STUDIA MATHEMATICA

Executive Editors: **Z. Ciesielski, A. Pełczyński, W. Żelazko**

The journal publishes original papers in English, French, German and Russian, mainly in functional analysis, abstract methods of mathematical analysis and probability theory. Usually 3 issues constitute a volume.

Detailed information for authors is given on the inside back cover. Manuscripts and correspondence concerning editorial work should be addressed to

STUDIA MATHEMATICA
Śniadeckich 8, P.O. Box 137, 00-950 Warszawa, Poland, fax 48-22-6293997
E-mail: studia@impan.gov.pl

Subscription information (2000): Vols. 138–143 (18 issues); $33.50 per issue.

Correspondence concerning subscription, exchange and back numbers should be addressed to

Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences
Publications Department
Śniadeckich 8, P.O. Box 137, 00-950 Warszawa, Poland, fax 48-22-6293997
E-mail: publ@impan.gov.pl

Published by the Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences
Typeset using TEX at the Institute
Printed and bound by

drukarnia
herman & herman
SPÓŁKA CYWILNA

PRINTED IN POLAND

ISSN 0039-3223

STUDIA MATHEMATICA 143 (3) (2000)

Fonctionnelles invariantes et courants basiques

par

A. ABOUQATEB (Marrakech) et
A. EL KACIMI ALAOUI (Valenciennes)

Résumé. Dans ce travail : (1) on caractérise l'espace $\mathcal{C}_G$ des fonctionnelles invariantes par un groupe compact G opérant linéairement et continûment sur un espace vectoriel topologique localement convexe séparé et séquentiellement complet E ; plus précisément, on montre que $\mathcal{C}_G$ est le dual topologique du sous-espace E_G des vecteurs de E qui sont G-invariants. (2) On étudie les courants basiques sur une variété feuilletée $(V,\mathcal{F})$. On obtient alors, dans le cas où le feuilletage est associé à une action localement libre d'un groupe de Lie compact connexe, une dualité entre les courants basiques et les formes basiques à support compact. (3) Dans le cas où $\mathcal{F}$ est défini par une action homogène d'un groupe de Lie connexe G sur une variété homogène H/Γ, on exhibe un isomorphisme entre l'espace des courants G-basiques sur H/Γ et les courants Γ-invariants sur H/G. On conclut par des applications dans le cadre des actions homogènes à orbites denses.

Nous allons d'abord introduire les notions qui vont apparaître constamment. Soient G un groupe topologique et V un espace topologique séparé. On appelle *action* de G sur V toute application $\Phi : (g,x) \in G\times V \mapsto gx \in V$ continue et telle que :

(1) $\Phi(e,x) = x$ pour tout $x \in V$ (e étant l'élément neutre de G) ;
(2) $\Phi(g',\Phi(g,x)) = \Phi(g'g,x)$ pour tout $x \in V$ et tous $g,g' \in G$.

Pour $x \in V$, on notera $G_x = \{g \in G : gx = x\}$ son *sous-groupe d'isotropie*. L'*orbite* de x est l'ensemble $Gx = \{gx \in V : g \in G\}$; elle s'identifie au quotient G/G_x. Si on fixe $g \in G$, l'application partielle $\Phi(g,\cdot)$: $x \in V \mapsto \Phi(g,x) = gx \in V$ est un homéomorphisme et ainsi, si Homéo(V) est le groupe des homéomorphismes de V muni de la topologie C^0 (convergence uniforme sur les compacts), on obtient un morphisme continu de groupes $\varrho : g \in G \mapsto \Phi(g,\cdot) \in$ Homéo(V) et on dira qu'on a une *représentation* de G dans Homéo(V). On dira que Φ est *libre* si, pour tout

2000 *Mathematics Subject Classification*: 46E10, 49Q15, 57Sxx.
Lors de l'élaboration de ce travail, le premier auteur a séjourné à l'Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis. Il remercie cette institution pour sa chaleureuse hospitalité.

$x \in V$, $G_x = \{e\}$, i.e. si $gx = x$ implique $g = e$. On dira que Φ est *localement libre* si, pour tout $x \in V$, G_x est discret dans G. Si V est une variété différentiable, l'action est de classe C^k ($k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) si la représentation ϱ associée est à valeurs dans $\mathrm{Diff}^k(V)$, groupe des difféomorphismes de classe C^k de V muni de la C^k-topologie (i.e. convergence uniforme des dérivées jusqu'à l'ordre k sur les compacts de V). Supposons maintenant que G est un sous-groupe fermé connexe d'un groupe de Lie H ; si Γ est un autre sous-groupe fermé de H, l'action naturelle à gauche (resp. à droite) de G sur H induit une action Φ sur l'espace homogène $V = H/\Gamma$ (resp. $\Gamma \backslash H$) ; on dira que Φ est une *action homogène* de G sur V ; si Γ est discret, Φ est localement libre.

Soit V une variété différentiable de dimension N ; on la supposera connexe et orientable. On note $\Omega_c^r(V)$ l'espace des r-formes différentielles à support compact dans V muni de la C^∞-topologie de Schwartz : une suite ω_l converge vers ω, pour cette topologie, s'il existe un compact $K \subset V$ contenant les supports de ω et de toutes les ω_l et ω_l converge vers ω pour la topologie C^∞ ; $\Omega_c^r(V)$ est alors un espace vectoriel topologique, localement convexe, séparé et complet (cf. [Sch]). Un élément T du dual topologique $\mathcal{C}^r(V)$ de $\Omega_c^{N-r}(V)$ est appelé *courant* de degré r sur V (et *distribution* lorsque $r = N$). L'évaluation de T sur ω sera notée $\langle T, \omega \rangle$.

Soit G un groupe topologique agissant sur la variété V à l'aide d'une représentation continue $\varrho : G \to \mathrm{Diff}(V)$ où $\mathrm{Diff}(V)$ est le groupe des difféomorphismes de classe C^∞ de V muni de la topologie C^∞. On confondra l'élément $g \in G$ avec le difféomorphisme $\varrho(g)$. Alors ϱ induit une action naturelle (bien connue), définie pour tout $g \in G$ par

$$g : \omega \in \Omega_c^r(V) \mapsto \varrho(g^{-1})^* \omega \in \Omega_c^r(V).$$

Un courant $T \in \mathcal{C}^r(V)$ est dit *G-invariant* si, pour toute forme $\omega \in \Omega_c^{N-r}(V)$, on a $\langle T, g\omega \rangle = \langle T, \omega \rangle$. L'ensemble des courants sur V de degré r et G-invariants est un sous-espace vectoriel $\mathcal{C}_G^r(V)$ de $\mathcal{C}^r(V)$. La notion de courant généralise celle de mesure et on sait à quel point l'usage des mesures invariantes est important en systèmes dynamiques et en théorie ergodique. Il est bien connu que de telles mesures n'existent pas toujours ; il est donc naturel de s'intéresser à des objets plus généraux, en l'occurrence les courants invariants.

Les distributions sur l'espace $\mathbb{R}^n$ invariantes par un groupe linéaire préservant une forme quadratique ont déjà été étudiées par P. D. Methée [Met], G. de Rham [Rha], A. Tengstrand [Ten], B. Ziemian [Zie1] et C. B. Zhu [Zhu]. Dans [Zie2], B. Ziemian souligne le rôle important que jouent de telles distributions dans l'étude des opérateurs différentiels invariants. L. Flaminio [Fla] a donné une caractérisation des distributions invariantes par le flot géodésique d'une surface de Riemann compacte. Dans

[Elk], une détermination explicite a été donnée de l'espace des courants invariants par une action localement libre préservant le volume du groupe affine sur les 3-variétés compactes à groupe fondamental résoluble. Le point de vue des "courants invariants par un pseudo-groupe" a été développé par A. Haefliger dans [Hae] ; il en a fait usage pour caractériser les feuilletages à feuilles minimales. Dans un autre travail [HL] A. Haefliger et Li Banghe ont décrit explicitement l'espace $\mathcal{C}_\Gamma^r(\mathbf{S}^1)$ pour un groupe fuchsien Γ de covolume fini opérant sur le cercle $\mathbf{S}^1$. Dans [Gai] P.-Y. Gaillard a relié, via la transformation de Poisson, les courants sur la sphère $\mathbf{S}^n$, invariants par un groupe kleinéen, aux formes harmoniques automorphes et cofermées sur l'espace hyperbolique $\mathbf{H}^{n+1}$. Toujours pour un groupe kleinéen Γ opérant sur $\mathbf{S}^n$, il est établi dans [EMM] un théorème de décomposition des r-courants Γ-invariants ($r >$ exposant critique de Γ) en fonction des courants invariants à support dans l'ensemble limite Λ_Γ et des courants invariants sur le domaine de discontinuité $D_\Gamma = \mathbf{S}^n \setminus \Lambda_\Gamma$. Récemment, F. Delacroix [Del] a usé des résultats de [EMM] et [Gai] pour donner une démonstration de la conjecture de Borel–Harder dans le cas particulier d'un groupe kleinéen élémentaire.

