Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 19 , Roma (1999), 405-416

Spectre et développement asymptotique sur l'espace des feuilles

T. SOHOU

RIASSUNTO: *In questo articolo, studiamo lo spettro del laplaciano sullo spazio delle foglie di una foliazione riemanniana su una varietà liscia e compatta. Negli esempi considerati calcoliamo l'espansione asintotica della traccia del nucleo del calore.*

ABSTRACT: *In this paper, we study the spectrum of the basic Laplacian on the leaf closure space of a Riemannian foliation on a compact connected manifold. Moreover we give an asymptotic expansion of the trace of the heat kernel.*

– Introduction

Soit (M, γ) une variété riemannienne compacte connexe de dimension n. Soit Δ le laplacien de M opérant sur les fonctions. Dans un système de coordonnées locales $(x_1, \dots, x_n)$, Δ s'écrit

$$\Delta = -\frac{1}{\sqrt{|\gamma|}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big(\sum_{j=1}^{n} \sqrt{|\gamma|} \gamma^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \Big)$$

où (γ_{ij}) est la matrice de γ, (γ^{ij}) sa matrice inverse et $|\gamma|$ son déterminant. L'opérateur Δ possède un spectre discret $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$

KEY WORDS AND PHRASES: *Heat Equation – Spectrum – Foliations – Asymptotic Expansion.*
A.M.S. CLASSIFICATION: 58G11 – 58G25 – 53C12

tendant vers $+\infty$. L'intérêt de l'étude du spectre, hormis qu'il soit un outil pour la résolution de certaines équations aux dérivées partielles, réside d'une part dans la recherche de certaines propriétés de la variété [9] et d'autre part, dans l'étude du problème de la diffusion de la chaleur sur une variété riemannienne.

Depuis déjà un certain temps, beaucoup de travaux ont porté sur le spectre. En 1949, S. Minakshisundaram et A. Pleijel ont calculé le développement asymptotique de la trace $\sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda_i t}$ du noyau de la chaleur de (M, γ) [10].

Pour les objectifs cités, le problème de l'extension de ces travaux à certains espaces singuliers issus de variétés riemanniennes, s'est posé de façon naturelle. Divers auteurs l'ont abordé (cf. par exemple [4], [2], [5]).

Le but de ce travail est de calculer le spectre basique et donner le développement asymptotique de la trace du noyau de la chaleur sur l'espace $M/\overline{\mathfrak{F}}$ des adhérences des feuilles d'un feuilletage riemannien $\mathfrak{F}$ sur une variété compacte connexe M. Le résultat s'applique également aux variétés de Satake (ou V-variétés) qui sont des exemples particuliers de tels espaces.

1 – Développement asymptotique sur l'espace des orbites M/G

Soit (M, γ) une variété riemannienne de classe C^∞. Soit Δ le laplacien de (M, γ) opérant sur les fonctions de classe C^∞ sur M.

L'opérateur de la chaleur $L = \Delta + \frac{\partial}{\partial t}$ sur (M, γ) est défini sur l'espace des fonctions continues sur $M \times \mathbb{R}_+^*$ de classe C^2 en la première variable et de classe C^1 en la deuxième.

Une fonction K sur $M \times M \times \mathbb{R}_+^*$ est appelée *solution fondamentale* de l'équation de la chaleur ou *noyau de la chaleur*, si elle vérifie les propriétés suivantes:

(1) K est continue, de classe C^2 en la deuxième variable et de classe C^1 en la troisième,

(2) $(\Delta_2 + \frac{\partial}{\partial t})K = 0$ où Δ_2 est le laplacien par rapport à la deuxième variable,

(3) $\lim_{t \to 0^+} K(x, \cdot, t) = \delta_x$ pour tout $x \in M$, où δ_x est la mesure de Dirac au point x.

