UNIVERSITÉ DE VALENCIENNES
ET DU HAINAUT-CAMBRÉSIS
Laboratoire de Mathématiques

Actions de groupes résolubles
Scindement de $\mathcal{F}$-fibrés hermitiens

Thèse soutenue le 10 janvier 1997

par

Olivier BIREMBAUX

pour obtenir le grade de

Docteur en Mathématiques

Composition du Jury

Président	R. BARRE	Université de Valenciennes
Rapporteurs	E. GHYS	E.N.S. Lyon
	V. SERGIESCU	Université de Grenoble
Examinateurs	L. FLAMINIO	Université de Lille I
	G. MEIGNEZ	Université de Lyon I
Directeur de These	A. EL KACIMI ALAOUI	Université de Valenciennes

Numéro d'ordre : 97/05

Remerciements

AZIZ EL KACIMI m'a initié aux systèmes dynamiques et à la théorie des feuilletages. Il m'a guidé avec une attention constante tout au long de mes recherches. Je lui exprime ma profonde gratitude.

ETIENNE GHYS et VLAD SERGIESCU se sont interessés à mon travail et ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse ; je les remercie vivement.

J'adresse également mes remerciements à RAYMOND BARRE qui a accepté la présidence du jury ainsi qu'à LIVIO FLAMINIO et GÄEL MEIGNEZ qui ont bien voulu être les examinateurs.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à ALBERTO VERJOVSKY avec qui j'ai eu de nombreuses discussions fructueuses.

J'envoie une pensée amicale tout spécialement à VALERIO VASSALLO, à tous les membres du LAMATH et à ceux de l' URA de Lille.

Première partie

Actions localement libres de groupes résolubles

(Article en collaboration avec M. Belliart)

Résumé **Soient G un groupe de Lie connexe de dimension $n-1$, Φ une action localement libre de classe C^r $(r \geq 2)$ de G sur une variété compacte M de dimension $n \geq 3$. Nous supposons qu'il existe dans l'algèbre de Lie de G un champ Y tel que les valeurs propres de ad(Y) soient $\alpha_1, ..., \alpha_{n-2}, 0$ avec $Re(\alpha_i) > 0$ $\forall i$. Alors, nous montrons que Φ est C^r-conjuguée à une "action modèle" de G sur un espace homogène H/Γ où H est un groupe de Lie contenant G. Si $n \geq 4$, H est uniquement déterminé par G ; si $n = 3$, il y a deux groupes H possibles, et nous pouvons donc donner une classification complète. D'autre part, nos hypothèses impliquent que G a une structure particulière, mais il existe quand même de nombreux exemples : notamment, la famille des groupes G ayant cette propriété est continue en toute dimension ≥ 4 ; pour un choix générique de G, le groupe H correspondant n'a aucun quotient compact de dimension n, et ceci fournit une famille continue de groupes de Lie ne possédant aucune action de codimension 1 "suffisamment régulière" sur une variété compacte. Ces résultats sont liés à la théorie d'Anosov.**

1. Introduction

Soit M une variété fermée de dimension $n \geq 3$. On dit qu'un flot différentiable Φ^t sur M est un *flot d'Anosov* [An] si

- Φ^t est sans point fixe global (c'est à dire sans orbite réduite à un point)
- le fibré tangent à M se décompose en la somme de trois sous-fibrés continus stables par Φ^t :

$$TM = T^{ss} \oplus T^{uu} \oplus \mathbb{R}.Y$$

tels que T^{uu} est dilaté et T^{ss} contracté par Φ^t. (Y est le champ tangent à Φ^t).

Nous dirons que Y est un *champ d'Anosov* si son flot est un flot d'Anosov.

A un flot d'Anosov on peut associer plusieurs feuilletages. Notons $T^s = T^{ss} \oplus \mathbb{R}Y$ et $T^u = T^{uu} \oplus \mathbb{R}Y$. Les distributions T^u, T^s, T^{uu}, T^{ss} sont intégrables et définissent respectivement le feuilletage instable (ou central-instable), stable (central-stable), instable fort et stable fort. Comme le passage de Y à $-Y$ permute les feuilletages stables et instables, il est d'usage de s'intéresser uniquement aux feuilletages stables. On définit ainsi la *codimension* de Y comme étant la codimension de son feuilletage stable.

Si N est une variété fermée de dimension ≥ 2, un *difféomorphisme d'Anosov* de N est un difféomorphisme ϕ de N tel que le fibré tangent à N se décompose en la somme continue de deux sous-fibrés :

$$TN = T^{uu} \oplus T^{ss}$$

où T^{uu} et T^{ss} sont ϕ-invariants, et ϕ contracte T^{ss} et dilate T^{uu}. En pareil cas, T^{uu} et T^{ss} sont uniquement intégrables et donnent lieu à des feuilletages dits respectivement stable et instable.

Le lien entre difféomorphismes d'Anosov et flots d'Anosov est le suivant : considérons la variété

$$M = N \times \mathbb{R}/(n, t) \sim (\phi(n), t + 1)$$

où ϕ est un difféomorphisme d'Anosov de N. Alors, on vérifie sans peine que le flot $\frac{\partial}{\partial t}$ est un flot d'Anosov sur M. Son feuilletage stable est le feuilletage horizontal engendré par le feuilletage stable de ϕ, et son feuilletage stable-central en est l'épaississement. Ainsi, les difféomorphismes d'Anosov peuvent être vus comme des cas particuliers de flots d'Anosov. Réciproquement, il est conjecturé que “la plupart” des flots d'Anosov sont des suspensions de difféomorphismes d'Anosov en codimension 1. (C'est la conjecture de Verjovsky ; voir par exemple [Gh2] pour un énoncé précis).

