Une promenade à travers les mathématiques !

Aziz El Kacimi

LAMAV, Université de Valenciennes

Conférence à la journée

EXPOSONS-NOUS

Université de Valenciennes, 21 mai 2015

RÉSUMÉ

La cohomologie $H^*(\Gamma, N)$ *d'un groupe discret* Γ *à valeurs dans un* Γ*-module* N *se définit de manière algébrique. On peut donc penser que l'algèbre est son unique terrain de jeu. Il n'en est rien comme nous allons le voir !*

Dans cet exposé, nous ne considérerons que le $H^1(\mathbb{Z}, N)$ *qui nous accompagnera dans la promenade où nous entraînerons l'auditeur pour lui montrer comment ce groupe traverse diverses branches des mathématiques (analyse réelle ou complexe, géométrie, systèmes dynamiques, arithmétique, théorie ergodique...). Nous nous contenterons de traiter des exemples simples et significatifs où cet objet apparaît comme un outil effectif permettant de résoudre quelques problèmes difficiles ou, au moins, de les formuler différemment pour éventuellement les rendre plus abordables.*

1. La topologie fonctionnelle

Il est bien connu qu'une manière d'étudier la proximité entre les éléments d'un ensemble E est d'y mettre une distance d. On obient alors ce qu'on appelle un *espace métrique* (E, d). Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) cette métrique peut parfois être définie par une norme $|| \ ||$ *i.e.* $d(x, y) = ||\overrightarrow{xy}||$. Regardons quelques exemples.

1. **Soient I l'intervalle $[0, 1]$ et s un entier naturel. Notons $E_s = C^s(I, \mathbb{K})$ l'espace des fonctions de classe C^s. Il est bien connu que la norme $||f||_s = \max\left\{\sup_{x\in I} |f^{(k)}| : 0 \leq k \leq s\right\}$ fait de E_s un espace de Banach.**
2. **Mais rien que sur l'espace $E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ il est impossible de définir une norme qui puisse jouer le même rôle, c'est-à-dire qui conserve la continuité par passage à la limite !**
3. **Il faut donc autre chose !**

• On se donne une suite croissante de semi-normes $(p_k)_{k\geq 0}$ sur E. Elle définit sur E une topologie. Si toutes les p_k sont des normes égales à l'une d'entre elles qu'on note p, cette topologie n'est rien d'autre que celle de l'espace normé (E, p).

• Sinon, pour tous $f, g \in E$ on pose :

$$\delta(f, g) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \inf(1, p_k(f - g)).$$

On définit ainsi sur E une métrique, non homogène certes mais invariante par translation. Elle fait de E un espace vectoriel topologique localement convexe.

• On dira que E est un espace de Fréchet s'il est muni d'une norme qui en fait un Banach ou d'une suite croissante de semi-normes $(p_k)_{k\geq 0}$ pour lesquelles la distance δ est complète.

Exemples usuels d'espaces de Fréchet

• **Il y a d'abord les espaces de Banach, les plus connus sont :**

– $\mathcal{B}(X, \mathbb{K}) = \left\{ X \xrightarrow{f} \mathbb{K} : f \textbf{ bornée} \right\}$ **(**X **ensemble quelconque) muni de la norme** $||f||_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

– **Si** X **est un espace topologique compact,**
$\mathcal{C}(X, \mathbb{K}) = \left\{ X \xrightarrow{f} \mathbb{K} : f \textbf{ continue} \right\}$ **muni de la même norme** $||f||_\infty$.

– **Si** $(X, \mathcal{A}, \mu)$ **est un espace mesuré, l'espace** $L^p(X, \mu)$ **des classes (modulo l'égalité** μ**-pp) de fonctions de puissance** $p^{\text{ème}}$ **intégrable (avec** $p \geq 1$**) sur** X **muni de la norme** $||f||_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$.

– **Toujours, lorsque** $(X, \mathcal{A}, \mu)$ **est un espace mesuré, l'espace** $L^\infty(X, \mu)$ **des classes de fonctions** μ**-essentiellement bornées (bornées en dehors d'un ensemble de mesure nulle) muni de la norme :**

$$||f||_\infty = \inf \left\{ \alpha : \alpha \in \mathbb{R}_+ \textbf{ et } |f| \leq \alpha \ \mu\textbf{-pp} \right\}.$$

• **Il y a ceux qui ne sont pas de Banach. Les plus connus sont :**

– $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{K}) = \left\{\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{K} : f \text{ continue}\right\}$ **muni de la suite de semi-normes** $||f||^k = \sup_{-k\leq x\leq k} |f(x)|$.

– $\mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{K}) = \left\{[0,1] \xrightarrow{f} \mathbb{K} : f \text{ de classe } C^\infty\right\}$ **muni de la suite de normes** $||f||^k_\infty = \max_{0\leq s\leq k}\left(\sup_{x\in[0,1]} |f^{(s)}(x)|\right)$.

– **Soient** U **un ouvert de** $\mathbb{C}$ **et** C_k **une suite de compacts d'intérieur non vide et tendant en croissant vers** U**. On note** $\mathcal{H}(U)$ **l'espace des fonctions holomorphes (***i.e.* **les fonctions** f **vérifiant** $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$**) sur** U**. Alors la suite de normes** $||f||^k = \sup_{z\in C_k} |f(z)|$ **fait de** $\mathcal{H}(U)$ **un espace de Fréchet.**

Un exemple important !

Soit $n \geq 1$ un entier. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ sera équipé de son produit scalaire usuel $\langle\ ,\ \rangle$; la norme associée est notée $|\cdot|$. Le tore $\mathbb{T}^n$ est obtenu en prenant le quotient de $\mathbb{R}^n$ par son réseau standard $\mathbb{Z}^n$. Pour $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$, on note $\Theta_{\mathbf{m}}$ la fonction $\Theta_{\mathbf{m}}(x) = e^{2i\pi\langle \mathbf{m}, x\rangle}$. Une fonction sur $\mathbb{T}^n$ est une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ qui satisfait la condition d'invariance $f(x+\mathbf{m}) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$.

Si $f : \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ est intégrable, elle admet un *développement de Fourier* :

$$f(x) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n} f_{\mathbf{m}} \Theta_{\mathbf{m}}(x)$$

où les $f_{\mathbf{m}}$ sont les *coefficients de Fourier* de f donnés par les formules intégrales :

$$f_{\mathbf{m}} = \int_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{-2i\pi\langle \mathbf{m}, x\rangle} dx.$$

Si, en plus, la fonction f est de carré intégrable, les coefficients $f_{\mathbf{m}}$ satisfont la condition de convergence :

$$\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} |f_{\mathbf{m}}|^2 < +\infty.$$

De même, toute distribution T sur le tore $\mathbb{T}^n$ (vue comme une distribution $\mathbb{Z}^n$-périodique sur $\mathbb{R}^n$) peut s'écrire :

$$T = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} T_{\mathbf{m}}\Theta_{\mathbf{m}}$$

où la famille des nombres complexes $T_{\mathbf{m}}$ (indexée par $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$) est à *croissance polynomiale* au plus, c'est-à-dire, il existe un entier $r \in \mathbb{N}$ et une constante $C > 0$ tels que $|T_{\mathbf{m}}| \leq C|\mathbf{m}|^r$ pour tout $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$.