Si (M,γ) est une variété riemannienne compacte connexe, il existe une unique solution fondamentale K de l'équation de la chaleur sur $M \times M \times \mathbb{R}_+^*$ cf. [1] et K admet un développement asymptotique au voisinage de la diagonale de $M \times M$

$$K(x,y,t) \underset{t\to 0^+}{\sim} (4\pi t)^{-m/2} \exp\Big(-\frac{r^2}{4t}\Big) \sum_{i=0}^{\infty} t^i u_i(x,y)$$

où $r = d(x,y)$ est la distance riemannienne, $m = \dim M$ et u_i une fonction de classe C^∞ sur $M \times M$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ (cf. [10]).

Soit G un groupe compact opérant par isométries sur M. Alors le laplacien Δ de (M,γ) est G-invariant. Sa restriction au sous-espace des fonctions G-invariantes sur M induit un opérateur Δ_G sur l'espace des fonctions sur M/G qui sera, par définition, le *laplacien* sur M/G.

Soit

$$K_G(\overline{x},\overline{y},t) = K_G(\pi(x),\pi(y),t) = \int_G \int_G K(gx,hy,t)d\mu(g)d\mu(h)$$

où $\pi : M \longrightarrow \overline{M} = M/G$ est la projection canonique et μ la mesure de Haar normalisée sur G.

K_G est G-invariant. C'est la solution fondamentale de l'équation de la chaleur sur M/G [5].

Faisons le changement de variable $h = gg'$. Alors

$$\int_G K(gx,hy,t)d\mu(h) = \int_G K(gx,gg'y,t)d\mu(g')\,.$$

Comme G opère par isométries sur M, on a $K(gx,gy,t) = K(x,y,t)$ pour tout $g \in G$. Donc

$$\int_G K(gx,hy,t)d\mu(h) = \int_G K(x,g'y,t)d\mu(g')\,.$$

Par conséquent

$$K_G(\overline{x},\overline{y},t) = \int_G K(x,g'y,t)d\mu(g'), \quad \text{i.e.} \quad K_G(\overline{x},\overline{y},t) = \int_G K(x,gy,t)d\mu(g).$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ fixé, K_G définit un opérateur compact auto-adjoint sur $L^2(\overline{M})$:

$$T_t : f \longmapsto f_t \ \text{ tel que } \ f_t(\overline{y}) = \int_{\overline{M}} K_G(\overline{x}, \overline{y}, t) f(\overline{x}) d\overline{x} \,.$$

On a ainsi un semi-groupe d'opérateurs compacts auto-adjoints (dont le générateur est Δ_G).

Ce semi-groupe admet une base commune de diagonalisation [8]. Soit $\{\varphi_i\}$ une base orthonormée de $L^2(\overline{M})$ telle que $T_t\varphi_i = \alpha_i(t)\varphi_i$ i.e.

$$\alpha_i(t)\varphi_i(\overline{y}) = \int_{\overline{M}} K_G(\overline{x}, \overline{y}, t)\varphi_i(\overline{x}) d\overline{x} \,.$$

K_G étant de classe C^1 en t, α_i est de classe C^1 et

$$\alpha_i'(t)\varphi_i(\overline{y}) = -\Delta_{2G} \int_{\overline{M}} K_G(\overline{x}, \overline{y}, t)\varphi_i(\overline{x}) d\overline{x} = -\alpha_i(t) \ \Delta_G \ \varphi_i(\overline{y}) \,.$$

Comme $\lim_{t \to 0^+} \int_{\overline{M}} K_G(\overline{x}, \overline{y}, t)\varphi_i(\overline{x}) d\overline{x} = \varphi_i(\overline{y})$, on a $\alpha_i(t) \neq 0$ pour t assez petit. Alors φ_i est une fonction propre de Δ_G et $\Delta_G\varphi_i = \lambda_i\varphi_i$. Donc Δ_G admet un spectre discret $\{\lambda_i\}$ (qui est une partie du spectre de Δ) tels que $\lambda_i \geq 0$ et $\lim \lambda_i = +\infty$, et une base orthonormée $\{\varphi_i\}$ de $L^2(\overline{M})$ formée de fonctions propres associées.

