma'$

On cherche la position du point  $M$  sur le segment  $[M_0M_1]$  (le banc dans  $\mathbb{E}^+$ ) telle que l'angle de vue  $\theta = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$  soit maximal. Un simple regard sur la figure 3, combiné à ce qu'on a dit dans la sous-section 1.1, montre qu'il suffit à cet effet de reconnaître la courbe  $\gamma$  (elle est unique) de la famille  $\mathcal{F}^+$  qui touche  $[M_0M_1]$  en un seul point et telle que les autres points de ce même segment  $[M_0M_1]$  soient à l'extérieur de  $\gamma$ . Il y a quelques cas à distinguer en fonction de la position du segment  $[M_0M_1]$  "relativement" au segment  $[AB]$ .

### 2.1. Les points $A, B, M_0$ et $M_1$ sont non cocycliques

Dans ce cas même, il y a deux situations géométriques différentes. Soient  $\gamma_0$  le cercle passant par  $A, B$  et  $M_0$  et  $\gamma_1$  celui passant par  $A, B$  et  $M_1$ . (Ces deux cercles sont bien entendu distincts.)

- i) La feuille  $\gamma_0$  est plus petite que  $\gamma_1$  et le segment  $[M_0M_1]$  est à l'extérieur de  $\gamma_0$  (voir dessin ci-dessous). La position cherchée est alors le point  $M_0$ .

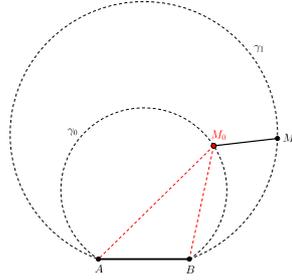


Figure 6

- ii) La courbe  $\gamma_0$  est plus petite que  $\gamma_1$  et recoupe le segment  $[M_0M_1]$  en un autre point  $N$ . La position cherchée est le point  $M$  du segment ouvert  $]M_0N[$  en lequel un cercle passant par  $A$  et  $B$  est tangent à la droite  $(M_0M_1)$ . (On construit  $M$  de la même façon que dans la sous-section 2.2.)

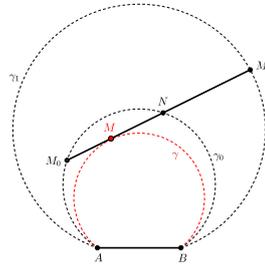


Figure 7

## 2.2. Les points $A, B, M_0$ et $M_1$ sont sur un cercle $\Gamma$

Dans cette situation la position qu'on cherche est donnée par le point  $M$  dans l'intervalle ouvert  $]M_0M_1[$  où la droite  $(M_0M_1)$  est tangente à l'une des courbes de la famille  $\mathcal{F}^+$  ; le problème consistera donc à chercher la courbe en laquelle il y a cette tangence. Sa construction géométrique est donnée ci-dessous.

- i) Si le segment  $[M_0M_1]$  est parallèle à la droite  $(AB)$ , sa médiatrice est aussi celle du segment  $[AB]$ . Le cercle  $\gamma$  cherché est celui passant par  $A$  et  $B$  et tangent à  $[M_0M_1]$  en son milieu  $M$ .

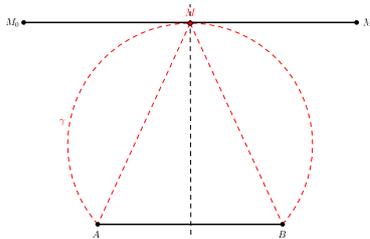


Figure 8

- ii) Si la droite  $(M_0M_1)$  n'est pas parallèle à la droite  $(AB)$ , elle coupe celle-ci en un point  $S$ . Par  $S$  on mène la perpendiculaire à  $(M_0M_1)$  et de part et d'autre on repère dessus les points  $A'$  et  $B'$  tels que  $SA' = SA$  et  $SB' = SB$ . Le cercle de diamètre  $[A'B']$  coupe la droite  $(M_0M_1)$  en un point  $M$  de telle sorte que :

$$SM^2 = SA \cdot SB = p(S, \gamma) = \text{puissance de } S \text{ par rapport à } \gamma.$$

Comme  $\Gamma$  et  $\gamma$  passent tous les deux par les points  $A$  et  $B$ , la droite  $(AB)$  est leur *axe radical*.  
Donc :

$$SM^2 = p(S, \gamma) = p(S, \Gamma) = SM_0 \cdot SM_1.$$

Par suite  $SM_0 < SM < SM_1$ . Le point  $M$  est donc sur le segment ouvert  $]M_0M_1[$ . C'est exactement le point qu'on cherche *i.e.* celui en lequel le segment  $[M_0M_1]$  est tangent à  $\mathcal{F}^+$ , c'est-à-dire la position sur le banc qui donne le plus grand angle de vue sur la scène de spectacle.