Dans la section 1, nous nous intéressons à la notion plus générale de fonctionnelle invariante sur un espace vectoriel topologique. Plus précisément, soit G un groupe topologique agissant continûment sur un espace vectoriel topologique localement convexe séparé E. L'ensemble E_G des vecteurs G-invariants est un sous-espace vectoriel fermé de E. Une forme linéaire continue (on dira *fonctionnelle*) $T : E \to \mathbb{C}$ est dite *G-invariante* si elle vérifie $\langle T, gx \rangle = \langle T, x \rangle$ pour tout $g \in G$ et tout $x \in E$. L'ensemble $\mathcal{C}_G$ des fonctionnelles G-invariantes est un sous-espace vectoriel du dual topologique $\mathcal{C}$ de E. Le problème suivant se pose alors de façon naturelle : *caractériser explicitement l'espace $\mathcal{C}_G$*. Le premier résultat que nous obtenons dans cette direction est le suivant : *supposons G compact et E séquentiellement complet. Alors l'inclusion $j : E_G \to E$ induit, par transposition, un isomorphisme j^t de $\mathcal{C}_G$ sur le dual topologique $(E_G)'$ de E_G.*

La section 2 est consacrée à l'étude de l'espace $\mathcal{C}_\mathcal{F}(V)$ des courants basiques sur une variété feuilletée $(V, \mathcal{F})$, i.e. les courants T qui vérifient $i_X T = 0$ et $L_X T = 0$; ces objets représentent, en un certain sens, les courants sur l'espace des feuilles $V/\mathcal{F}$ qui, en général, ne possède aucune structure différentiable. On regarde plus particulièrement le cas où $\mathcal{F}$ est défini par une action homogène d'un groupe de Lie connexe G sur H/Γ (G étant un sous-groupe fermé de H et Γ un sous-groupe discret). Dans la section 3, on applique les résultats de la section 2 aux actions localement libres homogènes à orbites denses. La section 4, qui constitue l'appendice, sera consacrée à la notion d'intégrale d'une fonction à valeurs vectorielles comme outil principal de la section 1.

1. Fonctionnelles invariantes par G compact. Soient G un groupe topologique compact et μ sa mesure de Haar normalisée. Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe séparé (EVTLCS en abrégé) séquentiellement complet. L'espace des fonctionnelles sur E muni de la topologie usuelle forte (resp. faible) sera appelé le *dual fort* (resp. le *dual faible*) de E ; dans ces deux cas on désignera par E' ce dual topologique.

On se donne une action linéaire continue $(g,x) \in G \times E \mapsto gx \in E$. Un élément $x \in E$ est dit *invariant* si $gx = x$ pour tout $g \in G$. On note E_G le sous-espace (fermé) des éléments invariants. De même, on dira qu'une fonctionnelle $T \in E'$ est *invariante* si $\langle T, gx\rangle = \langle T, x\rangle$ pour tout $x \in E$ et tout $g \in G$. L'espace vectoriel de telles fonctionnelles sera noté $(E')_G$; c'est un sous-espace fermé du dual E'.

Pour tout $x \in E$, l'application $\varphi : g \in G \mapsto gx \in E$ est continue ; son intégrale $\int_G \varphi(g)\, d\mu(g)$ (cf. appendice) est un élément de E qu'on notera $m(x)$. On vérifie facilement que $m(x) \in E_G$ (grâce à l'invariance à gauche de μ). On obtient ainsi une application linéaire

$$\overline{m} : E \to E_G \quad \text{avec} \quad \overline{m}(x) = m(x).$$

(Elle est notée m quand elle est considérée à valeurs dans E ; cette distinction est utile quand on passe aux transposées.) Les applications m et $\overline{m}$ sont continues (ceci découle de l'équicontinuité de la famille des applications $x \in E \mapsto gx \in E$ indexée par $g \in G$ dûe à la compacité du groupe et de la continuité de l'action de G sur E). De plus, pour tout $x \in E_G$, on a $m(x) = \overline{m}(x) = x$, i.e. l'application $\overline{m}$ est une rétraction de E sur le sous-espace E_G.

Lorsqu'on munit le dual de E de l'une des deux topologies usuelles faible ou forte, l'application transposée de m, $m^{\mathrm{t}} : E' \to E'$, est continue (cf. par exemple [VoK], page 73) et a pour image $(E')_G$ car m est constante sur les orbites de l'action de G sur E (ceci est dû à l'invariance à droite de μ). Par le même argument, on montre que, pour tout $S \in (E_G)'$, $\overline{m}^{\mathrm{t}}(S)$ est une fonctionnelle invariante. De plus, pour tout $T \in (E')_G$, on a l'égalité $m^{\mathrm{t}}(T) = T$, i.e. la transposée de m permet de définir une rétraction de E' sur le sous-espace des fonctionnelles invariantes $(E')_G$.

THÉORÈME 1.1. *Soit j l'injection canonique de E_G dans E et notons $j^{\mathrm{t}} : E' \to (E_G)'$ sa transposée. Alors la restriction de j^{t} à $(E')_G$ muni de la topologie induite faible* (*resp. forte*) *est un isomorphisme canonique sur le dual faible* (*resp. fort*) $(E_G)'$ *de E_G.*

Démonstration. Commençons par la surjectivité. Soit S un élément de $(E_G)'$; en posant $T = \overline{m}^{\mathrm{t}}(S)$, on obtient un élément de $(E')_G$ tel que $j^{\mathrm{t}}(T) = S$. Pour établir l'injectivité de la restriction de j^{t} au sous-espace $(E')_G$, considérons un élément $T \in (E')_G$ tel que $j^{\mathrm{t}}(T) = 0$, i.e. la restriction de la fonctionnelle T à l'espace E_G est la fonctionnelle nulle. Montrons qu'en fait T est nulle. Soit $x \in E$; comme $m(x) \in E_G$, on a

$$\langle T, x\rangle = \langle T, x\rangle - \langle T, m(x)\rangle$$

d'où

$$\langle T, x\rangle = \langle T, x\rangle - \langle m^{\mathrm{t}}(T), x\rangle.$$

Puisque $m^{\mathrm{t}}(T) = T$ (car $T \in (E')_G$), nous aurons $\langle T, x\rangle = 0$. Reste à montrer que l'on a bien un isomorphisme topologique. Or, nous venons juste d'établir que l'application réciproque de la bijection en question (i.e. la restriction de j^{t} à $(E')_G$) n'est autre que l'application $\overline{m}^{\mathrm{t}}$ qui est bien continue. ■

De ce théorème, nous allons tirer quelques conséquences portant sur des objets géométriques définis de façon naturelle sur une variété. Soient G un groupe topologique et $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel au-dessus d'une variété V ; on notera $\mathrm{Aut}^k(\mathcal{E})$ le groupe des automorphismes de classe C^k de $\mathcal{E}$, i.e. les homéomorphismes C^k de la variété $\mathcal{E}$ qui sont linéaires en restriction aux fibres, muni de la topologie C^k. On dira que $\mathcal{E}$ est un *G-fibré* ou que *G agit* sur $\mathcal{E}$ s'il existe une représentation ϱ de G dans $\mathrm{Aut}^k(\mathcal{E})$. En particulier, ϱ définit une action de G sur l'espace $\mathbf{E}^k(\mathcal{E})$ des sections de classe C^k de $\mathcal{E}$: si $g \in G$ et $\alpha \in \mathbf{E}^k(\mathcal{E})$, $g\alpha$ est la section définie au point $x \in V$ par $(g\alpha)(x) = g \cdot \alpha(g^{-1} \cdot x)$. On notera $\mathbf{E}^k_G(\mathcal{E})$ l'ensemble des sections G-invariantes de $\mathcal{E}$; c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{E}^k(\mathcal{E})$.

Soient $\mathcal{E} \to M$ un G-fibré et $\mathbf{E}^k(\mathcal{E})$ l'espace de ses sections de classe C^k. Usuellement on munit $\mathbf{E}^k(\mathcal{E})$ de la *C^k-topologie* ; mais si on se restreint au sous-espace $\mathbf{E}^k_{\mathrm{c}}(\mathcal{E})$ des sections à support compact on met dessus la *C^k-topologie de Schwartz* : une suite ω_l dans $\mathbf{E}^k_{\mathrm{c}}(\mathcal{E})$ converge vers $\omega \in \mathbf{E}^k_{\mathrm{c}}(\mathcal{E})$ s'il existe un compact $K \subset V$ tel que les supports de ω et de toutes les ω_l soient contenus dans K et ω_l converge vers ω pour la C^k-topologie. L'espace $\mathbf{E}^k(\mathcal{E})$ contient des sous-espaces intéressants suivant la nature du fibré $\mathcal{E}$, le degré de différentiabilité k et la topologie qu'on y met. Nous allons en donner quelques exemples.