On en déduit que la série $\sum_{i=0}^{\infty} e^{-t\lambda_i}\varphi_i(\overline{x})\varphi_i(\overline{y})$ converge vers $K_G(\overline{x}, \overline{y}, t)$ [1]. Alors

$$\begin{aligned} K_G(\overline{x}, \overline{x}, t) &= \sum_{i=0}^{\infty} e^{-t\lambda_i} (\varphi_i(\overline{x}))^2 \text{ et} \\ \int_{\overline{M}} K_G(\overline{x}, \overline{x}, t) d\overline{x} &= \sum_{i=0}^{\infty} e^{-t\lambda_i} \int_{\overline{M}} (\varphi_i(\overline{x}))^2 d\overline{x} = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-t\lambda_i} \end{aligned} \tag{1}$$

car (1) est intégrable terme à terme et $\{\varphi_i\}$ orthonormée. Or

$$\int_{\overline{M}} K_G(\overline{x}, \overline{x}, t) d\overline{x} = \int_M K_G(\pi(x), \pi(x), t) dx = \int_M \int_G K(x, gx, t) d\mu(g) dx \,.$$

Alors $\sum_{i=0}^{\infty} e^{-t\lambda_i} = \int_M \int_G K(x, gx, t) d\mu(g) dx$. Donc

$$\sum_{i=0}^{\infty} e^{-t\lambda_i} \underset{t \to 0^+}{\sim} (4\pi t)^{-m/2} \int_M \int_G \exp\Big[\frac{-d^2(x, gx)}{4t}\Big] \sum_{i=0}^{\infty} t^i u_i(x, gx) d\mu(g) dx \,.$$

Le développement asymptotique des intégrales

$$\int_M \int_G \exp\Big[\frac{-d^2(x,gx)}{4t}\Big] u_i(x,gx)\,d\mu(g)\,dx$$

donne alors:

$$\sum_{i=0}^{\infty} e^{-t\lambda_i} \underset{t\to 0^+}{\sim} (4\pi t)^{-m_0/2} \sum_{\substack{j=0\\ 0\le k\le \ell}}^{\infty} a_{jk} t^{j/2} (\log t)^k \quad [2], [3]$$

où $m_0 = \dim M_0/G$, M_0 étant la réunion des orbites principales (M_0 est ouvert et dense dans M et M_0/G est une variété), et ℓ un entier.

Nous avons ainsi montré la proposition suivante:

Proposition 1.1. *Soit (M,γ) une variété riemannienne compacte connexe de classe C^∞. Soit G un groupe compact opérant par isométries sur M. Alors le laplacien Δ de (M,γ) induit un laplacien Δ_G sur M/G de spectre $\{\lambda_i\}$ dont la trace du noyau a le développement asymptotique suivant:*

$$\sum_{i=0}^{\infty} e^{-t\lambda_i} \underset{t\to 0^+}{\sim} (4\pi t)^{-m_0/2} \sum_{\substack{j=0\\ 0\le k\le \ell}}^{\infty} a_{jk} t^{j/2} (\log t)^k$$

où $m_0 = \dim M_0/G$, M_0 étant la réunion des orbites principales, ℓ un entier. D'autre part $a_{00} = \mathrm{Vol} M_0/G$ si G est connexe, et $a_{0k} = 0$ pour $k > 0$.

Remarques 1.2. 1) $m_0 = \dim M/G = \dim M_0/G = \dim M - s$ si G est un groupe de Lie compact et s la dimension maximale des orbites [12].

2) $\ell \le r-1$ où $r = \mathrm{card}\{\dim G\cdot x : x \in M\}$. Si l'action est libre alors $r = 1$ et donc $\ell = 0$.

3) $\ell = 0$ si $m_0 \le 1$ ou bien $G = \mathbb{S}^1$.

2 – Développement asymptotique sur l'espace des adhérences des feuilles $M/\overline{\mathfrak{F}}$

Soit $\mathfrak{F}$ un feuilletage riemannien de codimension q sur une variété compacte connexe transversalement orientable M de dimension n.