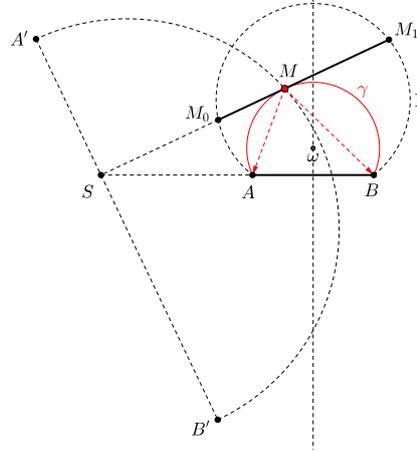


Figure 9

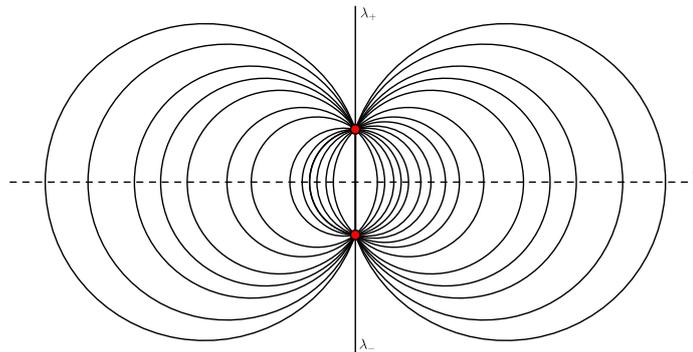
– Tout cela est-il nécessaire ? pourrait arguer quidam.

– Non ! Dans la vie réelle, le spectateur a toujours la possibilité de chercher à se positionner sur le banc approximativement au point qui convient le mieux à sa vue sur la scène. Et cela suffit.

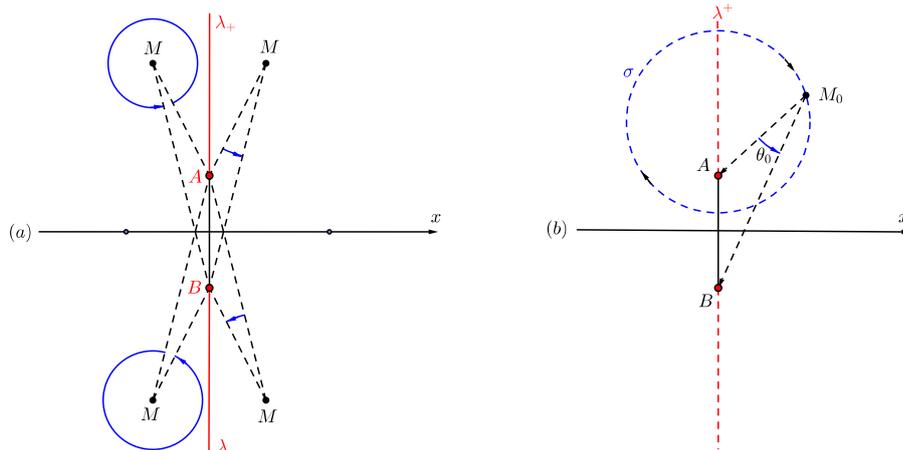
Mais il faut considérer ce problème pour son intérêt pédagogique et formateur. Il est en plus d'une richesse variée en géométrie plane. Et c'est par la pratique de la géométrie qu'on apprend le mieux à vraiment raisonner en mathématiques. Dommage qu'on la laisse dépérir et disparaître petit à petit des programmes de l'enseignement.

### Pour ceux qui veulent un peu plus compliqué !

- Les courbes de niveau de la fonction  $\theta : M \in \Omega \longrightarrow \theta(M) \in ]0, 2\pi[$  partitionnent l'ouvert  $\Omega$  et forment un *feuilletage*  $\mathcal{F}$ . Chacune d'elles est appelée *feuille* de  $\mathcal{F}$ .
- On peut étendre  $\mathcal{F}$  à l'ouvert plus grand  $\Omega' = \mathbb{E} \setminus \{A, B\}$  en un feuilletage  $\mathcal{F}'$  en rajoutant deux autres feuilles : les deux demi-droites ouvertes  $\lambda_+ = \{x = 0 \text{ et } y > \frac{d}{2}\}$  et  $\lambda_- = \{x = 0 \text{ et } y < -\frac{d}{2}\}$  (*cf.* dessin ci-dessous).