Pour tout $r \in \mathbb{N}$, **on note** $W^{1,r}$ **l'espace des fonctions** f **sur le tore** $\mathbb{T}^n$ **données par leurs coefficients de Fourier** $(f_{\mathbf{m}})_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n}$ **et vérifiant la condition** $\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} |\mathbf{m}|^r |f_{\mathbf{m}}| < +\infty$. **De même,** $W^{2,r}$ **sera l'espace des fonctions** f **sur le tore** $\mathbb{T}^n$ **données par leurs coefficients de Fourier** $(f_{\mathbf{m}})_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n}$ **et vérifiant** $\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} |\mathbf{m}|^{2r} |f_{\mathbf{m}}|^2 < +\infty$. **Ces espaces sont complets pour les normes :**

$$||f||_{1,r} = |f_0| + \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n\setminus\{\mathbf{0}\}} |\mathbf{m}|^r |f_{\mathbf{m}}| \quad \textbf{pour } f \in W^{1,r}$$

et :

$$||f||_{2,r} = \sqrt{|f_0|^2 + \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n\setminus\{\mathbf{0}\}} |\mathbf{m}|^{2r} |f_{\mathbf{m}}|^2} \quad \textbf{pour } f \in W^{2,r}$$

$W^{2,r}$ est le $r^{\text{ème}}$ espae de Sobolev sur $\mathbb{T}^n$. Il a une structure d'espace de Hilbert donnée par le produit hermitien :

$$\langle f, g\rangle_r = f_{\mathbf{0}}\overline{g}_{\mathbf{0}} + \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n\setminus\{\mathbf{0}\}} |\mathbf{m}|^{2r} f_{\mathbf{m}}\overline{g}_{\mathbf{m}}.$$

Nous avons des inclusions naturelles

$$C^\infty(\mathbb{T}^n) \subset \cdots \subset W^{1,r+1} \subset W^{1,r} \subset \cdots \subset W^{1,0}$$

et :

$$C^\infty(\mathbb{T}^n) \subset \cdots \subset W^{2,r+1} \subset W^{2,r} \subset \cdots \subset W^{2,0} = L^2(\mathbb{T}^n).$$

La proposition qui suit est facile à établir :

Proposition

Soit $T = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} T_{\mathbf{m}}\Theta_{\mathbf{m}}$ *une série. Les assertions 1, 2 et 3 qui suivent sont équivalentes :*

1. T *est une distribution régulière, c'est-à-dire,* T *est une fonction de classe* C^∞*.*
2. *Pour tout* $r \in \mathbb{N}$*, la série* $\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} |\mathbf{m}|^{2r}|T_{\mathbf{m}}|^2$ *converge.*
3. *Pour tout* $r \in \mathbb{N}$*, la série* $\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} |\mathbf{m}|^{r}|T_{\mathbf{m}}|$ *converge.*
4. *Pour tout* $r \in \mathbb{N}$*, les injections* $j_{1,r} : W^{1,r+1} \hookrightarrow W^{1,r}$ *et* $j_{2,r} : W^{2,r+1} \hookrightarrow W^{2,r}$ *sont des opérateurs compacts.*

Chacune des trois premières assertions dit :

$$\bigcap_{r\in\mathbb{N}} W^{1,r} = \bigcap_{r\in\mathbb{N}} W^{2,r} = C^\infty(\mathbb{T}^n).$$

2. Le $H^1(\mathbb{Z}, N)$

$$H^1(Z,N)$$

• Soit E un espace de Fréchet dont la topologie est définie par une suite (croissante) de semi-normes p_k. Une application linéaire $\gamma : E \longrightarrow$ est *continue* si, pour tout entier k, il existe un entier s_k et une constante $\alpha_k > 0$ tels que $p_k(\gamma(f)) \leq \alpha_k p_{s_k}(f)$ pour tout $f \in E$. On dira aussi que T est un *opérateur borné* sur E.

• Un *automorphisme* de E est une bijection continue $\gamma : E \longrightarrow E$. (L'inverse γ^{-1} est automatiquement continue en vertu du théorème de l'application ouverte.) L'ensemble des automorphismes de E est un groupe (pour la composition) appelé *groupe linéaire* de E ; on le note $\mathbf{GL}(E)$. En général $\mathbf{GL}(E)$ n'est pas ouvert si E n'est pas un Banach !

• Soit $\gamma : E \longrightarrow E$ un automorphisme de E. L'action de γ sur un vecteur f sera notée $\gamma \cdot f$. Un vecteur $f \in E$ est dit *invariant* par γ si $\gamma \cdot f = f$. L'ensemble des vecteurs de E invariants par γ est un sous-espace vectoriel E^γ ; c'est le noyau de l'*opérateur cobord* (borné) : $\delta : f \in E \longmapsto (f - \gamma \cdot f) \in E$.
C'est donc un sous-espace fermé, par suite hérite d'une structure d'espace de Fréchet.

• **Soit $D : E \longrightarrow E$ un *opérateur borné commutant* à γ. On s'intéresse dans E^γ à l'équation $Df = g$ où $g \in E^\gamma$ est donné.**

Une manière naturelle de faire est de résoudre d'abord cette équation dans E (en oubliant que le vecteur f est γ-invariant) ; si une solution $f_0 \in E$ existe, on la corrige en rajoutant un élément h du noyau N de D pour obtenir une solution $f = f_0 + h$ invariante par γ, c'est-à-dire vérifiant la relation $\gamma \cdot (f_0 + h) = f_0 + h$ *i.e.* $h - \gamma \cdot h = \gamma \cdot f_0 - f_0$. (L'élément $(\gamma \cdot f_0 - f_0)$ est dans N.) Ce qui amène au problème suivant :

Soit $\psi \in N$. Existe-t-il $h \in N$: $h - \gamma \cdot h = \psi$?

C'est *l'équation cohomologique* du *système dynamique* (N, γ) : *N est un espace de Fréchet sur lequel l'automorphisme γ opère !*

Cette terminologie vient du fait que le *premier groupe de cohomologie* $H^1(\mathbb{Z}, N)$ du *groupe discret* $\mathbb{Z}$ à coefficients dans le *$\mathbb{Z}$-module* N est exactement le *conoyau* de l'opérateur $\delta : N \longrightarrow N$ défini par $\delta(f) = f - \gamma \cdot f$.

Problème

Soit N un espace de Fréchet et γ un automorphisme de N. Calculer l'espace $H^1(\mathbb{Z}, N)$.

L'espace $H^1(\mathbb{Z}, N)$ contient les obstructions à la résolution de l'équation $Df = g$ pour le problème que nous avons évoqué.

1. L'équation $\frac{df}{dx} = g$ périodique

• L'ensemble $\mathbb{R}$ des réels est un groupe abélien pour l'addition et $\mathbb{Z}$ en est un sous-groupe. On fait agir $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}$ par la translation :

$$\gamma : x \in \mathbb{R} \longmapsto (x+1) \in \mathbb{R}.$$

Le groupe quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est le cercle $\mathbb{S}^1$; il est isomorphe au groupe multiplicatif $U(1)$ des nombres complexes de module 1.