Une autre famille d'exemples est constituée par les flots homogènes et infra-homogènes. Soient G un groupe de Lie, Y un champ invariant à droite, K un sous-groupe compact commutant avec Y et Γ un sous-groupe discret cocompact de G. Le flot de Y sur $K \setminus G/\Gamma$ est dit *infra-homogène* ;

on dira qu'il est *homogène* si $K = \{1\}$. Les articles [To1], [To2] classifient complètement les flots d'Anosov de ce type.

Notons GA le groupe affine des transformations $x \to a + bx$ $(b > 0)$ de la droite réelle. Il a été montré dans [Ma] que le feuilletage stable de tout flot d'Anosov *transitif* [1] sur une 3-variété est paramétré par une action continue de GA ; inversement, une action de GA de classe C^2 qui préserve le volume d'une 3-variété fermée induit un flot d'Anosov correspondant à l'action des homothéties $(0, b)$ de GA. Ce résultat hautement non trivial constitue le coeur de la preuve du

Théorème 1 (Ghys) *Une action localement libre de GA de classe $C^r (r \geq 2)$ qui préserve un volume continu sur une 3-variété fermée M est C^r-conjuguée à une action homogène.*

Il y a deux groupes de Lie simplement connexes non isomorphes de dimension 3 qui contiennent à la fois une copie de GA et un sous-groupe discret cocompact. Le théorème de Ghys ramène l'étude des actions considérées à celle des réseaux uniformes de ces deux groupes, et fournit ainsi une classification complète.

En adaptant les méthodes de Ghys, nous allons montrer le

Théorème 2 *Soient G un groupe de Lie de dimension $n-1$, Φ une action localement libre de classe C^r $(r \geq 2)$ de G sur une variété compacte M de dimension n. Si Φ préserve un volume continu sur M et s'il existe dans l'algèbre de Lie de G un champ Y tel que $ad(Y)$ ait les valeurs propres $0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-2}$ avec $Re(\alpha_i) < 0$ alors Φ est C^r-conjuguée à une action homogène.*

Si $n = 3$, le seul groupe possible est GA et on retrouve le théorème de Ghys ; si $n > 3$, toutes les actions modèles ont lieu sur les espaces homogènes d'un unique groupe résoluble.

Le but de cet article est de démontrer le théorème 2. Dans le premier paragraphe, nous décrivons tous les flots d'Anosov homogènes de codimension 1, en utilisant la classification de P. Tomter. Dans le second paragraphe, nous étudions le groupe G, ce qui nous permet de montrer dans un troisième paragraphe que la variété M supporte une structure d'espace homogène pour laquelle le flot de Y est lui-même homogène. Dans le courant de cette preuve, il deviendra clair que ce flot est d'Anosov ; c'est pourquoi nous utilisons le langage de la théorie d'Anosov, bien adapté à notre situation.

La méthode utilisée dans la troisième partie de ce travail pour construire un champ homogène transverse aux orbites est une amélioration de [Gh1]. Ce dernier utilisait la théorie des représentations irréductibles de G dans

[1] Un flot est transitif si il possède une orbite dense.

un espace de Hilbert ; les calculs deviennent rapidement pénibles en grande dimension, à cause du nombre croissant d'indices et du problème technique de la diagonalisation. A la place, nous utilisons un raisonnement sur la croissance des fonctions impliquées ($n \geq 4$) ou une inégalité élémentaire sur leur norme L_2 ($n = 3$).

Des exemples immédiats prouvent qu'en dimension n, il existe une famille à $n-1$ paramètres de groupes tels que $\mathrm{ad}\,(Y)$ a pour valeurs propres $0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-2}$ où les α_i appartiennent tous au même demi plan complexe $Re(z) < 0$ ou $Re(z) > 0$. On a donc pour ces groupes une classification des actions localement libres de codimension 1 et de classe C^2 préservant un volume continu sur une variété compacte. Il se trouve que pour un choix générique d'un tel groupe, il n'existe aucune action ayant ces propriétés.

A. El Kacimi nous a soumis ce problème et nous a constamment guidés dans sa résolution. E. Ghys et A. Verjovsky nous ont aidés à en améliorer la rédaction. Nous les en remercions.

2. Modèles homogènes

Dans toute la suite de cet article, $n \geq 3$. Nous avons, dans l'introduction, décrit rapidement les flots d'Anosov homogènes ; nous allons ici décrire plus longuement le cas particulier de codimension 1.

Soit μ un entier algébrique unitaire de module > 1 dont les conjugués sur $\mathbb{Q}$: $\lambda_1, ..., \lambda_{n-2}$ ont un module < 1. Un tel nombre est appelé *nombre de Pisot* ([Pi]). Par des méthodes classiques de théorie des nombres, μ est réel et il existe une matrice $A \in SL(n-1, \mathbb{Z})$ dont les valeurs propres sont exactement $\mu, \lambda_1, ..., \lambda_{n-2}$. Comme A préserve le réseau standard de $\mathbb{R}^{n-1}$, A induit un difféomorphisme d'Anosov sur $\mathbb{T}^{n-1}$, et on peut en construire la suspension M^n. A cet effet, on considère le sous-espace F de $\mathbb{R}^{n-1}$ correspondant aux valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_{n-2}$ de A. Soient $\widetilde{\mathcal{F}}$ le feuilletage de $\mathbb{R}^{n-1}$ par les hyperplans parallèles à F, $\mathcal{F}$ son image sur $\mathbb{T}^{n-1}$: $\mathcal{F}$ est le feuilletage stable du difféomorphisme d'Anosov induit sur $\mathbb{T}^{n-1}$ par A. Il est facile de montrer que la suspension de $\mathcal{F}$ est homogène : supposons d'abord que les λ_i sont tous réels. Soit $(X_1, ..., X_{n-2})$ une base de vecteurs propres de F ;[2] soit Z un vecteur propre pour la valeur μ. Si on considère la variété

$$M = \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}/(x,t) \sim (Ax, t+1)$$

et le flot d'Anosov $Y = \frac{\partial}{\partial t}$ correspondant à A on constate facilement que

$$[X_i, Y] = \alpha_i X_i \ (i = 1, ..., n-2); \ [Z, Y] = \beta Z. \tag{1}$$

[2] A est diagonalisable, car ses valeurs propres, qui sont des nombres algébriques conjugués, sont nécessairement distinctes.