(1) $\mathcal{E}$ est le fibré trivial de fibre l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ et $k = 0$. On considère le sous-espace $\mathbf{E}^0_{\mathrm{c}}(V)$ de $\mathbf{E}^0(\mathcal{E})$ des fonctions à support compact muni de la C^0-topologie de Schwartz ; alors le dual topologique de $\mathbf{E}_{\mathrm{c}}(V)$ est l'espace des mesures sur V.

(2) $\mathcal{E}$ est le fibré $\Lambda^r T^*V$, puissance extérieure de degré r du fibré cotangent à V, et $k = \infty$. L'espace des sections globales de $\mathcal{E}$ est l'espace $\Omega^r(V)$ des r-formes différentielles sur V qu'on connait bien. Soit $\Omega^r_{\mathrm{c}}(V)$ le sous-espace des r-formes à support compact muni de la C^∞-topologie de Schwartz. Le dual topologique de $\Omega^r_{\mathrm{c}}(V)$ est l'espace des $(N - r)$-courants sur V (où $N = \dim(V)$). Une distribution sur V (au sens de Schwartz) est

donc un N-courant dans la terminologie que nous avons adoptée. Evidemment, si V est compacte, l'espace vectoriel topologique $\Omega_c^r(V)$ est égal à $\Omega^r(V)$.

Nous avons donc une liste $\mathcal{L}$ d'EVTLCS séquentiellement complets : l'espace $\mathbf{E}^k(\mathcal{E})$ avec la C^k-topologie et son sous-espace $\mathbf{E}_c^k(\mathcal{E})$ avec la C^k-topologie de Schwartz, $\Omega^r(V)$ et $\Omega_c^r(V)$, etc.

THÉORÈME 1.2. *Soit $\mathcal{E} \to V$ un G-fibré avec G un groupe de Lie compact. Soit E l'un des espaces de la liste $\mathcal{L}$. On notera $\mathcal{C}_G$ l'espace des fonctionnelles G-invariantes sur E. Alors le dual topologique de E_G s'identifie canoniquement à $\mathcal{C}_G$.*

2. Courants basiques. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de dimension m sur une variété V de dimension $N = m + n$. On notera $\mathcal{X}(\mathcal{F})$ le $C^\infty(V)$-module des champs de vecteurs sur V tangents à $\mathcal{F}$.

Soit X un champ de vecteurs sur V. Le produit intérieur d'un r-courant T par X est le $(r-1)$-courant $i_X T$ défini par

$$\langle i_X T, \alpha \rangle = (-1)^r \langle T, i_X \alpha \rangle$$

pour toute forme α de degré $N - r + 1$ à support compact. De même, la dérivée de Lie de T le long de X est le r-courant $L_X T$ défini par

$$\langle L_X T, \alpha \rangle = (-1)^r \langle T, L_X \alpha \rangle$$

pour toute $(N-r)$-forme α à support compact. Une forme différentielle η est dite *basique* si, pour tout $X \in \mathcal{X}(\mathcal{F})$, on a $i_X \eta = 0$ et $L_X \eta = 0$. Un r-courant T sur V est dit *basique* si, pour tout $X \in \mathcal{X}(\mathcal{F})$, on a $i_X T = 0$ et $L_X T = 0$, i.e. pour toute $(N - r + 1)$-forme α et toute $(N-r)$-forme β, toutes deux à support compact, on a $\langle T, i_X \alpha \rangle = 0$ et $\langle T, L_X \beta \rangle = 0$. Il est facile de voir que, pour $r \geq n + 1$, les r-formes basiques et les r-courants basiques sont nuls. L'ensemble des r-courants basiques est un sous-espace vectoriel $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}^r(V)$ de l'espace $\mathcal{C}^r(V)$.

On sait qu'une r-forme η définit un r-courant T_η (appelé *courant régulier*) par

$$\langle T_\eta, \alpha \rangle = \int_V \eta \wedge \alpha$$

où α est une $(N-r)$-forme sur V à support compact.

PROPOSITION 2.1. *Le courant T_η est basique si, et seulement si, la forme η est basique.*

Démonstration. Supposons η basique. Soient $X \in \mathcal{X}(\mathcal{F})$, α une $(N - r + 1)$-forme et β une $(N-r)$-forme, toutes deux à support compact.

On a

$$\langle T_\eta, i_X \alpha \rangle = \int_V \eta \wedge (i_X \alpha),$$

d'où

$$\langle T_\eta, i_X \alpha \rangle = (-1)^r \Big(\int_V i_X (\eta \wedge \alpha) - \int_V (i_X \eta) \wedge \alpha \Big).$$

Ainsi $\langle T_\eta, i_X \alpha \rangle = 0$. D'autre part, on a

$$\langle T_\eta, L_X \beta \rangle = \int_V \eta \wedge (L_X \beta).$$

Puisque $L_X \eta = 0$, nous aurons

$$\langle T_\eta, L_X \beta \rangle = \int_V L_X (\eta \wedge \beta).$$

La formule de Cartan nous donne alors

$$\langle T_\eta, L_X \beta \rangle = \int_V d i_X (\eta \wedge \beta).$$

Par suite, d'après la formule de Stokes,

$$\langle T_\eta, L_X \beta \rangle = 0.$$

Réciproquement, supposons T_η basique. Il s'agit de montrer que, pour tout $X \in \mathcal{X}(\mathcal{F})$, on a $i_X \eta = 0$ et $L_X \eta = 0$. Soit α une $(N - r + 1)$-forme à support compact ; on a

$$0 = \langle T_\eta, i_X \alpha \rangle,$$

c'est-à-dire

$$0 = \int_V \eta \wedge (i_X \alpha),$$

soit encore

$$0 = (-1)^r \Big(\int_V i_X (\eta \wedge \alpha) - \int_V (i_X \eta) \wedge \alpha \Big).$$

Ainsi on a

$$0 = (-1)^{r+1} \int_V (i_X \eta) \wedge \alpha.$$

Comme ceci est vrai pour toute α on en déduit que $i_X \eta = 0$. Soit maintenant β une $(N-r)$-forme à support compact. On a

$$0 = \langle T_\eta, L_X \beta \rangle,$$

soit encore

$$0 = \pm \int_V (L_X \eta) \wedge \beta \pm \int_V L_X (\eta \wedge \beta).$$

Or $\eta\wedge\beta$ est de degré maximum, d'où

$$0=\pm\int_V (L_X\eta)\wedge\beta\pm\int_V d(i_X(\eta\wedge\beta))$$

et d'après la formule de Stokes

$$0=\pm\int_V (L_X\eta)\wedge\beta.$$

Ceci étant vrai pour toute β, on en déduit que $L_X\eta=0$. On a donc montré que la forme η est basique. ■

Un courant T_η associé à une forme basique η est dit *basique régulier*; on le confondra avec η.

Supposons le feuilletage $\mathcal{F}$ défini par une action localement libre d'un groupe de Lie connexe compact G de dimension $m=N-n$. Il est facile de voir qu'un courant T est basique si, et seulement si, $i_XT=0$ et $L_XT=0$ pour tout champ fondamental X. Soit ν le fibré normal à $\mathcal{F}$. Alors ν est un G-fibré. Une section $\alpha\in\mathbf{E}^\infty(\Lambda^{n-r}\nu^*)$ du fibré vectoriel $\Lambda^{n-r}\nu^*$ est appelée *forme semi-basique* de degré $n-r$ pour $\mathcal{F}$. Un courant T sur V est dit *semi-basique* s'il vérifie $i_XT=0$ pour tout champ X tangent à $\mathcal{F}$. Notons $\mathbf{E}^\infty_{\rm c}(\Lambda^{n-r}\nu^*)$ le sous-espace des formes semi-basiques à support compact muni de la C^∞-topologie de Schwartz et $\mathcal{C}^r_{\rm sb}(V)$ l'espace des r-courants semi-basiques. Une forme $\alpha\in\mathbf{E}^\infty_{\rm c}(\Lambda^{n-r}\nu^*)$ semi-basique est basique si, en plus, elle vérifie la condition $L_X\alpha=0$ pour tout champ fondamental X ou, de façon équivalente, puisque G est connexe, si α est G-invariante.