2.1 – Laplacien basique

Une r-forme différentielle ω sur M est dite basique si $i_X\omega = 0$ et $i_X d\omega = 0$ pour tout champ de vecteurs X tangent à $\mathfrak{F}$. L'ensemble $\Omega_b^r(M,\mathfrak{F})$ des r-formes basiques est un module sur l'anneau $\Omega_b^0(M,\mathfrak{F})$ des fonctions basiques. La différentielle d'une forme basique étant une forme basique, on obtient un complexe différentiel

$$0 \longrightarrow \Omega_b^0(M,\mathfrak{F}) \xrightarrow{d} \Omega_b^1(M,\mathfrak{F}) \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \Omega_b^q(M,\mathfrak{F}) \longrightarrow 0$$

qu'on appelle *complexe de de Rham basique* de $\mathfrak{F}$. Sa cohomologie $H_b^*(M,\mathfrak{F})$ est appelée *cohomologie basique* de $\mathfrak{F}$.

Considérons, d'autre part, l'opérateur $* : \Omega_b^r(M,\mathfrak{F}) \longrightarrow \Omega_b^{q-r}(M,\mathfrak{F})$ défini sur une base orthonormée $\{\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_r}\}$ par $*(\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_r}) = \varepsilon w_{j_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{j_{q-r}}$ où $\{j_1, \ldots, j_{q-r}\}$ est la suite croissante complémentaire de $\{i_1, \ldots, i_r\}$ dans $\{1, \ldots, q\}$ et ε la signature de la permutation $\{1, \ldots, q\} \longrightarrow \{i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_{q-r}\}$. C'est l'opérateur de Hodge basique.

Soient $d_b^* : \Omega_b^r(M,\mathfrak{F}) \longrightarrow \Omega_b^{r-1}(M,\mathfrak{F})$ et $\Delta_b : \Omega_b^r(M,\mathfrak{F}) \longrightarrow \Omega_b^r(M,\mathfrak{F})$ les opérateurs définis respectivement par (cf. [7] ou [6]):

$$d_b^* = (-1)^{r(q-r+1)} * d * \quad \text{et} \quad \Delta_b = dd_b^* + d_b^* d\,.$$

Alors $\Delta_b^0 = \Delta_b|_{\Omega_b^0} = d_b^* d$. C'est le laplacien basique opérant sur les fonctions basiques.

Toute fonction basique étant constante sur chaque feuille de $\mathfrak{F}$, elle est constante sur l'adhérence de chaque feuille car continue. L'anneau $\Omega_b^0(M,\mathfrak{F})$ sera par définition l'anneau $C^\infty(M/\overline{\mathfrak{F}})$ des fonctions de classe C^∞ sur $M/\overline{\mathfrak{F}}$.

2.2 – Structure des feuilletages riemanniens [11]

Soit $M^\#$ le fibré des repères transverses orthonormés directs de $(M,\mathfrak{F})$ et $\mathfrak{F}^\#$ le feuilletage relevé de $\mathfrak{F}$ sur $M^\#$.

Alors il existe une fibration localement triviale $\pi_b : M^\# \longrightarrow W$, où W est une variété compacte connexe (appelée variété basique), dont les fibres sont les adhérences des feuilles de $\mathfrak{F}^\#$.

L'action à droite de $G = \mathrm{SO}(q,\mathbb{R})$ sur $M^\#$ se projette en une action à droite sur W dont l'espace des orbites $\overline{W}$ s'identifie à $M/\overline{\mathfrak{F}}$. Donc $C^\infty(\overline{W}) \simeq C^\infty(M/\overline{\mathfrak{F}}) \simeq \Omega_b^0(M,\mathfrak{F})$.