• Cette action sur $\mathbb{R}$ induit une action sur l'espace de Fréchet :

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}) \longmapsto f \circ \gamma \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}).$$

$f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ est *γ-invariante* si elle vérifie $f \circ \gamma = f$, c'est-à-dire $f(x+1) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, *i.e.* f est périodique de période 1. C'est donc une fonction sur le cercle $\mathbb{S}^1$.

• Un calcul immédiat montre que l'opérateur $D = \frac{d}{dx}$ sur $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ commute à l'automorphisme γ de E.

• L'espace E^γ des γ-invariants est celui des fonctions périodiques de période 1, donc $E^\gamma = C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{K})$.

• Le noyau N de l'opérateur D est constitué des fonctions $f \in E$ telles que $\frac{df}{dx} = 0$, c'est-à-dire les constantes, donc $N = \mathbb{K}$.

• Comme l'action de γ sur les constantes est triviale, l'opérateur $\delta : f \in \mathbb{K} \longmapsto (f - f \circ \gamma) \in \mathbb{K}$ est nul et donc son conoyau est $\mathbb{K}$, c'est-à-dire $H^1(\mathbb{Z}, N) = \mathbb{K}$.

Proposition

L'espace $H^1(\mathbb{Z}, N) = \mathbb{K}$ contient exactement les obstructions à la résolution de l'équation différentielle périodique $Df = g$.

Preuve

• L'équation $Df = g$ donne une solution $f(x) = \int_0^x g(t)dt + C$ où C est une constante. Cette solution est clairement C^∞.

• La fonction g est périodique mais f ne l'est pas forcément. Son défaut de périodicité est :

$$\begin{aligned} f(x) - f(x+1) &= \left(\int_0^x g(t)dt + C\right) - \left(\int_0^{x+1} g(t)dt + C\right) \\ &= \int_0^1 g(t)dt. \end{aligned}$$

• Donc f est périodique si, et seulement si, $\int_0^1 g(t)dt = 0$. Soit $J : C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ l'application qui à g associe $\int_0^1 g(t)dt$; c'est une forme linéaire continue non nulle. Son noyau est exactement l'image de $D : C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{K}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{K})$. Par suite :

$$\mathbf{Coker}(D) = C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{K})/\mathbf{Im}(D) = \mathbb{K}/\mathbf{Im}\delta = H^1(\mathbb{Z}, \mathbb{K}) = \mathbb{K}.$$

2. Le $\overline{\partial}$ sur $\mathbb{C}^*$

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Un point dans U sera repéré par ses coordonnées réelles (x, y) ou sa coordonnée complexe $z = x + iy$. Soit $C^\infty(U)$ l'espace des fonctions complexes de classe C^∞ sur U. Nous serons intéressés par l'équation de *Cauchy-Riemann* :

(CR)
$$\overline{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = g$$

où $g \in C^\infty(U)$ est donnée.

L'existence d'une solution f de l'équation (CR) pour toute fonction g est équivalente à la trivialité du groupe de *cohomologie de Dolbeault* $H^1(U, \mathcal{O})$ de l'ouvert U à valeurs dans le *faisceau* $\mathcal{O}$ *des germes de fonctions holomorphes* sur U.

À la fin du XIXème siècle, certains mathématiciens savaient résoudre l'équation sur $U = \mathbb{C}$ (en utilisant la *formule de Cauchy*) mais pas encore sur tout ouvert de $\mathbb{C}$. Par exemple, qu'en était-il sur l'ouvert $U = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$?

• Rappelons qu'on a une action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{C}$ engendrée par le biholomorphisme $\gamma : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ donné par $\gamma(z) = z + 1$; γ induit un automorphisme (noté encore) γ sur l'espace de Fréchet $E = C^\infty(\mathbb{C})$ des C^∞-fonctions $\mathbb{C}$:

$$(\gamma \cdot f)(z) = f \circ \gamma(z) = f(z+1).$$

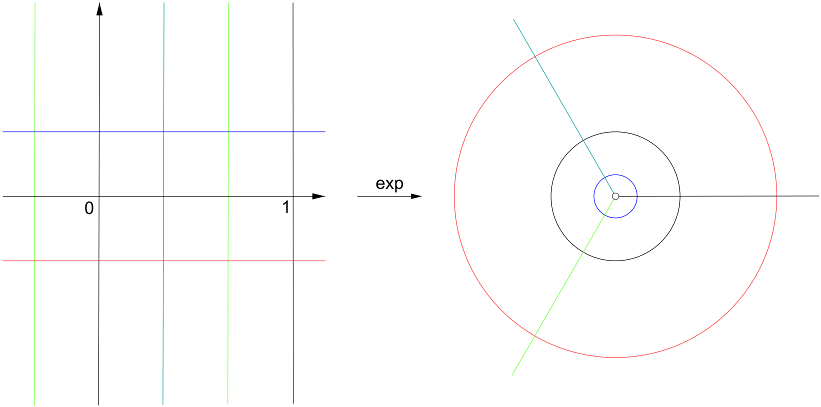
Mais aussi sur l'espace $N = \mathcal{H}(\mathbb{C})$ des fonctions holomorphes qui est exactement le noyau de l'opérateur $C^\infty(\mathbb{C}) \xrightarrow{\overline{\partial}} C^\infty(\mathbb{C})$.

• L'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{C}$ que nous venons de définir est holomorphe, libre et propre. Le quotient $\mathbb{C}/\gamma$ est une surface de Riemann qu'on peut décrire explicitement : l'action est exactement celle par translations de $\mathbb{Z}$ sur le groupe additif $(\mathbb{C},+)$; comme $\mathbb{Z}$ est le noyau du morphisme **exp** $: z \in \mathbb{C} \longmapsto e^{2i\pi z} \in \mathbb{C}^*$, on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{\mathbf{exp}} \mathbb{C}^* \longrightarrow 1.$$

$$e^{2i\pi z} = e^{2i\pi(x+iy)} = e^{-2\pi y} \cdot e^{2i\pi x}.$$

Ceci prouve que le quotient $\mathbb{C}/\gamma$ est une surface de Riemann ; elle est biholomorphiquement équivalente à $\mathbb{C}^*$.


0
1
exp

• Les C^∞-fonctions sur $\mathbb{C}^*$ s'identifient aux C^∞-fonctions sur $\mathbb{C}$ invariantes par γ, c'est-à-dire, les fonctions $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui vérifient la condition de périodicité $f(z+1) = f(z)$. Elles forment un sous-espace fermé E^γ de l'espace de Fréchet $E = C^\infty(\mathbb{C})$. Comme l'équation (CR) a une solution dans E, on a une solution dans E^γ si l'espace vectoriel $H^1(\mathbb{Z}, N)$ est trivial (on a déjà noté cela). Est-ce le cas ? Oui :

Théorème de Guichard (1887)

Soient $\gamma : z \in \mathbb{C} \longmapsto z+1 \in \mathbb{C}$ et γ l'automorphisme de l'espace de Fréchet $N = \mathcal{H}(\mathbb{C})$ des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ défini par $\gamma \cdot f = f \circ \gamma$. Alors $H^1(\mathbb{Z}, \mathcal{H}(\mathbb{C})) = 0$.