Soient $(X_1,\ldots,X_m)$ une base de champs fondamentaux de l'action de G sur V et χ une m-forme différentielle sur V invariante par G et telle que $\chi(X_1,\ldots,X_m)=1$. Soit $j:\mathbf{E}^\infty_{\rm c}(\Lambda^{n-r}\nu^*)\to\Omega^{m+n-r}_{\rm c}(V)$ l'application définie par $j(\alpha)=\chi\wedge\alpha$. Alors il est facile de voir que j est linéaire, continue, injective et à image $j(\mathbf{E}^\infty_{\rm c}(\Lambda^{n-r}\nu^*))$ fermée. En plus, $j(\mathbf{E}^\infty_{\rm c}(\Lambda^{n-r}\nu^*))$ admet un supplémentaire topologique qui est l'espace $\widehat{\Omega}^{m+n-r}_{\rm c}(V)$ engendré par les éléments de la forme $i_X\eta$ avec $X\in\mathcal{X}(\mathcal{F})$ et $\eta\in\Omega^{m+n+1-r}_{\rm c}(V)$. La transposée de j induit alors un isomorphisme

$$j^{\rm t}:T\in\mathcal{C}^r_{\rm sb}(V)\mapsto j^{\rm t}(T)\in(\mathbf{E}^\infty_{\rm c}(\Lambda^{n-r}\nu^*))^*,$$

$j^{\rm t}(T)$ étant défini par $\langle j^{\rm t}(T),\alpha\rangle=\langle T,\chi\wedge\alpha\rangle$. On vérifie facilement que $j^{\rm t}$ est G-équivariant. On obtient alors comme conséquence du théorème 1.2

THÉORÈME 2.1. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension n défini par une action localement libre d'un groupe de Lie connexe compact G sur une variété V. Alors l'espace $\mathcal{C}^r_{\mathcal{F}}(V)$ des r-courants basiques est le dual topologique de l'espace des $(n-r)$-formes basiques à support compact muni de la C^∞-topologie de Schwartz.*

Le lemme qui suit donne un critère pour qu'un courant soit basique. Il nous sera utile et sa démonstration est immédiate.

LEMME 2.1. *Un courant T (resp. une forme différentielle η) est basique si, et seulement si, tout point de M admet un voisinage U tel que $i_XT=0$ et $L_XT=0$ (resp. $i_X\eta=0$ et $L_X\eta=0$) pour tout champ X tangent à $\mathcal{F}$ et à support dans U.*

Soit maintenant Γ un groupe discret opérant proprement et discontinûment sur V de telle sorte que le quotient $\overline{V}=V/\Gamma$ soit une variété; la projection $\pi:V\to V/\Gamma$ est donc un revêtement. On suppose que l'action préserve le feuilletage $\mathcal{F}$; dans ce cas $\mathcal{F}$ induit un feuilletage $\overline{\mathcal{F}}$ sur $\overline{V}$.

L'exemple type d'une telle situation est celui où V est un groupe de Lie connexe H, $\mathcal{F}$ a pour feuilles les classes à gauche d'un sous-groupe fermé connexe G et Γ un sous-groupe discret de H agissant à droite.

Avec les hypothèses que nous avons faites, nous allons décrire l'espace $\mathcal{C}^*_{\mathcal{F}\Gamma}(V)$ des courants basiques et Γ-invariants sur la variété V, i.e. $\mathcal{C}^*_{\mathcal{F}\Gamma}(V)=\mathcal{C}^*_{\mathcal{F}}(V)\cap\mathcal{C}^*_{\Gamma}(V)$.

La projection $\pi:V\to V/\Gamma$ étant un revêtement, on a une *application transfert* (cf. [EMM]) $\pi!:\Omega^{N-r}_{\rm c}(V)\to\Omega^{N-r}_{\rm c}(V/\Gamma)$ définie par

$$\pi^*(\pi!\alpha)=\sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma^*\alpha$$

(où on a identifié $\gamma\in\Gamma$ au difféomorphisme qu'il induit sur V). Par transposition, on obtient un isomorphisme $I:\mathcal{C}^r(V/\Gamma)\to\mathcal{C}^r_\Gamma(V)$ donné par

$$\langle I(T),\alpha\rangle=\langle T,\pi!\alpha\rangle.$$

PROPOSITION 2.2. *Un r-courant T sur $\overline{V}$ est basique si, et seulement si, le courant $I(T)$ sur V est basique. L'opérateur I induit donc un isomorphisme $\mathcal{C}^r_{\overline{\mathcal{F}}}(V/\Gamma)\overset{\cong}{\to}\mathcal{C}^r_{\mathcal{F}\Gamma}(V)$.*

Démonstration. Supposons $I(T)$ basique sur V. Soit $\overline{\beta}$ une $(N-r+1)$-forme et $\overline{\alpha}$ une $(N-r)$-forme sur $\overline{V}$, toutes deux à support compact, et $\overline{X}$ un champ de vecteurs tangent à $\overline{\mathcal{F}}$. Alors $\overline{X}$ se relève en un champ X sur V, tangent à $\mathcal{F}$ et invariant par Γ. On a

$$\langle i_{\overline{X}}T,\overline{\beta}\rangle=\pm\langle T,i_{\overline{X}}\overline{\beta}\rangle,$$

d'où

$$\langle i_{\overline{X}}T,\overline{\beta}\rangle=\pm\langle I(T),i_{\overline{X}}\pi!(\beta)\rangle,$$

où β est une forme sur V telle que $\pi!(\beta)=\overline{\beta}$. Ceci donne (puisque X est Γ-invariant)

$$\langle i_{\overline{X}}T,\overline{\beta}\rangle=\pm\langle I(T),i_X(\beta)\rangle$$

et par suite
$$\langle i_{\overline{X}}T, \overline{\beta}\rangle = 0.$$
D'autre part
$$\langle L_{\overline{X}}T, \overline{\alpha}\rangle = \pm\langle T, L_{\overline{X}}\overline{\alpha}\rangle,$$
d'où
$$\langle L_{\overline{X}}T, \overline{\alpha}\rangle = \pm\langle I(T), L_{\overline{X}}\pi!(\alpha)\rangle,$$
où α est une forme sur V telle que $\pi!(\alpha) = \overline{\alpha}$. Ceci donne (toujours puisque X est Γ-invariant)
$$\langle L_{\overline{X}}T, \overline{\alpha}\rangle = \pm\langle I(T), L_X(\alpha)\rangle$$
et par suite
$$\langle L_{\overline{X}}T, \overline{\alpha}\rangle = 0.$$

Réciproquement, supposons T basique. Nous allons établir que $I(T)$ est aussi basique en utilisant le lemme 2.1. Soient x un point de V, Δ l'intérieur d'un domaine fondamental de l'action de Γ sur V tel que $x \in \Delta$ et X un champ tangent à $\mathcal{F}$ et à support dans Δ. Alors le champ $\sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma_*X$ est invariant par Γ et induit donc un champ $\overline{X}$ sur $\overline{V}$ tangent à $\overline{\mathcal{F}}$. On se donne une $(N-r+1)$-forme β et une $(N-r)$-forme α sur V toutes deux à support compact. On a alors comme précédemment
$$\langle i_X I(T), \beta\rangle = \pm\langle I(T), i_X\beta\rangle = \pm\langle T, \pi!(i_X\beta)\rangle = \pm\langle T, i_{\overline{X}}\pi!(\beta)\rangle = 0.$$
D'autre part
$$\langle L_X I(T), \alpha\rangle = \pm\langle I(T), L_X\alpha\rangle = \pm\langle T, \pi!(L_X\alpha)\rangle = \pm\langle T, L_{\overline{X}}\pi!(\alpha)\rangle = 0.$$
Le fait que I induise un isomorphisme de $\mathcal{C}^r_{\overline{\mathcal{F}}}(V/\Gamma)$ sur $\mathcal{C}^r_{\mathcal{F}\Gamma}(V)$ est alors immédiat. ∎

Rappelons qu'un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension n sur une variété donne lieu de façon naturelle à un *pseudo-groupe*, i.e. une collection $\mathcal{H}$ de difféomorphismes locaux d'une variété $\mathcal{T}$ (non forcément connexe) de dimension n; cette collection contient l'identité de $\mathcal{T}$ et est fermée par composition (quand elle est définie), par passage à l'inverse, union et restrictions aux ouverts (cf. [Hae] pour un exposé succinct de cette notion). On dira que $(\mathcal{T}, \mathcal{H})$ est le *pseudo-groupe transverse* de $\mathcal{F}$. Notons $\Omega^r_{\mathrm{c}}(\mathrm{Tr}\,\mathcal{F})$ le quotient de $\Omega^r_{\mathrm{c}}(\mathcal{T})$ par le sous-espace engendré par les éléments de la forme $\alpha - h^*\alpha$ avec $h \in \mathcal{H}$ et $\alpha \in \Omega^r_{\mathrm{c}}(\mathcal{T})$; il s'agit d'un EVT non séparé en général.

On suppose le feuilletage $\mathcal{F}$ orientable et on se place toujours dans les hypothèses précédentes. On désigne par $\oint$ l'opérateur d'intégration sur la fibre :
$$\oint : \Omega^{N-r}_{\mathrm{c}}(V) \to \Omega^{n-r}_{\mathrm{c}}(\mathrm{Tr}\,\mathcal{F}).$$
C'est une application linéaire, continue, surjective et ouverte.