Le feuilletage $\mathfrak{F}$ étant riemannien, il existe une métrique riemannienne γ_ν sur son fibré normal $\nu\mathfrak{F}$ invariante le long des feuilles. Soit $N(\mathfrak{F}) \simeq \nu\mathfrak{F}$ un supplémentaire du fibré tangent $T\mathfrak{F}$ dans TM. La métrique riemannienne γ_ν sur $N(\mathfrak{F})$ est complétée en une métrique $\gamma = \gamma_T \oplus \gamma_\nu$ sur M dite *métrique quasi-fibrée.*

Le feuilletage relevé $\mathfrak{F}^\#$ dans $M^\#$ est transversalement parallélisable de codimension $Q + q$ avec $Q = \frac{q(q-1)}{2}$. En effet, il existe sur $(M^\#, \mathfrak{F}^\#)$ une 1-forme basique $\omega^\# + \theta^\#$ à valeurs dans $\mathrm{so}(q, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^q$, où $\mathrm{so}(q, \mathbb{R})$ est l'algèbre de Lie de G, $\omega^\#$ est la connexion de Levi-Civita transverse de $(M^\#, \mathfrak{F}^\#)$ à valeurs dans $\mathrm{so}(q, \mathbb{R})$, et $\theta^\#$ la forme fondamentale sur $M^\#$ à valeurs dans $\mathbb{R}^q$. Cette 1-forme définit en chaque point un isomorphisme de $\nu\mathfrak{F}^\#$ sur $\mathrm{so}(q, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^q$. Ce qui définit un parallélisme transverse $\{X_1, \dots, X_Q, Y_1, \dots, Y_q\}$ où $\{X_1, \dots, X_Q\}$ est une famille (verticale) de champs transverses fondamentaux correspondant à une base orthonormée de $so(q, \mathbb{R})$ et $\{Y_1, \dots, Y_q\}$ une famille (horizontale) de champs transverses basiques correspondant à une base orthonormée de $\mathbb{R}^q$.

Soit $\gamma_\nu^\#$ la métrique riemannienne de $\nu\mathfrak{F}^\#$ telle que $\gamma\nu^\#(Z_i, Z_j) = \delta_{ij}$ où $Z_i, Z_j \in \{X_1, \dots, X_Q, Y_1, \dots, Y_q\}$. La métrique riemannienne $\gamma_{\nu^\#}$ sur $N(\mathfrak{F}^\#) \simeq \nu\mathfrak{F}^\#$, considéré comme supplémentaire de $T\mathfrak{F}^\#$ dans $TM^\#$ est complétée en une métrique riemannienne $\gamma^\# = \gamma_T^\# \oplus \gamma\nu^\#$ sur $M^\#$ qui est G-invariante ; $\gamma^\#$ induit sur la variété basique W une métrique riemannienne γ^b pour laquelle G agit par isométries. On peut alors appliquer les résultats du Paragraphe 1 à $\overline{W}$.

Soit $C^\infty_{b,G}(M^\#, \mathcal{F}^\#)$ l'anneau des fonctions basiques sur $M^\#$ et invariantes sous l'action de G. En tenant compte des isomorphismes

$$\Omega_b^0(M, \mathcal{F}) \simeq C^\infty_{b,G}(M^\#, \mathcal{F}^\#) \simeq C^\infty(\overline{W}),$$

le spectre G-invariant de (W, γ^b) sera, par définition, le spectre du laplacien basique Δ_b^0 pour le feuilletage $\mathcal{F}$.

Proposition 2.3. *Soit $\mathfrak{F}$ un feuilletage riemannien de codimension q sur une variété compacte connexe transversalement orientable M. Soit $G = SO(q, \mathbb{R})$. Le laplacien Δ de la variété basique W de $(M, \mathfrak{F})$, muni de la métrique riemannienne déduite de la métrique riemannienne transverse de $(M, \mathfrak{F})$ induit un laplacien Δ_G sur $W/G \simeq M/\overline{\mathfrak{F}}$ de spectre*

$\{\lambda_i\}$ *dont la trace du noyau a le développement asymptotique suivant*

$$\sum_{i=0}^{\infty} e^{-t\lambda_i} \underset{t\longrightarrow 0^+}{\sim} (4\pi t)^{-m_0/2} \sum_{\substack{j=0 \\ 0\le k\le \ell}}^{\infty} a_{jk} t^{j/2} (\log t)^k$$

où $m_0 = \dim W_0/G$, W_0 *étant la réunion des orbites principales de l'action de* G *sur* W, *et* ℓ *un entier. D'autre part* $a_{00} = \mathrm{Vol}(W_0/G)$ *et* $a_{0k} = 0$ *pour* $k > 0$.