La preuve donnée par Guichard est purement analytique. Elle est très technique et longue, mais à cette époque, elle donne une réponse !

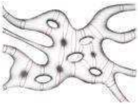
Pour quelle surface de Riemann Σ et quel automorphisme γ de Σ a-t-on encore ce type de résultat ?

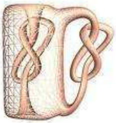
Voici une résponse (*cf.* [Ek]) :

Théorème (2011)

Soient Σ une surface de Riemann non compacte et $\gamma : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ un automorphisme agissant librement et proprement et tel que $M = \Sigma/\gamma$ soit une surface de Riemann non compacte. Alors, pour toute fonction holomorphe $g : \Sigma \longrightarrow \mathbb{C}$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, il existe une fonction holomorphe $f : \Sigma \longrightarrow \mathbb{C}$ solution de l'équation $f \circ \gamma - \lambda f = g$.

Le cas particulier $\Sigma = \mathbb{C}$, $\lambda = 1$ et $\gamma(z) = z + 1$ donne le théorème de Guichard !





En général, une surface de Riemann non compacte a un groupe d'automorphismes infini et suffisamment de fonctions holomorphes. Une surface de Riemann compacte a seulement les constantes comme fonctions holomorphes et si son genre ≥ 2, son groupe d'automorphismes est fini !

Certains problèmes en systèmes dynamiques amènent à des calculs de cohomologie de groupes discrets utilisant les propriétés arithmétiques des nombres irrationnels.
Nous allons en donner, de façon sommaire, un petit aperçu. La littérature est abondante à ce sujet et le lecteur désireux d'y plonger plus profondément peut consulter par exemple [CC], [La] ou [Sc].
On sait, par construction même de $\mathbb{R}$, que les nombres rationnels sont denses dans les réels :
Soit θ un nombre réel irrationnel ; alors il existe une suite de rationnels $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ qui tend vers θ et on peut même préciser beaucoup plus dans le théorème qui suit, corollaire du théorème de Dirichlet (cf. [Sc]).

Théorème

Soit θ un nombre réel irrationnel. Alors il existe une infinité de paires d'entiers (p, q) premiers entre eux et tels que :

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

En 1891, A. HURWITZ (*cf.* [Hu]) a amélioré cette inégalité en $\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$ et a montré que la constante $\sqrt{5}$ est optimale.
Les estimations de nombres réels par les rationnels dépendent essentiellement de la *nature arithmétique* de θ.
Outre le fait que les irrationnels se partagent en *algébriques* (un nombre réel est dit *algébrique* s'il est racine d'un polynôme à coefficients entiers) et les autres (les *transcendants*), ils se distinguent aussi par la manière dont ils sont limites de rationnels.

Définition

Soit θ un nombre réel irrationnel.

1. *On dira que θ est **diophantien** s'il existe des constantes $A > 0$ et $\delta \geq 2$ telles que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et tout $q \in \mathbb{Z}^*$ on ait :*

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{A}{|q|^\delta}.$$

2. *On dira que θ est **de Liouville** s'il existe une constante $A > 0$ telle que, pour tout $s \in \mathbb{N}$, il existe des entiers $p_s \in \mathbb{Z}$ et $q_s \in \mathbb{Z}^*$ vérifiant :*

$$\left|\theta - \frac{p_s}{q_s}\right| \leq \frac{A}{|q_s|^s}.$$

Les nombres diophantiens sont "mal approchés" par les rationnels. Si $\delta = 2$, d'après le théorème de Hurwitz, la constante A doit nécessairement satisfaire l'inégalité $A < \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Les nombres diophantiens forment un ensemble dont le complémentaire est de mesure nulle ; il contient les nombres algébriques (*cf.* [CC] p. 125).

Les nombres de Liouville sont des irrationnels "très bien approchés" par les rationnels. On peut en construire en prenant des sommes de séries de nombres rationnels à décroissance assez rapide, par exemple $\theta = \sum_{s=1}^{\infty} 2^{-s!}$ (dont Liouville a démontré la transcendance).

Les inégalités $\left|\theta - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{A}{|q|^{\delta}}$ et $\left|\theta - \frac{p_s}{q_s}\right| \leq \frac{A}{|q_s|^{s}}$ avec $p, q, p_s, q_s \in \mathbb{Z}$ sont équivalentes aux inégalités :

$$|q\theta + p| \geq \frac{A}{|q|^{\delta-1}}, \quad \textbf{et} \quad |q_s\theta + p_s| \leq \frac{A}{|q|^{s-1}}$$

avec $p, q, p_s, q_s \in \mathbb{Z}$. Elles montrent comment les nombres $q\theta + p$ approchent 0 et donc comment le sous-groupe $\Sigma(\theta) = \{q\theta + p : p, q \in \mathbb{Z}\}$ de $\mathbb{R}$ y est dense. Ceci est aussi équivalent (facile à voir en utilisant l'exponentielle $\theta \in \mathbb{R} \longmapsto e^{2i\pi\theta} \in \mathbb{C}$) à la manière dont le sous-groupe $\{e^{2i\pi q\theta} : n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans le cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{S}^1$ ou alors comment les nombres $e^{2i\pi q\theta}$ approchent 1. On peut donc donner les définitions suivantes.

Définition

Soit θ un nombre réel irrationnel. On dira que θ est un nombre :

1. *diophantien, s'il existe des constantes $A > 0$ et $\delta \geq 1$ telles que, pour tout $q \in \mathbb{Z}$, on ait $|1 - e^{2i\pi q\theta}| > \frac{A}{|q|^\delta}$,*
2. *de Liouville, s'il existe une constante $A > 0$ telle que, pour tout $s \in \mathbb{N}$ il existe un entier $q_s \in \mathbb{Z}$ vérifiant :*

$$|1 - e^{2i\pi q_s\theta}| \leq \frac{A}{|q_s|^s}.$$

- *Tout nombre irrationnel algébrique est diophantien.*

La démonstration est assez élémentaire et n'est presque qu'une simple application du théorème des accroissements finis.

Soit maintenant $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$. Alors α définit une forme linéaire (non nulle) :

$$x \in \mathbb{R}^n \longmapsto \langle \alpha, x \rangle \in \mathbb{R}$$

où $\langle\ ,\ \rangle$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$. L'image du réseau $\mathbb{Z}^n$ est un sous-groupe :

$$\Gamma = \{m_1\alpha_1 + \cdots + m_n\alpha_n : m_1, \cdots, m_n \in \mathbb{Z}\}$$

du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$.
Si les composantes $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ de α sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendantes, le sous-groupe Γ est dense dans $\mathbb{R}$.

Comme pour un nombre irrationnel, comment peut-on mesurer la densité de ce sous-groupe Γ ?