PROPOSITION 2.3. *Une forme $\alpha \in \Omega^{m+r}(V)$ est dans le noyau de $\oint$ si, et seulement si, il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_k$ et des champs $X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{X}(\mathcal{F})$ tels que*
$$\alpha = \sum_{j=1}^{k}(L_{X_j}\alpha_j + i_{X_j}\beta_j).$$

Démonstration. Rappelons d'abord (cf. [Rum]) qu'une forme $\omega \in \Omega^{m+r}(V)$ est dite *$\mathcal{F}$-triviale* si, pour toute famille $Z_1, \ldots, Z_{m+r}$ de champs de vecteurs dont m parmi eux sont tangents à $\mathcal{F}$, on a $\omega(Z_1, \ldots, Z_{m+r}) = 0$. D'autre part, d'après [Hae], $\alpha \in \ker\oint$ si, et seulement si, il existe $\beta \in \Omega^{m+r}_{\mathrm{c}}(V)$ et $\eta \in \Omega^{m+r-1}_{\mathrm{c}}(V)$, $\mathcal{F}$-triviales et telles que $\alpha = \beta + d\eta$.

Soit $\{U_i\}$ un recouvrement ouvert localement fini de V et trivialisant $\mathcal{F}$. Par une partition de l'unité, subordonnée à $\{U_i\}$, α se décompose en une somme finie $\alpha = \sum\alpha_i$ où α_i est une forme $\mathcal{F}$-triviale à support dans U_i. Soit $(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ un système de coordonnées sur U_i adapté à $\mathcal{F}$ (i.e. le feuilletage sur U_i est défini par les équations $dy_1 = \ldots = dy_n = 0$). On peut alors écrire
$$\alpha_i = \sum f_{st}\,dx_{s_1}\wedge\ldots\wedge dx_{s_a}\wedge dy_{t_1}\wedge\ldots\wedge dy_{t_b},$$
où $1 \le a \le m-1$, $a + b = m + r$ et la sommation porte sur tous les multi-indices $s = (s_1, \ldots, s_a)$ et $t = (t_1, \ldots, t_b)$ avec $1 \le s_1 < \ldots < s_a \le m$, $1 \le t_1 < \ldots < t_b \le n$. On voit alors que si α est $\mathcal{F}$-triviale, il existe des formes $\beta_1, \ldots, \beta_k$ et des champs $X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{X}(\mathcal{F})$ tels que
$$\alpha = \sum_{j=1}^{k} i_{X_j}\beta_j.$$
La formule de Cartan $L_X = i_Xd + di_X$ permet alors de conclure. ∎

Soit $C^r(\mathrm{Tr}\,\mathcal{F})$ le dual topologique de $\Omega^{n-r}_{\mathrm{c}}(\mathrm{Tr}\,\mathcal{F})$ qui est l'espace des *r-courants transverses* (cf. [Hae]).

COROLLAIRE 2.1. *La transposée J de $\oint$ définit un isomorphisme de $C^r(\mathrm{Tr}\,\mathcal{F})$ sur $\mathcal{C}^r_{\mathcal{F}}(V)$.*

Supposons maintenant que l'espace des feuilles $V/\mathcal{F}$ est une variété ; celle-ci va supporter donc une action de Γ de telle sorte que la projection $V \to V/\mathcal{F}$ soit Γ-équivariante. La démonstration de la proposition qui suit est presque immédiate.

PROPOSITION 2.4. *Soit $T \in C^r(V/\mathcal{F})$. Alors T est Γ-invariant si, et seulement si, $J(T)$ est invariant. L'opérateur J induit donc un isomorphisme $\mathcal{C}^r_{\Gamma}(V/\mathcal{F}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}^r_{\mathcal{F}\Gamma}(V)$.*

Une conséquence immédiate des propositions 2.2 et 2.4 est que les espaces $\mathcal{C}^r_{\overline{\mathcal{F}}}(V/\Gamma)$ et $\mathcal{C}^r_{\Gamma}(V/\mathcal{F})$ sont isomorphes via l'application $J^{-1}\circ I$.

Donnons des applications dans le cadre des actions homogènes. Soient H un groupe de Lie connexe (de dimension $m+n$), G un sous-groupe fermé connexe de dimension m de H et Γ un sous-groupe discret. L'action à droite de G sur H y induit un feuilletage $\mathcal{F}$ se projetant sur $V = H/\Gamma$ en un feuilletage $\overline{\mathcal{F}}$ dont les feuilles sont les orbites de l'action localement libre de G induite sur V. Comme l'involution $h \in H \mapsto h^{-1} \in H$ est un difféomorphisme Γ-équivariant de l'espace homogène $G\backslash H$ sur l'espace homogène H/G, l'espace $\mathcal{C}^r_\Gamma(G\backslash H)$ est isomorphe (toujours en tant qu'EVT) à l'espace $\mathcal{C}^r_\Gamma(H/G)$ pour tout $r \in \mathbb{N}$.

Signalons aussi que, puisque le groupe G est connexe, l'espace homogène H/G est orientable (ceci de façon que l'action homogène de H sur H/G préserve l'orientation), et on a l'identification $\mathcal{C}^n(H/G) \simeq \mathcal{C}^0(H/G)$. Mais ceci ne nous permet pas d'affirmer l'existence d'une forme volume sur H/G qui soit invariante par toutes les transformations de H. En fait, si le groupe H est unimodulaire, l'existence d'une telle forme volume est équivalente à l'unimodularité de G; par exemple, si on prend pour H le groupe unimodulaire des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels de déterminant 1, et pour G le groupe des transformations affines de la droite réelle, alors il n'existe pas de 1-forme volume sur H/G qui soit H-invariante.

THÉORÈME 2.2. *Pour tout r, on a un isomorphisme $\mathcal{C}^r_{\overline{\mathcal{F}}}(H/\Gamma) \simeq \mathcal{C}^r_\Gamma(H/G)$. Supposons H unimodulaire (i.e. supportant une forme volume H-invariante à gauche et à droite). Alors les espaces $\mathcal{C}^0_\Gamma(H/G)$, $\mathcal{C}^0_G(H/\Gamma)$ et $\mathcal{C}^{m+n}_G(H/\Gamma)$ sont isomorphes; si en plus le groupe G est unimodulaire alors l'espace des distributions Γ-invariantes sur H/G et l'espace des distributions G-invariantes sur H/Γ sont isomorphes.*

Ce théorème peut s'interpréter comme une "variante" (au niveau des courants) d'un résultat de H. Furstenberg ([Fur], Th. 1.4) : *soient G et L deux sous-groupes fermés unimodulaires d'un groupe de Lie H. Alors il existe une correspondance biunivoque entre les mesures sur H/G invariantes par L et celles sur H/L invariantes par G.*

3. Actions homogènes à orbites denses. Soient H un groupe de Lie et K un sous-groupe fermé de H sur la variété homogène $V = H/K = \{\overline{h} : h \in H\}$ avec $\overline{h} = \{hk : k \in K\}$. Tout sous-groupe de Lie G de H opère différentiablement sur V via la représentation $\varrho : G \to \mathrm{Diff}(V)$ définie par

$$\varrho(g)\overline{h} = \overline{gh}.$$

C'est l'*action homogène* de G sur $V = H/K$. En un point $x = \overline{h}$ de V le groupe d'isotropie est donné par

$$G_x = G \cap (hKh^{-1}).$$

Il est notamment discret si K est discret; l'action est alors localement libre. Si

$$g \in G \cap \Big(\bigcap_{h\in H} hKh^{-1} \Big)$$

alors $\varrho(g)$ est l'identité de V, de façon que dans le cas particulier où K est un sous-groupe distingué de H, l'action de K sur V est triviale. Il est par ailleurs clair que si Γ désigne un sous-groupe discret de H, alors l'action homogène de G (sous-groupe fermé de H) sur $V = H/\Gamma$ définit un feuilletage sur V; beaucoup d'exemples sont obtenus de cette manière.

LEMME 3.1. *Soient H un groupe de Lie, G et K deux sous-groupes fermés de H. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

(a) *Les orbites de l'action homogène de G sur H/K sont denses.*
(b) *Les orbites de l'action homogène de K sur H/G sont denses.*
(c) *GK est dense dans H.*
(d) *KG est dense dans H.*

Démonstration. Puisque G et K sont des sous-groupes de H et que l'involution $h \mapsto h^{-1}$ du groupe H est continue, l'équivalence entre (c) et (d) est claire. L'implication (c)⇒(a) est aussi claire par la continuité de la projection $\pi : H \to H/K$.