où

$$e^{\alpha_1} = \lambda_1, ..., e^{\alpha_{n-2}} = \lambda_{n-2}, e^{\beta} = \mu.$$

Ceci montre que M a la structure d'un espace homogène H/Γ, où H est le groupe de Lie résoluble simplement connexe dont l'algèbre est décrite par la formule (1) et Γ est un réseau uniforme de H. Ainsi, Y est un champ d'Anosov homogène de codimension 1. Quand les λ_i ne sont pas tous réels, on a quand même la relation (1) dans le complexifié du fibré tangent de M : dans tous les cas, Y est d'Anosov, homogène de codimension 1.[3]

Dans le cas particulier où $n = 3$, il existe une autre famille d'exemples : soit N une surface compacte à courbure négative constante. Considérons le fibré unitaire M sur N, et le flot géodésique sur M. Ce flot constitue, historiquement, le premier exemple de flot d'Anosov ([An]). Pour montrer qu'il est homogène, il suffit de remarquer que le revêtement universel de N est l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^2$, et que M, quotient du fibré unitaire de $\mathbb{H}^2$ par un groupe discret d'isométries, est difféomorphe à un espace homogène $PSL(2, \mathbb{R})/\Gamma$ où Γ est isomorphe au groupe fondamental de N. D'autre part, un calcul facile montre que Y est tangent au sous-groupe des matrices diagonales. Plus généralement, on peut remplacer $SL(2, \mathbb{R})$ par son revêtement universel $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$: ceci donne de nouveaux exemples, qui sont des revêtements finis des précédents, comme il résulte de la théorie des groupes Fuschiens (exposée par exemple dans [DNF]). Il se trouve que ces exemples sont les seuls :

2.1. **Proposition.** *Tout flot d'Anosov homogène de codimension 1 est du type ci-dessus.*

Preuve. Soit Y un flot d'Anosov homogène de codimension 1 sur la variété H/Γ. Soient $\mathcal{H}$ l'algèbre de Lie de H et $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ sa complexifiée ; nous identifions les fibrés T^{uu} et T^{ss} aux sous-algèbres de Lie de $\mathcal{H}$ qui leur sont tangentes ([To2]). Soient $X_1, ..., X_{n-2}, Z \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ des champs propres pour $\mathrm{ad}(Y)$ tels que $X_1, ..., X_{n-2}$ engendrent T^{ss} et Z engendre T^{uu}. Nous allons distinguer deux cas.

(a) $n \geq 4$.

Nous montrons d'abord que H est résoluble. Comme H admet un réseau uniforme, il est unimodulaire (cf. [Ra] ; voir aussi le paragraphe suivant pour la définition de la fonction modulaire). Ainsi, $\mathrm{ad}\,(Y)$ est de trace nulle. Notons $\beta > 0$ la valeur propre correspondant à Z et $\alpha_1, ..., \alpha_{n-2}$ les valeurs propres correspondant à $X_1, ..., X_{n-2}$, dont la partie réelle est négative (car elles correspondent au sous-espace propre T^s). Comme il y a au moins deux α_i et que $\beta = -\alpha_1 - ... - \alpha_{n-2}$, les nombres $-\beta, \beta - \alpha_1, ..., \beta - \alpha_{n-2}$ ne

[3] Les feuilletages stables correspondant à de tels flots sont très rigides : par exemple,Ê[EN] ont montré leur stabilité C^∞.

sont pas valeurs propres de ad(Y), donc l'identité de Jacobi implique que

$$[T^s, Z] = 0.$$

Pour la même raison, si $\alpha_i + \alpha_j$ n'est pas valeur propre de ad(Y) alors $[X_i, X_j] = 0$. En particulier si on range les α_i par partie réelle décroissante,

$$\alpha_i + \alpha_j = \alpha_k \text{ implique que } k > i, j$$

par conséquent

$$[X_i, X_j] = \sum_{k>i,j} c_k^{i,j} X_k$$

où les $c_k^{i,j}$ sont les constantes de structure. Mais une telle écriture prouve que $X_1, ..., X_n, Z, Y$ est une base de Malcev ([Be]) de l'algèbre $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, qui par conséquent est résoluble.

Maintenant, $T^{uu} \oplus T^{ss}$ est un idéal de codimension 1 $\mathcal{N}$ de $\mathcal{H}$, et $\mathcal{N}$ est égal à $[\mathcal{H}, \mathcal{H}]$. En effet, d'une part $\mathcal{N} \subset [\mathcal{N}, Y] \subset [\mathcal{H}, \mathcal{H}]$, car $ad(Y)$ est un endomorphisme de $\mathcal{N}$; d'autre part, comme $\mathcal{H}$ est résoluble, $[\mathcal{H}, \mathcal{H}]$ est de codimension au moins 1 dans $\mathcal{H}$, ce qui implique l'égalité voulue. Par conséquent, $\mathcal{N}$ est nilpotente ([Bo]). Selon [To1], $\mathcal{N}$ correspond à un sous-groupe de Lie N de H, et il existe un automorphisme ϕ du groupe N, préservant le réseau uniforme $\Lambda = \Gamma \cap N$ de N, tel que le feuilletage stable de H/Γ pour Y soit la suspension du feuilletage stable de N/Λ pour ϕ. La proposition viendra donc du lemme suivant :

2.2. **Lemme.** *Soit N un groupe de Lie nilpotent. Si N possède un sous-groupe discret cocompact Λ et si il existe un automorphisme ϕ de N qui laisse Λ invariant et induit un difféomorphisme d'Anosov de codimension 1 sur N/Λ, alors N est abélien.*

Preuve. Soit C le centre de N : c'est un sous-groupe de Lie abélien non nul invariant par ϕ, et $C/(C \cap \Lambda)$ est compact [Ra]. En considérant les valeurs propres de la différentielle de ϕ sur l'algèbre de C, on voit que ϕ induit sur $C/(C \cap \Lambda)$ un difféomorphisme d'Anosov, nécessairement de codimension 1 ; aussi C contient le fibré instable T^u correspondant à ϕ. Si N/C n'est pas le groupe trivial, ϕ induit sur la variété compacte $(N/C)/\Lambda$ un difféomorphisme d'Anosov sans partie instable, ce qui est absurde. Donc, N/C est le groupe trivial : *i.e.* N est abélien. $\square$

(b) $n = 3$.