On a les définitions qui suivent :

Définition

Soit $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont les composantes sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendantes. On dira que α est un :

1. *vecteur diophantien, s'il existe des constantes $A > 0$ et $\delta \geq 1$ telles que, pour tout $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$, on ait :*

$$\left|1 - e^{2i\pi\langle\alpha,\mathbf{m}\rangle}\right| > \frac{A}{|\mathbf{m}|^{\delta}},$$

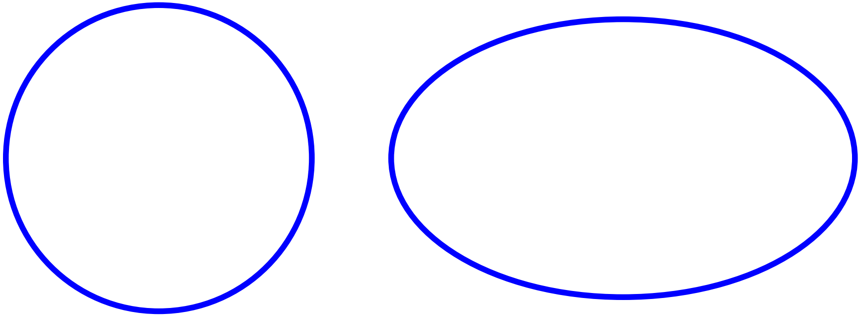
2. *de Liouville, s'il existe une constante $A > 0$ telle que, pour tout $s \in \mathbb{N}$ il existe $\mathbf{m}_s \in \mathbb{Z}^n$ vérifiant :*

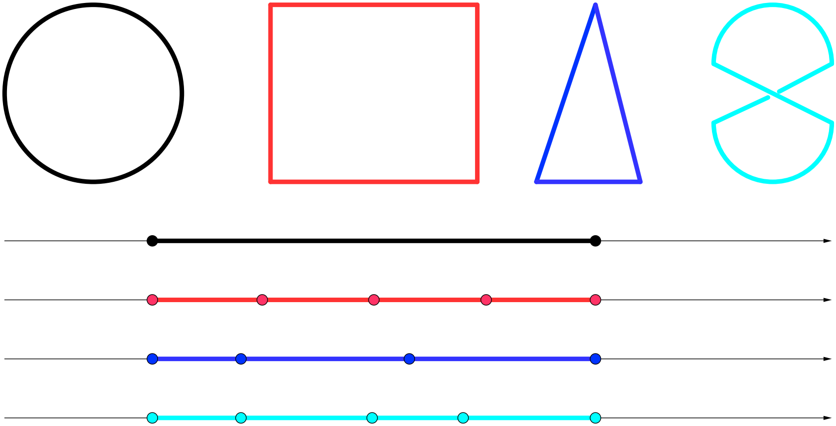
$$\left|1 - e^{2i\pi\langle\alpha,\mathbf{m}_s\rangle}\right| \leq \frac{A}{|\mathbf{m}_s|^{s}}.$$

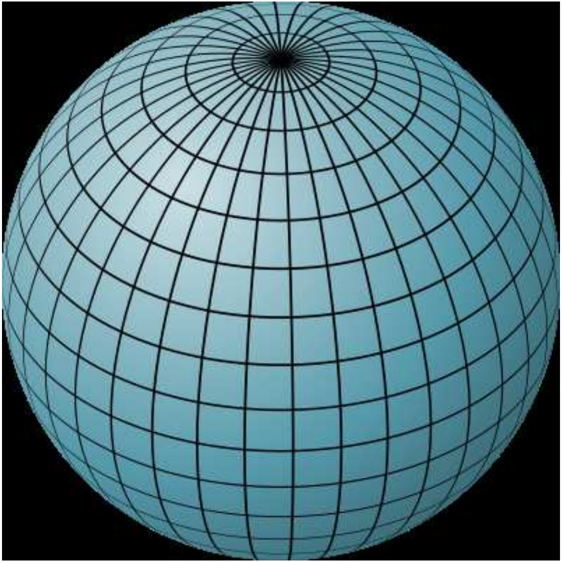
Tout vecteur $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ dont les composantes sont des nombres algébriques $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants est diophantien.

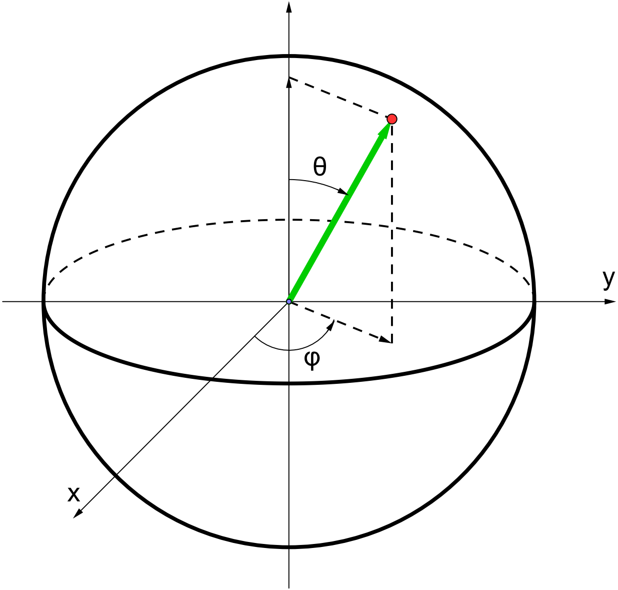
On peut supposer que les α_i sont des entiers algébriques. Soient σ_i, pour $i = 1, \cdots, n$, les différents plongements du corps de nombres $\mathbb{Q}[\alpha_1, \cdots, \alpha_n]$ dans $\overline{\mathbb{Q}}$ et G le groupe de Galois d'une extension algébrique de ce corps. Pour tout n-uplet $\mathbf{m}$ d'entiers non nul, le produit $\prod_j \sigma_j(\langle \alpha, \mathbf{m} \rangle)$ est un entier algébrique non nul, invariant par G, donc un entier relatif non nul. Ceci implique $\left| \prod_j \sigma_j(\langle \alpha, \mathbf{m} \rangle) \right| \geq 1$, donc si $\sigma_1 = \mathrm{Id}$: $|\langle \alpha, \mathbf{m} \rangle| \geq \dfrac{1}{\left| \prod_{j \geq 2} \sigma_j(\langle \alpha, \mathbf{m} \rangle) \right|} \geq \frac{C}{|\mathbf{m}|^{d-1}}$ où d est le degré de $\mathbb{Q}[\alpha_1, \cdots, \alpha_n]$ et C une constante réelle positive.