Réciproquement, supposons que les orbites de G dans H/K sont denses. Alors pour tout $h \in H$, il existe une suite (g_n) dans G telle que $\pi(h) = \lim_{n\to\infty} \pi(g_n)$. Comme la projection $\pi : H \to H/K$ est un K-fibré principal, il existe un voisinage ouvert V de $\overline{h}$ dans H/K trivialisant le K-fibré principal :

$$\varphi : s \in \pi^{-1}(V) \overset{\cong}{\mapsto} (\pi s, -) \in V \times K$$

avec $\varphi(h) = (\pi h, 1)$ et tel que $\pi(g_n) \in V$ pour tout n. Soit alors $\varphi(g_n) = (\pi g_n, k_n)$; on aura donc $\varphi(g_n k_n^{-1}) = (\pi g_n, 1)$, d'où

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(g_n k_n^{-1}) = (\pi h, 1) = \varphi(h)$$

et par suite $\lim(g_n k_n^{-1}) = h$. Ainsi GK est dense dans H. L'équivalence entre (d) et (b) est la même que celle entre (c) et (a). ∎

EXEMPLES 3.1. (1) Soit A une matrice de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ de trace strictement supérieure à 2. Soient H le groupe défini par la multiplication sur $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$(x_1, x_2, t) \cdot (x_1', x_2', t) = (A^t(x_1', x_2') + (x_1, x_2), t + t')$$

et Γ le sous-groupe de H formé par les éléments à coefficients dans $\mathbb{Z}$. La matrice A possède deux valeurs propres $\lambda > 1$ et $\lambda' = 1/\lambda$; soit u un vecteur propre de $\mathbb{R}^2$ associé à la valeur propre λ et considérons le sous-groupe $G = \{(au, b) \in H : a, b \in \mathbb{R}\}$. Alors l'action homogène de G sur H/Γ est localement libre et à orbites denses (cf. [Ghy]). Une généralisation de cet exemple se trouve dans [EN].

(2) Soient G le sous-groupe de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ des matrices de la forme

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a>0,$$

et Γ un sous-groupe discret cocompact de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Comme les orbites de G agissant sur $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\Gamma$ sont denses (cf. par exemple [Ghy]), on en déduit en utilisant le lemme 3.1 que $G\Gamma$ est dense dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ et l'action homogène de Γ sur $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/G\cong \mathbf{S}^1$ est à orbites denses.

(3) Soient H un groupe de Lie semi-simple sans facteur compact et G un sous-groupe unipotent connexe maximal de H. Alors pour tout sous-groupe discret cocompact Γ de H l'action homogène de G sur H/Γ est à orbites denses (cf. [Dan]).

Le corollaire qui suit découle immédiatement du lemme principal.

Corollaire 3.1. *Désignons par $\varphi : H \to \mathrm{Diff}(V)$ la représentation définie par l'action homogène de H et supposons que l'action homogène de G sur V est à orbites denses. Alors*

(1) *$\varphi(G)\varphi(K)$ est dense dans $\varphi(H)$,*

(2) *si K est distingué dans H, $\varphi(G)$ est dense dans $\varphi(H)$ et tout courant G-invariant sur V est aussi H-invariant,*

(3) *si l'action homogène de G sur $V=H/K$ est à orbites denses, les courants H-invariants sur V s'identifient aux courants qui sont à la fois G-invariants et K-invariants.*

Soient H un groupe de Lie de dimension N muni de son orientation à droite, G un sous-groupe fermé de H et Γ un sous-groupe discret de H. La projection naturelle $\pi : H \to H/\Gamma$ est alors un revêtement et la variété H/Γ est canoniquement orientée. Nous avons vu que l'application "transfert" $\pi! : \Omega_c^{N-r}(H) \to \Omega_c^{N-r}(H/\Gamma)$ définie par

$$\pi^*(\pi!\alpha)=\sum_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma^*\alpha$$

induit, par transposition, un isomorphisme topologique

$$I : \mathcal{C}^r(H/\Gamma) \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}^r_{\Gamma_d}(H)$$

où $\mathcal{C}^r_{\Gamma_d}(H)$ est l'espace des r-courants sur H, Γ-invariants à droite.

Proposition 3.1. *L'application I induit aussi des isomorphismes*

(1) *entre $\mathcal{C}^r_G(H/\Gamma)$ et l'espace $\mathcal{C}^r_{\Gamma_d}(H)\cap\mathcal{C}^r_{G_d}(H)$ des courants sur H qui sont Γ-invariants à droite et G-invariants à gauche;*

(2) *entre $\mathcal{C}^r_\Gamma(H/\Gamma)$ et l'espace $\mathcal{C}^r_{\Gamma_b}(H)$ des courants Γ-biinvariants sur H.*

Démonstration. Découle de la G-équivariance de l'application $\pi!$. Ceci est dû essentiellement au fait que sur un groupe de Lie, une translation à droite et une translation à gauche commutent. ■

Lemme 3.2. *Soit $T\in\mathcal{C}^r(H/\Gamma)$ tel que $I(T)$ soit défini par une forme différentielle $\beta\in\Omega^r(H)$, i.e.*

$$\langle I(T),\alpha\rangle=\int_H \beta\wedge\alpha, \quad \forall\alpha\in\Omega_c^{N-r}(H).$$

Alors

(1) *β est une forme différentielle Γ-invariante à droite. Le courant T est régulier sur H/Γ, associé à l'unique forme différentielle $\overline{\beta}\in\Omega_c^r(H/\Gamma)$ telle que $\pi^*(\overline{\beta})=\beta$, i.e.*

$$\langle T,\eta\rangle=\int_{H/\Gamma}\overline{\beta}\wedge\eta, \quad \forall\eta\in\Omega_c^{N-r}(H/\Gamma).$$

(2) *L'espace $\mathcal{C}^r_H(H/\Gamma)$ s'identifie à l'espace $(\Lambda^r\mathcal{H}^*)_{\Gamma_d}$ des r-formes différentielles invariantes à gauche sur H et Γ-invariantes à droite. L'isomorphisme $J:(\Lambda^r\mathcal{H}^*)_{\Gamma_d}\to\mathcal{C}^r_H(H/\Gamma)$ est donné par*

$$\langle J(\beta),\eta\rangle=\int_{H/\Gamma}\overline{\beta}\wedge\eta \quad \textit{avec} \quad \pi^*(\overline{\beta})=\beta.$$

Démonstration. (1) La première assertion est claire puisque H est muni de l'orientation à droite. Montrons la deuxième. Puisque I est un isomorphisme, il suffit de vérifier que l'image par I du courant régulier sur H/Γ défini à partir de $\overline{\beta}$ n'est autre que le courant régulier sur H défini à partir de $\pi^*(\overline{\beta})$. Or ceci est une conséquence du fait qu'on a

$$\int_{H/\Gamma}\overline{\beta}\wedge\pi!\alpha=\int_H\beta\wedge\alpha, \quad \forall\alpha\in\Omega_c^{N-r}(H),$$

formule qui s'obtient facilement en introduisant un domaine fondamental de l'action de Γ sur H.

(2) L'espace $\mathcal{C}^r_H(H/\Gamma)$ s'identifie, via l'isomorphisme I, à $\mathcal{C}^r_{\Gamma_d}(H)\cap\mathcal{C}^r_{H_g}(H)$ ($\mathcal{C}^r_{H_g}(H)=$ espace des r-courants sur H, H-invariants à gauche). Il suffit alors, d'après (1), de montrer que tout r-courant sur H, H-invariant à gauche est régulier. Soit alors $w^1,\ldots,w^N$ une base de 1-formes différentielles invariantes à gauche sur H. Il est clair (à cause de l'orientation naturelle de H par la forme volume $w^1\wedge\ldots\wedge w^N$) que la donnée d'un N-courant sur H n'est autre que la donnée d'une distribution sur H. Si S est une distribution sur H et β une r-forme différentielle sur H, on désignera par $S\wedge\beta$ le r-courant défini par $\langle S\wedge\beta,\alpha\rangle=\langle S,\beta\wedge\alpha\rangle$. Ceci étant, l'expression d'un r-courant T sur H est donnée par $T=\sum T_I\wedge\omega^I$ où la sommation porte sur

tous les multi-indices $I = (i_1 < \ldots < i_r) \subset \{1, \ldots, N\}$, T_I étant une distribution sur H pour chaque I et $\omega^I = \omega^{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_r}$. Dire que le r-courant T est H-invariant à gauche signifie que les distributions T_I le sont. Or il est bien connu que toute distribution invariante à gauche sur un groupe de Lie est une mesure de Haar à gauche. On en déduit alors que T_I est une constante pour tout multi-indice I. ∎

La démonstration du corollaire qui suit est une conséquence immédiate du lemme 3.5 ci-dessus et du corollaire 3.1.

COROLLAIRE 2. *Si l'action homogène de G sur H/Γ est à orbites denses alors pour tout r-courant T sur H/Γ, G-invariant et Γ-invariant, il existe une forme différentielle β sur H, invariante à gauche et Γ-invariante à droite telle que T soit donné par*

$$\langle T, \eta\rangle = \int_{H/\Gamma} \overline{\beta} \wedge \eta \quad \text{où } \pi^*\overline{\beta} = \beta.$$

Dans [Elk] il est montré que dans le cas de l'exemple 3.1(1), les courants G-invariants sur $V = H/\Gamma$ s'identifient aux courants H-invariants. Le corollaire 3.1 nous permet d'affirmer que plus généralement, dans le cadre des actions homogènes à orbites denses, les courants G-invariants sur $V = H/\Gamma$ s'identifient aux courants H-invariants si, et seulement si, tout courant G-invariant sur V est aussi Γ-invariant, soit encore, d'après le corollaire 3.2, si tout courant sur H qui est Γ-invariant à droite et G-invariant à gauche est aussi Γ-invariant à gauche. L'exemple qui suit montre que ceci n'est pas toujours le cas.

