Petite introduction à la théorie de la déformation

Aziz El Kacimi

DMATHS - CÉRAMATHS - UPHF

Résumé

Une variété différentiable M de dimension $n > 0$ est obtenue en recollant des ouverts $\{U_i\}$ de $\mathbb{R}^n$ à l'aide de difféomorphismes. On obtient ainsi un objet géométrique dont le groupe de symétries est celui de tous les difféomorphismes entre ces $\{U_i\}$ compatibles avec le recollement : ils définissent ainsi le groupe $\mathrm{Diff}(M)$ des *difféomorphismes* de M. Ces derniers peuvent s'interpréter comme des « changement globaux » de coordonnées.

Toute *structure géométrique* supplémentaire (métrique, complexe, symplectique, feuilletée ou autre) sur les ouverts $\{U_i\}$ « compatible » avec les recollements donne une structure géométrique $\mathcal{S}$ du même type sur M.

Si les recollements des ouverts $\{U_i\}$ (qui constituent les morceaux de M) dépendent continûment d'un paramètre $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ (avec $\varepsilon > 0$), pour les valeurs suffisamment petites de t, la structure différentiable de M reste la même ; par contre la nouvelle structure géométrique $\mathcal{S}_t$ peut être différente de $\mathcal{S}$ pour t aussi proche de 0 que l'on veut ! On obtient ainsi sur M une famille continue de structures géométriques $(\mathcal{S}_t)$ qu'on appelle *déformation* de $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$ paramétrée par $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$.

L'objet de la *théorie des déformations* est de « mesurer » les variations de $\mathcal{S}_t$ en fonction du paramètre t au voisinage de 0. C'est ce qu'on tentera d'expliquer dans cet exposé à travers un (ou deux) exemple simple.