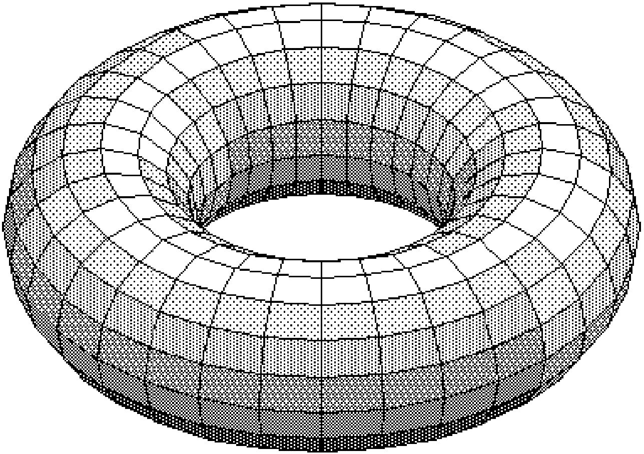
5. Systèmes dynamiques

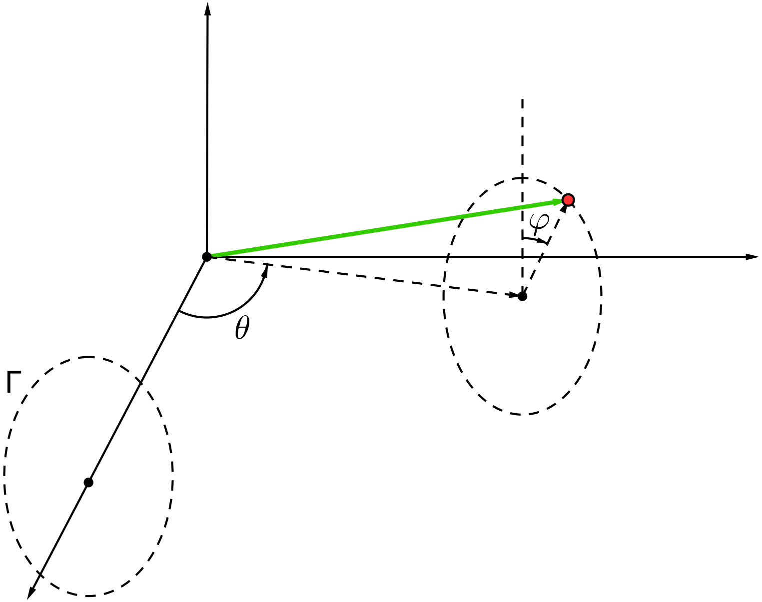






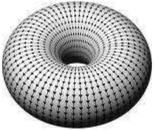

θ
y
φ
x





φ
θ
Γ

Surfaces orientables !

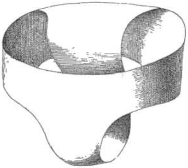


Tore non noué

Tore noué

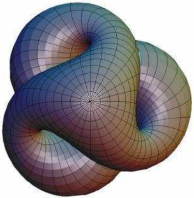
Surface de genre 3

Surfaces non orientables !



Le slip de Möbius
(difficile à porter !)

Bouteille de Klein



Surface de Boy
(immersion du plan
projectif réel dans
l'espace euclidien)

• Soit M une variété de dimension n. Pour plus de simplicité, on la suppose compacte et sans bord.

• On note $C^0(M, \mathbb{C})$ l'espace des fonctions complexes continues sur M muni de la norme de la convergence uniforme $|| \ ||_\infty$.
Une *mesure* sur M est une forme linéaire continue :

$$\mu : C^0(M, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Si μ est telle que le nombre $\langle \mu, f \rangle$ est réel positif pour f réelle positive, on dira que μ est une *mesure de Radon* sur M. Dans ce cas, par le théorème de représentation de Riesz, μ définit une mesure sur la tribu borélienne $\mathcal{B}$ de M.

• On note $C^\infty(M, \mathbb{C})$ l'espace des fonctions complexes de classe C^∞ sur M muni de la topologie de la convergence uniforme de toutes les dérivées.
Une *distribution* sur M est une forme linéaire continue :

$$T : C^\infty(M, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Les distributions sur M forment un espace vectoriel noté $\mathcal{D}'(M)$.

- Comme l'injection $C^\infty(M, \mathbb{C}) \hookrightarrow C^0(M, \mathbb{C})$ est continue, toute mesure μ définit (par restriction) une distribution. Par contre, une distribution T n'est pas toujours une mesure. Toutefois, si T est positive ($\langle T, f\rangle \geq 0$ pour f réelle positive), T est une mesure (un théorème non trivial de Schwartz).
- Tout difféomorphisme γ de M agit sur l'espace $C^\infty(M, \mathbb{C})$ par $\gamma \cdot f = f \circ \gamma$. Cette action passe au dual $\mathcal{D}'(M)$:

$$\langle \gamma \cdot T, f\rangle = \langle T, f \circ \gamma\rangle.$$

- On dira que $T \in \mathcal{D}'(M)$ est γ-*invariante* si $\gamma \cdot T = T$. Ce qui signifie $\langle T, f \circ \gamma\rangle = \langle T, f\rangle$ pour toute fonction $f \in C^\infty(M, \mathbb{C})$.
- Les distributions γ-invariantes forment un sous-espace $\mathcal{D}'_\gamma(M)$ de $\mathcal{D}'(M)$.
- Le sous-espace $\mathcal{D}'_\gamma(M)$ est fermé dans $\mathcal{D}'(M)$ quand on munit ce dernier de la topologie faible.

Un système dynamique discret est la donnée d'un couple (M, γ) où M est une variété et γ un difféomorphisme de M.

À un tel système est associé un groupe de difféomorphismes $\Gamma = \{\gamma^k : k \in \mathbb{Z}\}$ isomorphe soit à $\mathbb{Z}$ soit à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ où p est un entier supérieur ou égal à 2 (on suppose que γ n'est pas l'identité). Les éléments de Γ se composent suivant la règle :

$$\gamma^k \circ \gamma^\ell = \gamma^{k+\ell}.$$

Un système dynamique continu est un couple (M, X) où M est une variété et X un champ de vecteurs sur M.

À un tel système est associé un groupe de difféomorphismes $\Phi = \{\phi_t : t \in \mathbb{R}\}$ isomorphe à $\mathbb{R}$ ou au cercle $\mathbb{S}^1$ et qu'on appelle *groupe à un paramètre* associé à X ; on dit aussi *flot* de X. Les éléments de Φ se composent suivant la règle :

$$\phi_t \circ \gamma_s = \phi_{t+s}.$$

Quelques problèmes au centre des systèmes dynamiques

1. **Étant donné un système dynamique discret (M, γ), existe-t-il une mesure de Borel μ invariante par γ ? Cela signifie que, pour tout borélien B de M, on a :**

$$\mu(\gamma(B)) = \mu(B).$$

2. **Étant donné un système dynamique continu (M, X), existe-t-il une mesure de Borel μ invariante par X ? Cela signifie que, pour tout borélien B et tout $t \in \mathbb{R}$, on a :**

$$\mu(\phi_t(B)) = \mu(B).$$

Mais trouver une mesure invariante est un problème hautement non trivial. À défaut, on peut se contenter de distributions invariantes.