Dans ce cas, les sous-espaces T^{ss}, T^{uu} sont de dimension 1, et on peut les supposer engendrés par les champs X et Z respectivement. Ces champs sont propres pour ad(Y), pour des valeurs propres notées respectivement α et β. Par unimodularité, $\alpha = -\beta$; comme Y est d'Anosov, $\alpha \neq 0$ et on peut normaliser en remplaçant Y par $\alpha^{-1}Y$. On a donc :

$$[X, Y] = X \text{ et } [Z, Y] = -Z$$

L'identité de Jacobi implique donc

$$[X, Z] = k.Y \ (k \in \mathbb{R})$$

si $k = 0$, on trouve une suspension de difféomorphisme de $\mathbb{T}^2$, sinon, M est un espace homogène de $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$. □

3. Structure de G

Nous revenons maintenant au cas général. Soit G le groupe de Lie de dimension $n-1$ agissant sur M^n. Notons respectivement $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ l'algèbre de Lie de G et sa complexifiée. Soit $(X_1, ..., X_{n-2}, Y)$ une base de $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ dans laquelle $\mathrm{ad}(Y)$ est triangulaire supérieure ; comme à la proposition 1.1, on voit que $X_1, ..., X_{n-2}$ engendrent un idéal nilpotent $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}$ de codimension 1, égal à l'idéal dérivé de $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$. Celui-ci est le complexifié de l'idéal dérivé $\mathcal{N}$ de $\mathcal{G}$, et correspond à un sous-groupe connexe N de G. Le groupe G est donc résoluble.

Rappelons que la fonction modulaire Δ d'un groupe de Lie G est un morphisme continu de G dans $\mathbb{R}_+^*$, qui représente le défaut d'invariance à droite des mesures invariantes à gauche ; on dit que G est *unimodulaire* si $\Delta \equiv 1$. La fonction modulaire de G est reliée à l'algèbre de Lie de G par la formule :

$$\Delta(\exp(Y)) = e^{Tr(ad(Y))}. \tag{2}$$

où Y est un champ invariant à gauche quelconque sur G. Ceci montre que N est le noyau de la fonction modulaire de G. Ainsi, N est un sous-groupe de Lie de G. D'autre part, comme N est un sous-groupe normal de codimension 1, G a selon [Bo] la structure d'un produit semi-direct $N \rtimes \mathbb{R}$: un élément g de G s'écrit de manière unique sous la forme $x.\exp(tY)$ avec $x \in N, t \in \mathbb{R}$ et si on le note plus simplement (x, t), la loi de G est donnée par la formule

$$(x_1, t_1).(x_2, t_2) = (x_1.{}^{t_1}x_2, t_1 + t_2)$$

où ${}^{t_1}x_2$ désigne l'élément $\exp(t_1.Y)x_2\exp(-t_1.Y)$. Dans la suite, nous adopterons ces notations ; nous écrirons aussi $x(g), t(g)$ les éléments de N et $\mathbb{R}$ tels que $g = (x(g), t(g))$. Maintenant, si nous posons

$$\beta = -Tr(ad(Y)) = -\Sigma_{i=1}^{n-2}\alpha_i > 0,$$

la formule (2) donne

$$\Delta(g) = e^{\beta.t(g)}. \tag{3}$$

ce qui confirme que G n'est pas unimodulaire.

Dans le cas où $n = 3$, il est possible de simplifier ces notations et formules. En effet, N est de dimension 1, donc isomorphe à $\mathbb{R}$. Si nous notons $a = x(g)$ et $b = e^{\beta.t(g)}$, nous obtenons un isomorphisme entre G et le groupe affine GA, constitué des transformations de $\mathbb{R}$ de la forme

$$x \to a + bx \ (b > 0)$$

La loi de groupe s'écrit

$$(a, b).(c, d) = (a + bc, bd),$$

et la formule (3) devient

$$\Delta(a, b) = b.$$

Pour $g \in GA$, nous noterons $a(g), b(g)$ les réels tels que $g = (a(g), b(g))$.

Il est connu que GA peut être plongé dans deux groupes de Lie de dimension 3 simplement connexes non isomorphes ([Gh1]) : l'un est résoluble et l'autre semi-simple, isomorphe au revêtement universel de $SL(2, \mathbb{R})$. Quand $n \geq 4$, nous allons montrer qu'il existe un seul groupe de Lie H de dimension n, connexe, unimodulaire et contenant G. En effet, H étant connexe, il est à revêtement près uniquement déterminé par son algèbre de Lie $\mathcal{H}$; celle-ci s'obtient en complétant $\mathcal{G}$ par une nouvelle direction Z. Comme H est unimodulaire, on aura : $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{\mathcal{H}}(Y)) = 0$ donc on peut choisir Z tel que $[Z, Y] = \beta.Z$. Comme $-\beta, \beta - \alpha_i$ ne sont pas valeurs propres de $\mathrm{ad}(Y)$, l'identité de Jacobi implique : $[\mathcal{N}, Z] = 0$. Ces égalités déterminent parfaitement $\mathcal{H}$ et permettent de construire le revêtement universel $\widetilde{H}$ de H comme le produit fibré donné par le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \widetilde{H} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & GA \arrow[d, "\Delta^{-1}"] \\ G \arrow[r, "\Delta"'] & \mathbb{R}_+^* \end{tikzcd}$$

Maintenant, H s'obtient en quotientant $\widetilde{H}$ par un sous-groupe discret central, mais $\widetilde{H}$ a un centre nul : par conséquent, $H = \widetilde{H}$.
Dans le paragraphe suivant, nous démontrons le théorème principal.