- La fonction  $\theta$  définit le feuilletage  $\mathcal{F}$  sur  $\Omega$ . Si on veut la prolonger en une "fonction" sur  $\Omega'$  décrivant l'extension  $\mathcal{F}'$  de  $\mathcal{F}$ , on calcule sa limite lorsque  $M$  tend vers  $\lambda_+ \cup \lambda_-$  (au lecteur de donner un sens à cela). Mais cette limite est 0 du côté  $x > 0$  et  $2\pi$  du côté  $x < 0$  (*cf.* dessin ci-dessous).



• Soit  $M_0$  un point de  $\Omega$  pour lequel l'angle  $\theta$  vaut  $\theta_0 \in ]0, \pi[$  par exemple. Si, à partir de  $M_0$ , on fait décrire à un point  $M$  le cercle  $\sigma$  dans le sens indiqué (voir figure (b)), il passe par le segment ouvert  $]AB[$  où  $\theta = \pi$ , ensuite sur la demi-droite ouverte  $\lambda^+$  où  $\theta = 2\pi$  ; s'il revient sur  $M_0$ ,  $\theta$  vaut  $\theta_0 + 2\pi$ . En refaisant un tour, il vaudra  $\theta_0 + 4\pi$  et ainsi de suite. Si on fait tourner  $M$  (à partir de  $M_0$ ) sur  $\sigma$  dans le sens contraire (à celui indiqué sur (b)), sur la semi-droite  $\lambda^+$  l'angle  $\theta$  vaudra  $0$ , puis sur  $]AB[$  il vaudra  $-\pi$ , de retour sur  $M_0$ ,  $\theta = \theta_0 - 2\pi$  et ainsi de suite.

Sur l'ouvert  $\Omega'$ , la fonction  $\theta'$  (extension de  $\theta$ ) censée définir  $\mathcal{F}'$  est donc *multiforme*. Ôter les deux demi-droites fermées  $\delta_+$  et  $\delta_-$  de  $\mathbb{E}$  pour obtenir  $\Omega$  c'est faire des *coupures* sur  $\Omega'$  ; et restreindre  $\theta'$  à  $\Omega$  tel qu'on l'a fait, c'est en donner une *détermination*.

• Le fait que la “fonction”  $\theta'$  soit multiforme vient de ce que  $\Omega'$  n'est pas simplement connexe : son *groupe fondamental* est le groupe libre à deux générateurs  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$  engendré, par exemple, par deux cercles de centres respectifs  $A$  et  $B$ , chacun de rayon  $\varepsilon < \frac{d}{2}$ .

• Deux déterminations (considérées à valeurs réelles) diffèrent par un multiple entier (relatif) de  $2\pi$ . Si donc on compose  $\theta'$  à la projection canonique  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ , où  $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  (quotient du groupe additif  $(\mathbb{R}, +)$  par son sous-groupe  $2\pi\mathbb{Z}$ ), on obtient une application  $\Theta = p \circ \theta' : \Omega' \rightarrow \mathbb{S}^1$  parfaitement définie.

• L'application  $\Theta : \Omega' \rightarrow \mathbb{S}^1$  est une *submersion i.e.* sa différentielle  $d\Theta(M)$  au point  $M$  est une application linéaire surjective pour tout  $M \in \Omega'$ . Pour  $\tau \neq e$  ( $e$  est l'image par  $p$  du sous-groupe  $2\pi\mathbb{Z}$ ), ses *fibres*  $F_\tau = \Theta^{-1}(\tau)$  sont les feuilles de  $\mathcal{F}'$  et pour  $\tau = e$ ,  $F_e$  est constituée des deux feuilles  $\lambda_+$  et  $\lambda_-$ .

• Mais les “singularistes” ne se contenteront pas de cela : ils voudront à coup sûr étendre le feuilletage à tout le plan  $\mathbb{E}$ . Alors ils rajouteront des feuilles dites *singulières* : les deux points  $A$  et  $B$ . Ce qui donne un *feuilletage singulier* du plan.

L'étude des feuilletages singuliers est un thème extrêmement intéressant, et qui offre un champ d'investigation de pointe depuis quelques décennies.

Pour un exposé élémentaire et assez banal sur la théorie des feuilletages voir [ici].