3 – Développement asymptotique sur une V-variété

La notion de *V-variété* a été introduite par Satake [13], [14].

Définition 3.1. Soit M un espace séparé à base dénombrable d'ouverts. Un atlas de Satake de dimension n est une famille $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ où

(1) $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de M.

(2) $\varphi_i : U_i \longrightarrow V_i/G_i$ est un homéomorphisme de U_i sur le quotient d'un ouvert V_i de $\mathbb{R}^n$ par un groupe fini G_i de difféomorphismes de V_i pour tout $i \in I$,

(3) si $U_i \cap V_j \neq \emptyset$, alors $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ est une application continue qui se relève localement au voisinage de chaque point en une application localement différentiable de V_i dans V_j.

Une V-variété de dimension n est un espace séparé à base dénombrable d'ouverts muni d'un atlas de Satake maximal de dimension n.

Par exemple si X est une variété différentiable (au sens ordinaire) et si G est un groupe fini de difféomorphismes de X alors X/G est une variété de Satake.

Un point x d'une variété de Satake M de dimension n est dit *régulier* s'il admet un voisinage ouvert U homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$, si non x est dit *singulier*.

3.1 – Espace tangent à une variété de Satake

Soit U un ouvert d'une variété de Satake M de dimension n, homéomorphe à V/Γ. L'action de Γ sur V induit une action sur $TV = V \times \mathbb{R}^n$ définie par $\gamma(x,v) = (\gamma(x), d\gamma(v))$. Si x est un point singulier, alors $\gamma(x) = x$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Si $d\gamma(v) = v$ alors le vecteur tangent (x,v) est fixe.

Donc l'action de Γ sur TV n'est pas libre. Par conséquent si U contient un point singulier, TV/Γ n'est pas un ouvert d'une variété différentiable. On identifiera alors les vecteurs tangents à U avec les vecteurs tangents à V qui sont Γ-invariants.

3.2 – Fibré des repères d'une variété de Satake

En utilisant les notations précédentes, soit $r(V) = V \times B(\mathbb{R}^n)$ où $B(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des bases de $\mathbb{R}^n$. L'action de Γ sur V induit une action sur $r(V)$ définie par $\gamma(x,b) = (\gamma(x), d\gamma(b))$. En un point singulier x, $\gamma(x) = x$ mais $d\gamma(b) \neq b$. Alors Γ agit librement sur $r(V)$. Donc $r(U) \simeq r(V)/\Gamma$ est un ouvert d'une variété différentiable. Par conséquent $r(M)$ le $GL(n,\mathbb{R})$-fibré principal des repères de M est une variété différentiable (au sens ordinaire).

3.3 – Développement asymptotique

Soit (M,h) une variété de Satake riemannienne compacte connexe de dimension n orientable (i.e. les actions locales et la compatibilité dans l'atlas préservent l'orientation).

Soit $R(M)$ le G-fibré principal des repères orthonormés directs de M où $G = SO(n,\mathbb{R})$.

Alors $R(M)/G \simeq M$.

$R(M)$ est une variété différentiable compacte connexe de dimension $m = \frac{n(n+1)}{2}$.

En choisissant une métrique riemannienne G-invariante sur $R(M)$, on peut appliquer les résultats du Paragraphe 1.

Proposition 3.4. *Soit M une variété de Satake riemannienne compacte connexe de dimension n orientable. Soient $G = SO(n,\mathbb{R})$ et $R(M)$ le G-fibré principal des repères orthonormés directs de M, muni d'une métrique riemannienne G-invariante.*

Le laplacien de $R(M)$ induit un laplacien sur $R(M)/G \simeq M$, de spectre $\{\lambda_i\}$ dont la trace du noyau a le développement asymptotique suivant:

$$\sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda_i t} \underset{t\to 0^+}{\sim} (4\pi t)^{-m_0/2} \sum_{\substack{j=0 \\ 0\le k\le \ell}}^{\infty} a_{jk} t^{j/2} (\log t)^k$$

où $m_0 = \dim R(M)_0/G$, $R(M)_0$ étant la réunion des orbites principales de l'action de G sur $R(M)$, et ℓ un entier. D'autre part $a_{00} = \mathrm{Vol}(R(M)_0/G)$ et $a_{0k} = 0$ pour $k > 0$.