4. Le champ Z

On sait que l'algèbre de Lie de G s'injecte dans l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur M : à tout champ invariant à droite sur G est associé un champ sur M par la formule

$$X \to d\Phi(-, m).X \quad \text{où} \quad \Phi(g, m) = g.m.$$

De tels champs sont dits les *champs fondamentaux* associés à l'action. Nous allons montrer qu'il existe sur M un champ Z de classe C^{r-1} tel que :

$$[Z, Y] = -Z \quad [Z, X] = kY, \ k \in \mathbb{R} \quad (\text{cas } n = 3)$$

$$[Z, Y] = \beta Z \quad [Z, \mathcal{N}] = 0 \quad (\text{cas } n \geq 4).$$

Ceci implique que l'algèbre des champs de vecteurs sur M contient l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie H qui contient G, et que Φ se prolonge en une action localement libre de classe C^{r-1} de H sur M. En fait, il sera possible de voir que cette action est C^r, et nous aurons donc démontré le

Théorème Principal *Soient G un groupe de Lie de dimension $n-1$, Φ une action localement libre de classe C^r $(r \geq 2)$ de G sur une variété compacte M de dimension n. Si Φ préserve un volume continu sur M et s'il existe dans l'algèbre de Lie de G un champ Y tel que $ad(Y)$ ait les valeurs propres $0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-2}$ avec $Re(\alpha_i) < 0$ alors Φ est C^r-conjuguée à une action homogène.*

Remarquons que le volume continu dont ce théorème suppose l'existence est en fait de classe C^r, par un lemme de [Gh1].

Nous utilisons les complexifiés des différents fibrés associés à M. Nous désignons par la même lettre un élément d'un fibré quelconque et son complexifié. Avec cette convention, soit Ω le volume préservé par l'action de G, et soit Z un champ (réel) continu tel que :

$$\Omega(X_1, ..., X_{n-2}, Y, Z) = 1.$$

Soit $g = (x, t) \in G$. On a :

$$\begin{aligned} g^*\Omega(X_1, ..., X_{n-2}, Y, Z) &= \Omega(g_*X_1, ..., g_*X_{n-2}, g_*Y, g_*Z) \\ &= e^{\alpha_1 t} ... e^{\alpha_{n-2} t}\Omega(X_1, ..., X_{n-2}, Y, g_*Z) \\ &= e^{-\beta t}\Omega(X_1, ..., X_{n-2}, Y, g_*Z) \\ &= 1 \end{aligned}$$

et donc

$$(x, t)_*(Z) \equiv e^{\beta t} Z \mod.(\mathcal{G}_{\mathbb{C}}). \tag{4}$$

Nous cherchons maintenant un champ (réel) T sous la forme

$$T = Z + FY + \sum_{i=1}^{n-2} G^i X_i \quad (F, G^i \in C^0(M))$$

où $C^0(M)$ est l'espace des fonctions continues de M dans $\mathbb{C}$; ce champ vérifiera

$$(a, b)_*(T) = b^{-1}(T + k(2aY + a^2X)) \text{ (cas } n = 3)$$

$$(x, t)_*(T) = e^{\beta t} T \text{ (cas } n \geq 4). \tag{5}$$

Ces formules sont une version “intégrale" des relations de crochets liant X_i, Y et Z dans $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, la complexifiée de $\mathcal{H}$. On les obtient en regardant comment T évolue sous l'action adjointe de G dans $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$.

Nous construisons d'abord un T qui est solution de (5) pour les g de la forme $(1,t)$, puis nous vérifions que ce T est solution pour tout g.

4.1. **Proposition.** *Il existe un champ T de classe C^0 tel que $(1,t)_*(T) = e^{\beta t}T$.*

Démonstration. Il existe des familles $\phi_t, \psi_t^1, ..., \psi_t^{n-2}$ de fonctions continues sur M telles que

$$(1,t)_*(Z) = e^{\beta t}Z + \phi_t Y + \Sigma\psi_t^i X_i. \tag{6}$$

On a donc :

$$(1,t)_*(T) \equiv e^{\beta t}Z + \phi_t Y + F \circ (1,-t)Y \quad \mathrm{mod.}(X_1, ..., X_{n-2})$$

Comme dans [Gh1], on remarque que pour $t > 0$, F est solution d'un opérateur contractant sur l'espace de Banach $C^0(M)$:

$$U_t(F) = e^{-\beta t}(F \circ (1,-t) + \phi_t)$$

De plus, ces opérateurs commutent entre eux donc ont le même point fixe, qui est encore solution pour $t < 0$ car $U_t \circ U_{-t} = Id$. Ceci prouve l'existence (et l'unicité) de F.