On considère le demi-plan de Poincaré $\mathbf{H} = \{x+iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ muni de sa métrique hyperbolique $ds^2 = (dx^2+dy^2)/y^2$. Le groupe des isométries de $\mathbf{H}$ s'identifie au groupe quotient $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\{I,-I\}$. L'opération de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ est induite par celle de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ définie comme suit :

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z\right) \mapsto \frac{az+b}{cz+d}.$$

Celle-ci permet aussi de décrire l'action projective de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ sur le cercle $\mathbf{S}^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ qui, avec l'action de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ sur $\mathbf{H}$, donne une action de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ sur le produit $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{H}$. En plus on a un difféomorphisme $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$-équivariant $\Phi : A \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \to (A(\infty), A(i)) \in \mathbf{S}^1 \times \mathbf{H}$ (cf. [Mat]).

Soit maintenant Γ un sous-groupe discret de $H = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. On dira que Γ est de *covolume fini* si le volume de H/Γ est fini ; on dira que Γ est *cocompact* si H/Γ est compact. Bien sûr, si Γ est cocompact, il est de covolume fini. Si Γ est de covolume fini sans être compact, il a des cusps (cf. [Fre]) en nombre fini qu'on notera k ; par exemple $\Gamma = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ a un seul cusp correspondant à la pointe de la surface modulaire $\mathbf{H}/\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$. Si Σ est une surface de Riemann compacte de courbure constante égale à -1, son groupe fondamental se plonge dans H en un sous-groupe discret cocompact Γ de sorte que le fibré unitaire tangent $S\Sigma$ à Σ s'identifie à H/Γ. Notons G le groupe des transformations affines de la droite réelle préservant l'orientation, considéré comme sous-groupe de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ (cf. l'exemple 3.1(2)). Alors l'action à droite de G sur H définit un feuilletage de codimension 1 sur H/Γ usuellement appelé *feuilletage stable*. D'après la section 2 on a

$$\mathcal{C}^r_{\mathcal{F}}(H/\Gamma) \simeq \mathcal{C}^r_{\Gamma}(H/\mathcal{F}).$$

Supposons maintenant que Γ est cocompact ; alors le difféomorphisme Φ induit un difféomorphisme $\overline{\Phi} : H/\mathcal{F} \to \mathbf{S}^1$ qui est Γ-équivariant ($\mathbf{S}^1$ est muni de l'action projective induite par Γ). Le quotient $\Gamma\backslash\mathbf{H}$ est difféomorphe à une surface compacte avec points coniques (i.e. orbifold) puisque l'action de Γ sur $\mathbf{H}$ n'est pas forcément libre ; soit g son genre.

THÉORÈME 3.1. *Soient Γ un sous-groupe discret cocompact de H et $\mathcal{F}$ le feuilletage défini sur $V = H/\Gamma$ par l'action homogène de G. Alors $\mathcal{C}^1_{\mathcal{F}}(V) \simeq \mathcal{C}^1_{\Gamma}(\mathbf{S}^1)$ et $\mathcal{C}^0_{\mathcal{F}}(V) \simeq \mathcal{C}^0_{\Gamma}(\mathbf{S}^1)$.*

D'après [Hae], les espaces $\mathcal{C}^1_{\mathcal{F}}(V)$ et $\mathcal{C}^1_{\Gamma}(\mathbf{S}^1)$ ont $2g$ pour dimension et les espaces $\mathcal{C}^0_{\mathcal{F}}(V)$ et $\mathcal{C}^0_{\Gamma}(\mathbf{S}^1)$ sont des droites vectorielles.

COROLLAIRE 3.3. *L'inclusion $\mathcal{C}^1_H(H/\Gamma) \subset \mathcal{C}^1_G(H/\Gamma)$ est stricte pour tout sous-groupe discret cocompact Γ de H tel que la surface $\Gamma\backslash\mathbf{H}$ soit de genre g supérieur à 2.*

Soit Φ une action localement libre du groupe affine préservant un volume continu ω sur une 3-variété compacte V. Alors ω est C^∞, la variété V est difféomorphe à l'un des espaces H/Γ des exemples 3.1 et Φ est conjuguée à l'action homogène de G sur H/Γ qui est à orbites denses [Ghy]. On a alors le

THÉORÈME 3.2. *Soit Φ une action localement libre du groupe affine préservant un volume continu ω sur une 3-variété compacte V. Alors $\mathcal{C}^3_G(V) \simeq \mathbb{C}\omega$.*

Il est bien connu que la donnée d'une famille de champs de vecteurs complets sur une variété différentiable V, tels que leurs crochets soient donnés par les constantes de structures d'une algèbre de Lie $\mathcal{H}$, implique l'existence d'une action d'un groupe de Lie connexe H sur V dont les champs fondamentaux sont ceux de cette famille. Si en plus ces champs de vecteurs sont linéairement indépendants en tout point de V, alors l'action de H sur V est localement libre. On obtient ainsi

COROLLAIRE 3.4. *Soient V une 3-variété compacte et X, Y deux champs de vecteurs sur V linéairement indépendants en tout point et tels que $[X,Y] = Y$. On suppose qu'il existe une forme volume ω sur V telle que $L_X\omega = 0$ et $L_Y\omega = 0$. Alors le sous-espace vectoriel de $C^\infty(V)$ (qu'on munit de la*

C^∞-topologie) engendré par $\{Xf + Yg : f, g \in C^\infty(V)\}$ est dense dans le noyau de la forme linéaire $\varphi \in C^\infty(V) \mapsto \int_V \varphi\omega \in \mathbb{C}$.

REMARQUE 3.1. On dira qu'un feuilletage $\mathcal{F}$ sur une variété V est *transversalement homogène* s'il est défini par un *cocycle feuilleté* (U_i, f_i, γ_{ij}) où U_i est un recouvrement ouvert de V, f_i une submersion de U_i au-dessus d'un espace homogène H/G et γ_{ij} un difféomorphisme de $f_i(U_i \cap U_j)$ sur $f_j(U_i \cap U_j)$ induit par une translation à gauche sur H et vérifiant $f_j = \gamma_{ij} \circ f_i$.

Notons $\widetilde{V}$ le revêtement universel de V qu'on supposera compacte. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage transversalement homogène sur V. Alors il existe une submersion $D : \widetilde{V} \to H/G$ dont les fibres sont les feuilles du feuilletage relevé $\widetilde{\mathcal{F}}$ à $\widetilde{V}$ et une représentation $\varrho : \pi_1(V) \to H$ telles que, pour tout $\sigma \in \pi_1(V)$ et tout $x \in \widetilde{V}$, on ait $D(\sigma \cdot x) = \varrho(\sigma)(Dx)$ (cf. [Blu]). En appliquant ce théorème de structure et le même type de calculs que pour les actions homogènes, on peut montrer que $\mathcal{C}^r_{\mathcal{F}}(V)$ est isomorphe à $\mathcal{C}^r_{\Gamma_{\mathrm{g}}}(H/G)$ où $\Gamma = \varrho(\pi_1(V))$.

4. Appendice. Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbf{K}$ (qui sera toujours $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Une famille de semi-normes $(p_i)_{i\in I}$ est dite *filtrante* si, pour toute partie finie J de I, la borne supérieure de $(p_i)_{i\in J}$ est un élément de cette famille ; on dira qu'elle est *séparante* si $p_i(x) = 0$, pour tout $i \in I$, implique $x = 0$. La donnée d'une telle famille permet de munir E d'une structure d'espace vectoriel topologique localement convexe séparé (EVTLCS en abrégé) ; si I est dénombrable, E est métrisable.

Une partie B de E est dite *bornée* si pour tout $i \in I$, il existe un réel $a_i > 0$ tel que pour tout $x \in B$, $p_i(x) \le a_i$. Une telle partie B de E permet toujours de définir sur le dual E' une semi-norme p_B donnée par

$$p_B(T) = \sup_{x\in B} |\langle T, x\rangle|$$

pour $T \in E'$. La topologie *forte* (resp. la topologie *faible*) sur E' est celle définie par la famille des semi-normes p_B pour B variant dans l'ensemble des parties bornés de E (resp. l'ensemble des parties finies de E).

Une suite (x_l) dans E converge vers $x \in E$ si, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $i \in I$, il existe $l_i \in \mathbb{N}$ tel que

$$l \ge l_i \ \Rightarrow\ p_i(x_l - x) < \varepsilon.$$

On dira que x_l est une *suite de Cauchy* si, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $i \in I$, il existe $l_i \in \mathbb{R}$ tel que

$$l, k \ge l_i \ \Rightarrow\ p_i(x_l - x_k) < \varepsilon.$$

L'espace E est *séquentiellement complet* si toute suite de Cauchy est convergente. Dans toute la suite, $(E, (p_i)_{i\in I})$ sera un EVTLCS séquentiellement complet.