4 – Exemple

Considérons $M = \mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/x^2+y^2+z^2=1\}$ et $G = \mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$ opérant sur M par

$$r_\theta(x,y,z) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta, z)$$

i.e. par rotation autour de l'axe des z.

Le spectre de $(\mathbb{S}^2, g_0)$, où g_0 est la métrique riemannienne canonique, est l'ensemble des $\lambda_k = k(k+1)$ de multiciplicité $m_k = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$. Les fonctions propres associées à la valeur propre λ_k sont les restrictions à $\mathbb{S}^2$ des polynômes P_k homogènes et harmoniques de degré k sur $\mathbb{R}^3$ (cf. [1]). Le polynôme P_k est fonction propre de Δ_G si, et seulement si, il est G-invariant. Il est facile de voir qu'un tel polynôme doit être de la forme

$$P_k(x,y,z) = Q_k(x^2+y^2, z)$$

où$Q_k$est un polynôme homogène de deux variables. De façon explicite on a:

$$P_{2k} = \sum_{r=0}^{k} a_r (x^2+y^2)^{k-r} z^{2r} \quad \text{et} \quad P_{2k+1} = \sum_{r=0}^{k} b_r (x^2+y^2)^{k-r} z^{2r+1}\,.$$

Exprimons le fait que ces fonctions sont harmoniques en calculant leurs laplaciens respectifs (de la première par exemple, l'autre se faisant de façon similaire):

$$\begin{aligned}\Delta P_{2k} = {} & (4k^2 a_0 + 2a_1)(x^2+y^2)^{k-1} + [4(k-1)^2 a_1 + 12a_2](x^2+y^2)^{k-2} z^2 + \\ & + [4(k-2)^2 a_2 + 30a_3](x^2+y^2)^{k-3} z^4 + \cdots + 2k(2k-1) a_k z^{2k-2} = 0.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
a_1 &= -\frac{4}{2} k^2 a_0 \\
a_2 &= -\frac{4}{3\cdot 4}(k-1)^2 a_1 = (-1)^2 \frac{4}{2}\cdot\frac{4}{3\cdot 4} k^2 (k-1)^2 a_0 \\
a_3 &= -\frac{4}{5\cdot 6}(k-2)^2 a_2 = (-1)^3 \frac{4}{2}\cdot\frac{4}{3\cdot 4}\cdot\frac{4}{5\cdot 6} k^2 (k-1)^2 (k-2)^2 a_0 \\
\ldots &= \ldots \\
a_r &= (-1)^r \frac{4^r}{(2r)!}\Big[\frac{k!}{(k-r)!}\Big]^2 a_0 \\
a_k &= (-1)^k \frac{4^k}{(2k)!}(k!)^2 a_0\,.
\end{aligned}$$

Donc

$$P_{2k} = a_0 \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \frac{4^r}{(2r)!} [\frac{k!}{(k-r)!}]^2 (x^2+y^2)^{k-r} z^{2r}$$

et

$$P_{2k+1} = b_0 \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \frac{4^r}{(2r+1)!} \Big[\frac{k!}{(k-r)!}\Big]^2 (x^2+y^2)^{k-r} z^{2r+1} \,.$$

Par conséquent, chaque sous-espace propre E_{λ_k} formé de fonctions propres G-invariantes associées à la valeur propre λ_k est de dimension 1. Donc chaque valeur propre λ_k dont les fonctions propres associées sont G-invarantes est simple.