Remplaçons Z par $Z + FY$, ce qui revient à remplacer ϕ_t par 0 dans l'équation (6). (Pour simplifier, nous continuerons à noter ψ^i et G^i les fonctions qui correspondent à ce “nouveau” Z). On calcule G^{n-2} par le même procédé que F. Ici, les équations deviennent :

$$(1,t)_*(T) \equiv e^{\beta t}T_0 + \psi_t^{n-2}X_{n-2} + e^{\alpha_{n-2}t}G^{n-2} \circ (1,-t)X_{n-2}$$

(la congruence est prise modulo $X_1, ..., X_{n-3}$),

$$V_t^{n-2}(G^{n-2}) = e^{(-\beta+\alpha_{n-2})t}(G^{n-2} \circ (1,-t)) + e^{-\beta t}\psi_t^{n-2}.$$

En remplaçant Z par $Z + G^{n-2}X_{n-2}$, on calcule G^{n-3} de la même manière, et en itérant, on obtient tous les G^i, donnés par les familles d'opérateurs :

$$V_t^i(G^i) = e^{(-\beta+\alpha_i)t}(G^i \circ (1,-t)) + e^{-\beta t}\psi_t^i.$$

A la fin, le champ T obtenu vérifie (5). Par construction, T est unique pour cette propriété ; maintenant, on peut choisir les X_i de telle sorte que l'on ait $X_i = AX_i'$, avec A une matrice de déterminant 1 et X_i' une base réelle de $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$. On a alors :

$$\begin{aligned}\Omega(X_1, ..., X_{n-2}, Y, T) &= 1 \\ &= \Omega(AX_1', ..., AX_{n-2}', Y, T) \\ &= \Omega(X_1', ..., X_{n-2}', Y, T)\end{aligned}$$

et comme les champs X'_i et Y sont réels ainsi que le volume Ω, on obtient en conjuguant :

$$\Omega(X'_1, ..., X'_{n-2}, Y, \overline{T}) = 1$$

ce qui prouve que $\overline{T}$ vérifie (5). Par unicité, on a donc $T = \overline{T}$ et T est un champ réel. □

Nous avons obtenu un champ solution de (5) quand g a la forme $(1, t)$. Nous devons maintenant vérifier que ce champ est aussi solution pour g quelconque. Il y a deux cas à distinguer :

4.2. **Proposition** $(n \geq 4)$**.** *Le champ T trouvé plus haut vérifie $(x, t)_*(T) = e^{\beta t}T$.*

4.3. **Proposition** $(n = 3)$**.** *Avec les notations propres à cette dimension, le champ T vérifie $(a, b)_*(T) = b^{-1}(T + k(2aY + a^2X))$ où k est une constante.*

La différence vient de ce qu'en dimension 3, il existe des modèles semi-simples en plus du modèle résoluble présent en toute dimension.

Démonstration de 3.2. Comme pour la proposition précédente, on raisonne par induction. En premier lieu, il existe une famille de fonctions continues ϕ_g, indexées continument par G, qui vérifient :

$$(x, t)_*(T) \equiv e^{\beta t}T + \phi_g Y \quad \mathrm{mod.}(\mathcal{N}_{\mathbb{C}}). \tag{7}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}(hg)_*(T) &\equiv h_*(e^{\beta t(g)}T + \phi_g Y) \quad \mathrm{mod}(\mathcal{N}_{\mathbb{C}}) \\ &\equiv e^{\beta t(hg)}T + (e^{\beta t(g)}\phi_h + \phi_g \circ h^{-1})Y \quad \mathrm{mod}(\mathcal{N}_{\mathbb{C}})\end{aligned}$$

d'où :

$$\phi_{hg} = e^{\beta t(g)}\phi_h + (\phi_g \circ h^{-1}). \tag{8}$$

De plus on a $\phi_{(1,t)} = 0$ par construction de T. Nous voulons montrer que ϕ_g est nul pour tout g ; d'après (8) il suffit de prouver la nullité sur N.

a) Si nous montrons que ϕ_x est nul pour tout élément du centre $Z(N)$ de N, la formule (8) nous permettra de passer au quotient, et de considérer la famille $\phi_{xZ(N)}$ indexée par $N/Z(N)$; par le même procédé, on peut alors montrer la nullité sur $Z(N/Z(N))$ de chaque ϕ_x ; et ainsi de suite. Comme N est nilpotent, on obtient au bout d'un nombre fini d'étapes la nullité sur N. Nous pouvons donc nous borner au cas N abélien.

b) De même, il existe dans N un sous-espace vectoriel (non trivial) N_1 sur lequel l'action de G par conjugaison interne est diagonalisable [4].

[4]Nous entendons : diagonalisable par blocs de rang 1 ou 2, les blocs de rang 2 étant sans valeur propre réelle.

(En effet, puisque N est ici supposé abélien, cette action n'est pas autre chose qu'une représentation du groupe de Lie résoluble G dans $GL(N)$). Si nous montrons que ϕ_x est nul pour tout x de N_1, nous pourrons passer au quotient et considérer la famille ϕ_{xN_1} indexée par N/N_1. Si $N_1 \neq N$, on peut ensuite itérer ce procédé et on obtient ainsi la nullité sur tout N. Nous nous sommes donc ramenés au cas où l'action de G sur N par conjugaison est diagonalisable.

Soit alors $(v_1, ..., v_{n-2})$ une base de l'espace vectoriel N où l'action a la forme diagonale suivante :

$$(g, x) \to A^{t(g)}x$$

avec A une matrice diagonale par blocs de rang 2, dont les blocs sont les suivants :

$$e^{a_k} \begin{pmatrix} \cos b_k & \sin b_k \\ -\sin b_k & \cos b_k \end{pmatrix}$$

où a_k et b_k sont respectivement les parties réelle et imaginaire de α_k. Munissons N de la métrique euclidienne pour laquelle les v_i forment une base orthonormale ; alors pour tout $x \in N$ et tout $g = (1, t) \in G$:

$$\|A^t.x\| \leq e^{\alpha.t}\|x\|$$

où $\alpha = \sup(a_i)$. De ceci, on tire que $(1, t)B(0, R)(1, -t)$ est inclus dans $B(1, e^{\alpha t}R)$. D'autre part, selon (8), on a en norme L_2 :

$$\begin{aligned} \|\phi_{g.x.g^{-1}}\| &= e^{-\beta t}\|\phi_{g.x}\| \\ &= e^{-\beta t}\|\phi_x\|. \end{aligned}$$

Soit $\tau : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ la fonction qui à R associe $\sup_{\|x\| \leq R} \|\phi_x\|$. C'est clairement une fonction croissante et continue qui mesure la croissance de $\|\phi_x\|$ en fonction de $\|x\|$.