Une telle distribution T vérifie $\langle T, f \circ \gamma \rangle = \langle T, f \rangle$, donc on a $\langle T, f - f \circ \gamma \rangle = 0$ pour toute fonction $f \in C^\infty(M, \mathbb{C})$. Par suite T est nulle sur le sous-espace engendré par les éléments de la forme $f - f \circ \gamma$ où f parcourt l'espace $C^\infty(M, \mathbb{C})$; mais ce sous-espace n'est rien d'autre que l'image de l'opérateur cobord :

$$\delta : f \in C^\infty(M, \mathbb{C}) \longmapsto (f - f \circ \gamma) \in C^\infty(M, \mathbb{C}).$$

Par suite T est une forme linéaire continue sur le quotient $C^\infty(M, \mathbb{C})/\mathbf{Im}(\delta)$ qui n'est rien d'autre que :

$$H^1(\mathbb{Z}, C^\infty(M, \mathbb{C})).$$

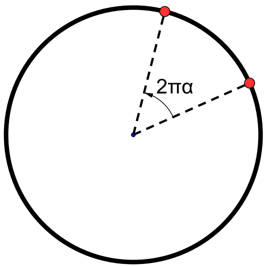
Parmi les problèmes auxquels on pourrait s'intéresser en systèmes dynamiques, il y a les deux qui suivent :

1. Soit $H \in C^\infty(M, \mathbb{C})$. Existe-t-il $\psi \in C^\infty(M, \mathbb{C})$ telle que :
$$\psi - \psi \circ \gamma = H \, ?$$
2. Soit $g \in C^\infty(M, \mathbb{C})$. Existe-t-il $f \in C^\infty(M, \mathbb{C})$ telle que :
$$X(f) = g \, ?$$

Exemples de systèmes dynamiques simples

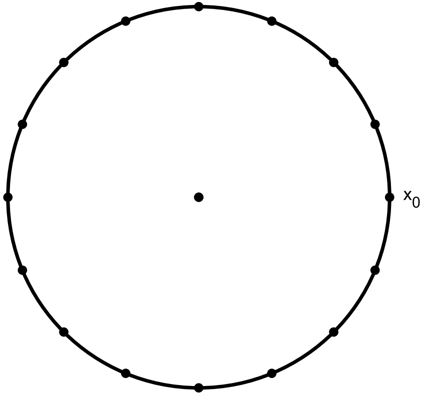
- **Le cercle** $M = \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ **et** $\gamma = \mathcal{R}_\alpha$ **une rotation d'angle** $2\pi\alpha$ **où** $\alpha \in [0, 1[$.

Une rotation

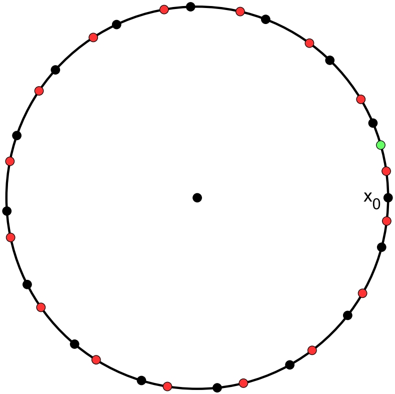


induite par une translation de la droite réelle.

Ses orbites

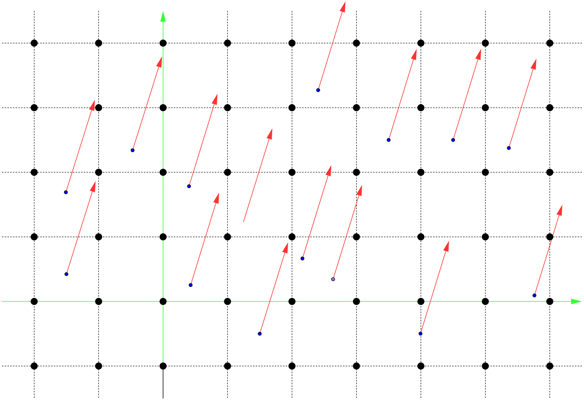


Orbite par une
rotation rationnelle

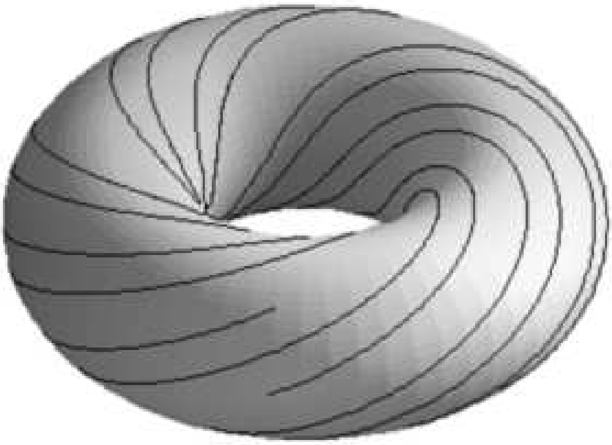


Orbite par une
rotation irrationnelle

- Soit X le champ de vecteurs linéaire $X = \alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}$ sur le tore $\mathbb{T}^2$ où (α, β) est un vecteur de $\mathbb{R}^2$.



Une vue de ce champ sur $\mathbb{R}^2$
et le réseau $\mathbb{Z}^2$ de $\mathbb{R}^2$



Un lien entre le discret et le continu !

Soit (M, γ) un système dynamique discret. On note (x, t) les coordonnées d'un point z de $\widetilde{N} = M \times \mathbb{R}$ et $\widetilde{X}$ le champ $\frac{\partial}{\partial t}$; $\widetilde{X}$ est invariant par le difféomorphisme :

$$(x, t) \in M \times \mathbb{R} \longmapsto (\gamma(x), t+1) \in M \times \mathbb{R}$$

et induit donc un champ de vecteurs X partout non nul sur la variété quotient $N = M \times \mathbb{R}/(x, t) \simeq (\gamma(x), t+1)$. La deuxième projection $\widetilde{\pi} : \widetilde{N} = M \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est équivariante par rapport aux actions du groupe $\mathbb{Z}$: $\tau_k : t \in \mathbb{R} \longrightarrow t + k \in \mathbb{R}$ et :

$$(\gamma^k, \tau_k) : (x, t) \in \widetilde{N} \longrightarrow (\gamma^k(x), t+k) \in \widetilde{N}.$$

Cela signifie que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{N} & \xrightarrow{(\gamma^k, \tau_k)} & \widetilde{N} \\ \widetilde{\pi} \downarrow & & \downarrow \widetilde{\pi} \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\tau_k} & \mathbb{R} \end{array}$$

La projection $\widetilde{\pi}$ induit donc une submersion $\pi : N \longrightarrow \mathbb{S}^1$; c'est en fait une fibration plate dont la monodromie est le difféomorphisme γ. On obtient ainsi un système dynamique continu (N, X).

On dit que le SDC (N, X) est la suspension du SDD (M, γ).

Soit $f \in C^\infty(N, \mathbb{C})$. Alors la fonction $J(f) : M \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par : $J(f)(x) = \int_0^1 f(x, t)dt$ est de classe C^∞. L'application $J : C^\infty(N, \mathbb{C}) \longrightarrow C^\infty(M, \mathbb{C})$ est linéaire, continue et surjective.

1. On a un opérateur différentiel du premier ordre :
$$D : f \in C^\infty(N, \mathbb{C}) \longmapsto X(f) \in C^\infty(N, \mathbb{C}).$$
Son conoyau $C^\infty(N, \mathbb{C})/\mathbf{Im}(D)$ est l'espace des obstructions à l'existence des solutions de l'équation $Df = g$.