Pour cette action de $\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$ sur $\mathbb{S}^2$, il n'y a que deux points fixes: $N=(0,0,1)$ et $S=(0,0,-1)$. Les autres orbites sont principales. Ce sont des cercles d'axe Oz. Donc $M_0 = \mathbb{S}^2 - \{N,S\}$, $m_0 = \dim(M_0/G) = 1$ et $\ell = 0$ (cf. remarques 1.2). On a aussi $a_0 = \mathrm{Vol}(M_0/G) = \mathrm{Vol}(M/G) = \int_{\mathbb{S}^2} \frac{1}{\mathrm{Vol}(G\cdot p)} dp$ où $G\cdot p$ est l'orbite du point $p \in \mathbb{S}^2$. En coordonnées sphériques $p=(x,y,z) = (\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi)$, sur $U = \{(\theta,\varphi) : 0<\theta<2\pi$ et $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\}$. Alors

$$\mathrm{Vol}(G\cdot p) = 2\pi\sqrt{x^2+y^2} = 2\pi\cos\varphi \,.$$

Comme $dp = \cos\varphi d\varphi\, d\theta$, on a

$$a_0 = \int_U \frac{\cos\varphi}{2\pi\cos\varphi} d\varphi\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta.$$

Donc $a_0 = \pi$. Par conséquent

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-tk(k+1)} \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\Big(\pi + \sum_{j=1}^{\infty} a_j t^{j/2}\Big) \,.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Berger – P. Gauduchon – E. Mazet: *Le spectre d'une variété riemannienne*, Lecture Notes in Math. 194, Springer-Verlag (1971).

[2] J. Brüning: *Invariant Eigenfunctions of the Laplacian and their asymptotic distribution*, Lecture Notes in Math., **838** (1981), 69-81.

[3] J. Brüning – E. Heintze: *The asymptotic expansion of Minakshisundaram-Pleijel in the equivariant case*, Duke Math. J., **51** (1984), 959-980.

[4] H. Donnelly: *Asymptotic expansions for the compact quotients of properly discontinuous group actions*, Illinois J. of Math., **23** (3) (1979), 485-496.

[5] A. El Kacimi Alaoui: *Equation de la chaleur sur les espaces singuliers*, CRAS Paris Série I, **6** (1986), 243-246.

[6] A. El Kacimi Alaoui: *Opérateurs transversalement elliptiques sur un feuilletage riemannien et applications*, Compositio Mathematica, **73** (1990), 57-106.

[7] A. El Kacimi Alaoui – G. Hector: *Décomposition de Hodge basique pour un feuillletage riemannien*, Ann. Inst. Fourier Grenoble, **36** (3) (1986), 207-227.

[8] S. Lang: $SL(2,\mathbb{R})$, Addision-Wesley Reading, (1975).

[9] H.P. Mckean – I.M. Singer: *Curvature and the eigenvalues of the Laplacian*, J. of Diff. Geom., **1** (1967), 43-69.

[10] S. Minakshisundaram – A. Pleijel: *Some properties of the eigenfunctions of the Laplace operator on Riemannian manifolds*, Canadian J. of Math., **1** (1949), 242-256.

[11] P. Molino: *Riemannian Foliations*, Progress in Math., **73** Birkhaüser, (1988).

[12] D. Montgomery – H. Samelson – L. Zippin: *Singular points of a compact transformation group*, Annals of Math., **63** (1956), 1-9.

[13] I. Satake: *On a generalization of the notion of manifold*, Proc. Nat. Acad. Sc. USA, **42** (1956), 359-363.

[14] I. Satake: *The Gauss-Bonnet Theorem for V-manifolds*, J. of Math. Soc. of Japan, **9** (4) (1957), 464-492.

Lavoro pervenuto alla redazione il 27 gennaio 1999
ed accettato per la pubblicazione il 4 ottobre 1999.
Bozze licenziate il 22 dicembre 1999

Indirizzo dell'Autore:

T. Sohou – Université de Cocody – UFR de Mathématiques et Informatique – 22 BP 582 – ABIDJAN 22 – Côte d'Ivoire – e-mail: sohout@syfed.ci.refer.org

Ce sujet m'a été proposé par A. El Kacimi et le travail a été réalisé sous sa direction; je l'en remercie. Pendant son élaboration j'ai effectué une série de séjours, à l'Université de Valenciennes au sein du LAMATH, financés par le Ministère Français des Affaires Etrangères. Je remercie ces Institutions.