Des deux formules précédentes, on déduit :

$$\tau(e^{\alpha t}R) \geq e^{-\beta t}\tau(R).$$

Comme $-\beta > \alpha$, si τ (donc ϕ) n'est pas constamment nulle, la croissance de τ est strictement sur-linéaire. Or, cette croissance est au plus linéaire : en effet, d'après (8) on a

$$\phi_{x+y} = \phi_x + \phi_y \circ x^{-1}$$

et donc $\tau(R + R') \leq \tau(R) + \tau(R')$.
Ceci prouve que la fonction ϕ est identiquement nulle.

Par le même procédé, nous montrons maintenant que ψ^{n-2} est nulle. En effet, on a

$$g_*(T) \equiv e^{\beta t(g)}T + \psi_g^{n-2}X_{n-2} \mod(X_1, ..., X_{n-3})$$

Comme plus haut, on montre que
$$\psi^{n-2}_{hg} = e^{\beta t(g)}\psi^{n-2}_h + e^{\alpha_{n-2}t(h)}(\psi^{n-2}_g \circ h^{-1}).$$

Soit $\sigma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ la fonction qui à R associe $\sup_{\|x\|\leq R} \|\psi^{n-2}_x\|$. Là encore, la croissance de σ est sous-linéaire, et

$$\begin{aligned}\|\psi^{n-2}_{g.x.g^{-1}}\| &= e^{-\beta t}\|\psi^{n-2}_{g.x}\| \\ &= e^{\beta' t}\|\psi^{n-2}_x\|\end{aligned}$$

où $\beta' = -\beta + a_i$, et $\beta' > \alpha$. Par conséquent, la croissance de σ est à la fois sur-linéaire et sous-linéaire ; donc $\|\psi^{n-2}\| = 0$.

Clairement, on peut itérer ce procédé, qui prouve que $\psi^{n-3} = ... = \psi_1 = 0$. Nous avons donc trouvé un champ de vecteurs T de classe C^0 tel que

$$g_* T = e^{\beta t(g)}.Z \quad \text{et} \quad \Omega(X_1, ..., X_{n-2}, Y, Z) = 1.$$

Démonstration de 3.3.

Nous raisonnons comme pour la proposition précédente, en employant les notations propres à la dimension 3. Il existe une famille de fonctions ϕ_g telles que
$$\begin{aligned}&\phi_{(0,b)} = 0 \\ &\phi_{gh} = b^{-1}(h)\phi_g + \phi_h \circ g^{-1}\end{aligned}$$
Nous écrivons la dernière de ces équations sous trois formes différentes :
$$\begin{aligned}&(a)\ \phi_{(a,b)} = \phi_{(a,1)(0,b)} = b^{-1}\phi_{(a,1)} \\ &(b)\ \phi_{(a,b)} = \phi_{(0,b)(b^{-1}a,1)} = \phi_{(b^{-1}a,1)} \circ (0, b^{-1}) \\ &(c)\ \phi_{(x+y,1)} = \phi_{(x,1)} + \phi_{(y,1)} \circ (-x, 1)\end{aligned}$$
Combinant (a) et (b), on tire :
$$\phi_{(a,1)} = a\phi_{(1,1)} \circ (0, a^{-1})\ (a > 0)$$
ce qui implique en norme L_2 :
$$\|\phi_{(a,1)}\| = |a|.\|\phi_{(1,1)}\|.$$
Désormais, nous noterons $k = \phi_{(1,1)}$. De (c) il vient, pour $x, y > 0$:
$$\begin{aligned}\|\phi_{(x+y,1)}\| &= \|\phi_{(x,1)} + \phi_{(y,1)} \circ (-x, 1)\| \\ &= |x + y|.\|k\| \\ &= (|x| + |y|)\|k\| \\ &= \|\phi_{(x,1)}\| + \|\phi_{(y,1)} \circ (-x, 1)\|\end{aligned}$$
Pour la norme L_2, l'espace des fonctions continues sur M est préhilbertien : dans un tel espace, l'égalité
$$\|u_1 + ... + u_n\| = \|u_1\| + ... + \|u_n\|$$

implique que les u_i sont colinéaires. Donc, selon la formule précédente, les fonctions $\phi_{(y,1)}$ et $\phi_{(x,1)} \circ (x,1)$ sont colinéaires. Ceci étant valable pour tous x, y on en déduit que $\phi_{(x,1)} = x.k$, d'où l'on tire :

$$\phi_{(a,b)} = \frac{a}{b}k$$

et comme selon (a)

$$\begin{aligned}
\phi_{gh} &= \frac{a(gh)}{b(gh)}k \\
&= \frac{a(g) + b(g)a(h)}{b(g)b(h)}k \\
&= b^{-1}(h)\frac{a(g)}{b(g)}k + \frac{a(h)}{b(h)}k \circ g^{-1}
\end{aligned}$$

on en déduit que k est invariante par l'action de GA. Ceci veut dire que k est une fonction continue basique ; or $\mathcal{F}$ est à feuilles denses selon la proposition II.1.5. de [Gh1]. Aussi, k est constante.