2. On a un opérateur cobord :
$$\delta : \psi \in C^\infty(M, \mathbb{C}) \longmapsto (\psi - \psi \circ \gamma) \in C^\infty(M, \mathbb{C}).$$
Le $H^1(\mathbb{Z}, C^\infty(M, \mathbb{C}))$ est l'espace des obstructions à l'existence des solutions de l'équation $\delta\psi = H$.

Rappelons que $\mathcal{D}'_\gamma(M)$ est l'espace des distributions sur M invariantes par γ. Notons $\mathcal{D}'_X(N)$ l'espace des distributions sur N invariantes par le champ X c'est-à-dire par tout difféomorphisme ϕ_t du flot associé à X. On a alors le théorème qui suit (*cf.* [DE])

Théorème

1. *Les espaces vectoriels topologiques* $C^\infty(N, \mathbb{C})/Im(D)$ *et* $H^1(\mathbb{Z}, C^\infty(M, \mathbb{C}))$ *sont canoniquement isomorphes. Par conséquent l'équation aux dérivées partielles* $X \cdot f = g$ *a une solution dans* $C^\infty(N, \mathbb{C})$ *si, et seulement si, l'équation cohomologique discrète* $\psi - \psi \circ \gamma = H$ *a une solution dans* $C^\infty(M, \mathbb{C})$ *pour* $H(x) = \int_0^1 g(x, t)dt$*.*
2. *La transposée* J' *de l'application linéaire continue et surjective* J *qui à* $g \in C^\infty(N)$ *associe :*
$$J(g) = \int_0^1 g(x, t)dt \in C^\infty(M)$$
est un isomorphisme de $\mathcal{D}'_\gamma(M)$ *sur* $\mathcal{D}'_X(N)$*.*

Pour finir, nous allons montrer comment ce théorème fonctionne sur un exemple concret. On se donne un vecteur α dans $\mathbb{R}^n$ de composantes $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$.

1. On prend pour variété M le tore $\mathbb{T}^n$ et pour difféomorphisme γ celui défini par : $\gamma(x_1, \cdots, x_n) = (x_1 + \alpha_1, \cdots, x_n + \alpha_n)$.
2. On prend pour variété N le tore $\mathbb{T}^{n+1}$ et pour champ :
$$X = \frac{\partial}{\partial t} + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \alpha_n \frac{\partial}{\partial x_n}.$$
3. On peut montrer facilement que le SDC $(\mathbb{T}^{n+1}, X)$ est la suspension du SDD $(\mathbb{T}^n, \gamma)$. Donc pour calculer les obstructions à la résolution de l'équation aux dérivées partielles :
$$Df = \frac{\partial f}{\partial t} + \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = g$$
sur le tore $\mathbb{T}^{n+1}$ il suffit de déterminer $H^1(\mathbb{Z}, C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{C}))$.

Soit $\mathcal{L}$ la forme linéaire continue sur $C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$ définie par $\mathcal{L}(H) = \int_{\mathbb{T}^n} H(x)dx$. On a le théorème qui suit (*cf.* [EH]).

Théorème

1. *Supposons* α *diophantien. Alors il existe un opérateur borné* $C^\infty(\mathbb{T}^n,\mathbb{C}) \xrightarrow{G} C^\infty(\mathbb{T}^n,\mathbb{C})$ *tel que* $\delta G = I - \mathcal{L}$*. Par conséquent l'équation* $\psi - \psi\circ\gamma = H$ *a une solution* $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^n,\mathbb{C})$ *si, et seulement si,* $\mathcal{L}(H) = 0$*. De plus, l'espace* $H^1(\mathbb{Z}, C^\infty(\mathbb{T}^n,\mathbb{C}))$ *est de dimension* 1 *engendré par la fonction constante* $\mathbf{1}$*.*
2. *Supposons* α *de Liouville. Alors il existe une famille infinie libre de fonctions* H *vérifiant* $\mathcal{L}(H) = 0$ *et telles que l'équation* $\psi - \psi\circ\gamma = H$ *n'ait pas de solution. Dans ce cas,* $H^1(\mathbb{Z}, C^\infty(\mathbb{T}^n,\mathbb{C}))$ *est de dimension infinie non séparé. Mais son séparé associé* $\overline{H}^1(\mathbb{Z}, C^\infty(\mathbb{T}^n,\mathbb{C}))$ *est de dimension* 1*.*
3. *Dans les deux cas qui précèdent, l'espace* $\mathcal{D}'_\gamma(\mathbb{T}^n)$ *est de dimension* 1 *engendré par la mesure de Haar* $dx = dx_1 \otimes \cdots \otimes dx_n$*.*

Pour montrer à quel point un problème équivariant peut être compliqué à résoudre directement par les calculs, je propose l'exercice suivant.

Soient $\widetilde{M} = \mathbb{C} \times \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$, $\lambda \in]0,1[$ **et** $\gamma : \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M}$ **la transformation définie par** $\gamma(z,t) = (\lambda z, \lambda t)$. **Le difféomorphisme** γ **engendre une action du groupe** $\Gamma = \mathbb{Z}$ **; le quotient** $M = \widetilde{M}/\Gamma$ **est une variété de dimension** 3 **analytiquement difféomorphe au produit** $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. **Les fonctions différentiables sur** M **sont les fonctions différentiables** $f(z,t)$ **sur** $\widetilde{M}$ **vérifiant** $f(\lambda z, \lambda t) = f(z,t)$ **; l'espace qu'elles forment sera noté** $C^\infty(M)$. **Soit** D **l'opérateur différentiel sur** $C^\infty(M)$ **:**

$$D = \sqrt{z\overline{z} + t^2}\frac{\partial}{\partial t}.$$

Question. *Quelles sont les conditions nécessaires et/ou suffisantes sur* $g \in C^\infty(M)$ *pour que l'équation différentielle* $Df = g$ *ait une solution dans* $C^\infty(M)$ *?*

Références

[DE] Deghan-Nezhad, A. & El Kacimi, A. *Équations cohomologiques de flots riemanniens et de difféomorphismes d'Anosov*. Journal of the Mathematical Society of Japan, Vol. 59 N 4. (2007), 1105-1134.

[CC] Cilleruelo, J. & Cordoba, A. *La teoría de los números.* Biblioteca Mondadori, Madrid (1992).

[Ek] El Kacimi, A. *On some holomorphic cohomological equations.* Results in Mathematics, Volume 63, Issue 1. (2013), 329-334.

[EH] El Kacimi, A. & Hmili, H. *Cohomological equations and invariant distributions on a Lie group.* Hokkaido Math. J., Vol. 43 (2014), 151 - 173.

[Gu] Guichard, C. *Sur la résolution de l'équation aux différences finies* G(x+1)-G(x)=H(x). Ann. Sc. ENS Série 3, 4 (1887) 361-380.

[Hu] Hurwitz, A. *Über die angenäherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationnale Brüche.* Math. Ann. 39.

[La] Lang, S. *Report on Diophantine approximation.* Bulletin de la SMF 93, (1965), 117-192.

[Sc] Schmidt, W. M. *Diophantine approximation.* Lecture Notes in Math. 785.