Soient G un espace topologique compact dont la topologie est définie par une métrique δ et μ une mesure de probabilité sur la tribu borélienne $\mathcal{B}_G$. On note $C(G, E)$ l'espace vectoriel des applications continues de G dans E muni des semi-normes $q_i(\varphi) = \sup_{g\in G} p_i(\varphi(g))$ qui en font un EVTLCS.

PROPOSITION 4.1. *Il existe une application linéaire $\mathcal{I} : C(G, E) \to E$ associant à chaque φ un vecteur $\mathcal{I}(\varphi) \in E$ appelé* intégrale *de φ. Cette application vérifie les propriétés suivantes :*

(1) *Pour toute fonctionnelle $T : E \to \mathbf{K}$, la fonction numérique $g \in G \mapsto T(\varphi(g)) \in \mathbf{K}$ est intégrable, d'intégrale $T(\mathcal{I}(\varphi))$.*

(2) *Pour tout $i \in I$, on a l'estimation $p_i(\mathcal{I}(\varphi)) \le q_i(\varphi)$, i.e. $\mathcal{I}$ est continue.*

Démonstration. Remarquons d'abord que, d'après le théorème de Hahn–Banach, si l'application $\mathcal{I} : C(G, E) \to E$ existe, elle est unique. On va la construire.

Une *partition mesurable finie* de G (on dira simplement *partition*) est la donnée d'une famille finie $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ d'éléments deux à deux disjoints G_λ de $\mathcal{B}_G$ dont la réunion est G. On dira que $(G_{\lambda'})_{\lambda'\in\Lambda'}$ est plus *fine* que $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ si, pour tout $\lambda' \in \Lambda'$, il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que $G_{\lambda'} \subset G_\lambda$. On appelle *diamètre* de $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ le nombre $\tau_\Lambda = \sup\{\text{diamètre de } G_\lambda\}$. Soient τ_N une suite de réels strictement positifs tendant vers 0 et $\Lambda_N = (G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_N}$ une suite de partitions, chacune de diamètre τ_N et telle que Λ_{N+1} soit plus fine que Λ_N. On choisit un élément g_λ dans chaque G_λ et on pose

$$x_N = \sum_{\lambda\in\Lambda_N} \mu(G_\lambda)\varphi(g_\lambda).$$

Montrons que la suite $(x_N)_N$ est convergente. Pour cela, E étant séquentiellement complet, il suffit de montrer que (x_N) est de Cauchy. Soient $\varepsilon > 0$ et $i \in I$. Comme φ est continue sur G compact, elle y est uniformément continue ; il existe donc $\eta > 0$ (ne dépendant que de ε et i) tel que

$$\delta(g, g') < \eta \ \Rightarrow\ p_i(\varphi(g) - \varphi(g')) < \varepsilon.$$

Soit $l_i \in \mathbb{N}$ tel que $\tau_{l_i} < \eta$. Nous allons montrer que

$$p_i(x_l - x_k) < \varepsilon$$

pour tous entiers $l, k \ge l_i$. On a

$$p_i(x_l - x_k) = p_i\Big(\sum_{\lambda\in\Lambda_l} \mu(G_\lambda)\varphi(g_\lambda) - \sum_{\lambda'\in\Lambda_k} \mu(G_{\lambda'})\varphi(g_{\lambda'})\Big).$$

Soit encore

$$p_i(x_l - x_k) = p_i\Big(\sum_{\lambda,\lambda'} \mu(G_\lambda \cap G_{\lambda'})(\varphi(g_\lambda) - \varphi(g_{\lambda'}))\Big)$$

et par suite

$$p_i(x_l - x_k) \le \sum_{\lambda,\lambda'} \mu(G_\lambda \cap G_{\lambda'}) p_i(\varphi(g_\lambda) - \varphi(g_{\lambda'})).$$

Dans la somme les seuls termes éventuellement non nuls sont ceux pour lesquels g_λ et $g_{\lambda'}$ sont dans un même $G_{l'}$, élément de la partition $(G_l)_{l\in\Lambda_{l_i}}$. Donc $p_i(x_l - x_k) < \varepsilon$. Ceci montre que la suite x_N est de Cauchy dans E, donc convergente. On pose alors

$$\mathcal{I}(\varphi) = \lim x_N.$$

$\mathcal{I}$ est ainsi l'application cherchée. ∎

References

[Blu] R. Blumenthal, *Transversely homogeneous foliations*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 29 (1979), no. 4, 143–158.

[Bou] N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques*, chapitres 1 à 5, Masson, Paris, 1981.

[Dan] S. G. Dani, *Bernoullian translations and minimal horospheres on homogeneous spaces*, J. Indian Math. Soc. 39 (1976), 245–284.

[Del] F. Delacroix, *Invariant currents and automorphic forms of an elementary Kleinian group*, Hokkaido Math. J., to appear.

[Die] J. Dieudonné, *Eléments d'analyse*, tome III, Cahiers Scientifiques 33, Gauthier-Villars, 1970.

[Elk] A. El Kacimi Alaoui, *Invariants de certaines actions de Lie. Instabilité du caractère Fredholm*, Manuscripta Math. 74 (1992), 143–160.

[EMM] A. El Kacimi Alaoui, S. Matsumoto and T. Moussa, *Currents invariant by a Kleinian group*, Hokkaido Math. J. 26 (1997), 177–202.

[EN] A. El Kacimi Alaoui and M. Nicolau, *A class of C^∞-stable foliations*, Ergodic Theory Dynam. Systems 13 (1993), 697–704.

[Fla] L. Flaminio, *Une remarque sur les distributions invariantes par les flots géodésiques des surfaces*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 315 (1992), 735–738.

[Fre] E. Freitag, *Hilbert Modular Forms*, Springer, 1990.

[Fur] H. Furstenberg, *The unique ergodicity of the horocycle flow*, in: Recent Advances in Topological Dynamics, A. Beck (ed.), Lecture Notes in Math. 318, Springer, 1972, 95–115.

[Gai] P.-Y. Gaillard, *Transformation de Poisson des formes différentielles. Le cas de l'espace hyperbolique*, Comment. Math. Helv. 61 (1986), 581–616.

[Ghy] E. Ghys, *Actions localement libres du groupe affine*, Invent. Math. 82 (1985), 479–526.

[Hae] A. Haefliger, *Some remarks on foliations with minimal leaves*, J. Differential Geom. 15 (1980), 269–284.

[HL] A. Haefliger and B. H. Li, *Currents on the circle invariant by a Fuchsian group*, in: Lecture Notes in Math. 1007, Springer, 1981, 369–378.

[Her] C. S. Herz, *Functions which are divergences*, Amer. J. Math. 92 (1970), 640–656.

[Köt] G. Köthe, *Topological Vector Spaces I*, Grundlehren Math. Wiss. 159, Springer, 1969.

[Mat] S. Matsumoto, *Codimension One Anosov Flows*, Lecture Notes Ser. 27, Seoul Nat. Univ., 1995.

[Met] P. D. Methée, *Sur les distributions invariantes dans le groupe de rotations de Lorentz*, Comment. Math. Helv. 28 (1954), 224–269.

[Rha1] G. de Rham, *Variétés différentiables*, Hermann, Paris, 1960.

[Rha2] —, *Sur la division de formes et de courants par une forme linéaire*, Comment. Math. Helv. 28 (1964), 346–352.

[Rum] H. Rummler, *Quelques notions simples en géométrie riemannienne et leurs applications aux feuilletages compacts*, ibid. 54 (1979), 224–239.

[Sch] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1966.

[Ten] A. Tengstrand, *Distributions invariant under an orthogonal group of arbitrary signature*, Math. Scand. 8 (1960), 201–218.

[VoK] K. Vo-Khac, *Distributions, Analyse de Fourier, Opérateurs aux derivées partielles*, tome 1, Vuibert, 1972.

[War] G. Warner, *Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups, I*, Grundlehren Math. Wiss. 188, Springer, 1972.

[Zhu] C. B. Zhu, *Invariant distributions of classical groups*, Duke Math. J. 65 (1992), 85–119.

[Zie1] B. Ziemian, *On distributions invariant with respect to some linear transformations*, Ann. Polon. Math. 36 (1979), 261–276.

[Zie2] —, *On G-invariant distributions*, J. Differential Equations 35 (1980), 66–86.

Faculté des Sciences et Techniques
BP 618
Guéliz
Marrakech, Maroc
E-mail: fstg@iam.net.ma

LAMATH
Université de Valenciennes
Le Mont Houy
59313 Valenciennes Cedex 9, France
E-mail: elkacimi@univ-valenciennes.fr

Received June 17, 1998 (4124)