A présent, il existe une famille ψ_g de fonctions telles que :

$$g_*(Z) = b^{-1}(g)Z + k\frac{a(g)}{b(g)}Y + \psi_g X.$$

On a $\psi_{(a,1)} = 0$ par construction. On calcule facilement que

$$\psi_{gh} = b^{-1}(h)\psi_g + b(g)\psi_h \circ g^{-1} + k\frac{a(g)a(h)}{b(g)}$$

que nous écrivons dans trois cas particuliers :

$$\begin{aligned}
&(a)\ \psi_{(a,b)} = \psi_{(a,1)(0,b)} = b^{-1}\psi_{(a,1)} \\
&(b)\ \psi_{(a,b)} = \psi_{(0,b)(b^{-1}a,1)} = b\psi_{(b^{-1}a,1)} \circ (0, b^{-1}) \\
&(c)\ \psi_{(x+y,1)} = \psi_{(x,1)} + \psi_{(y,1)} \circ (-x,1) + kxy
\end{aligned}$$

(a) et (b) donnent :

$$\psi_{(a,1)} = a^2\psi_{(1,1)} \circ (0, a^{-1})$$

Nous notons $l = \psi_{(1,1)}$. De (c) il vient, pour $xy > 0$:

$$\begin{aligned}
(x+y)^2\|l\| &= \|\psi_{(x+y,1)}\| \\
&= \|\psi_{(x,1)} + \psi_{(y,1)} \circ (-x,1) + kxy\| \\
&\leq \|\psi_{(x,1)}\| + \|\psi_{(y,1)} \circ (-x,1)\| + \|kxy\| \\
&= (x+y)^2\|l\| + (\frac{1}{2}|k| - \|l\|)xy
\end{aligned}$$

Par conséquent, $|k| \geq 2\|l\|$. Mais si on remplace y par $-x$ dans (c), on a :

$$\begin{aligned}
0 &= \|\psi_{(0,1)}\| \\
&= \|\psi_{(x,1)} + \psi_{(-x,1)} \circ (-x,1) - kxy\|
\end{aligned}$$

Donc, $\psi_{(x,1)} + \psi_{(-x,1)} \circ (-x,1) = kxy$, ce qui donne en norme :

$$\begin{aligned}\|\psi_{(x,1)} + \psi_{(-x,1)} \circ (-x,1)\| &= |k|x^2 \\ &\leq \|\psi_{(x,1)}\| + \|\psi_{(-x,1)}\| \\ &= 2\|l\|x^2\end{aligned}$$

par conséquent, $|k| \leq 2\|l\|$. Il y a donc égalité, et (c) implique :

$$\|\psi_{(x,1)} + \psi_{(y,1)} \circ (-x,1) + kxy\| = \|\psi_{(x,1)}\| + \|\psi_{(y,1)}\| + |kxy|$$

ce qui prouve que ces fonctions sont colinéaires. Comme l'une d'elles est constante, elles sont toutes constantes, et (a) permet de calculer simplement que

$$\psi_{(a,b)} = \frac{a^2}{2b}k.$$

La proposition est démontrée. □

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat principal de cet article :

Théorème Principal *Soient G un groupe de Lie de dimension $n-1$, Φ une action localement libre de classe C^r $(r \geq 2)$ de G sur une variété compacte M de dimension n. Si Φ préserve un volume continu sur M et s'il existe dans l'algèbre de Lie de G un champ Y tel que $ad(Y)$ ait les valeurs propres $0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-2}$ avec $Re(\alpha_i) < 0$ alors Φ est C^r-conjuguée à une action homogène.*

Démonstration. Il faut s'assurer que le flot de Z est de classe C^r. Ici encore, il y a deux cas à distinguer.

Le cas le plus difficile est $n = 3$. Nous renvoyons le lecteur à l'article [Gh1], mais nous allons brièvement décrire sa méthode : elle consiste à construire la variété stable d'un point m fixe par une homothétie h de G. Il s'agit d'une sous-variété de classe C^r (ici de dimension 1) qui passe par m et contient tous les points x, assez voisins de m, tels que $h^k.x$ tend vers x pour $k \to \infty$. Le champ Z est tangent à cette variété en chacun de ses points. En utilisant la théorie hyperbolique à la Hirsch-Pugh-Shub ([HPS]) on peut vérifier que le champ Z est analytique dans une carte locale qui est de classe C^r. (L'article original considère en fait une carte C^{r-1}, mais on peut la prendre C^r en vertu de [GT]).

Dans le cas $n \geq 4$, la même méthode permet d'obtenir directement que le champ Z est C^1 : en effet, l'application de premier retour au point m dilate la direction Z plus fortement qu'elle ne contracte la distribution stable. Par conséquent, elle contracte non seulement la norme C^0 mais aussi la norme C^1 quand on applique la méthode du point fixe. Plus précisément, si on considère l'ensemble des germes de feuilletages C^1 définis au voisinage de m, la distance C^1 en fait un espace métrique complet, et l'application de premier retour vérifie sur cet espace les hypothèses du théorème du point fixe ; une démonstration rigoureuse se trouve dans [HPS].

Puisque Z est C^1, il existe donc les crochets $[Z, Y]$ et $[Z, X_i]$. Ceux-ci peuvent être calculés simplement comme les dérivées de Lie de Z le long des flots associés à Y et X_i. Puisque $g_*(Z) = e^{\beta t(g)} Z$, on voit que

$$[Z, Y] = \beta.Z \text{ et } [Z, \mathcal{N}] = 0.$$

Ceci nous donne déjà une conjugaison C^1 de ϕ à une action homogène, car les crochets ci-dessus définissent l'algèbre d'un groupe de Lie. Maintenant, on peut comme expliqué plus haut trouver un point m fixé par une homothétie non triviale $(0, t)$ (avec $t > 0$ pour fixer les idées). Si nous paramétrons la variété stable du point fixe m pour cette homothétie par son abscisse curviligne et l'orbite de m par le paramètre local en $1 \in G$, nous obtenons un système C^r de coordonnées locales (g, z) en m, avec $g \in G$ et $z \in \mathbb{R}$, l'action de G se faisant par la formule $h.(g, m) = (hg, m)$. De la théorie des équations différentielles ordinaires, décrite par exemple dans [AI], et de l'expression trouvée pour les crochets $[X_i, Z]$ et $[Y, Z]$ il vient que

$$Z = e^{\beta y} k(z) \frac{\partial}{\partial z}$$

où k est une fonction C^0, ne s'annulant pas.

Considérons le morphisme $\psi : H/\Gamma \to M$ où Γ est le stabilisateur de m dans H et $\psi(x\Gamma) = xm$. Il s'agit d'un difféomorphisme de classe C^1 qui préserve le feuilletage de M par les G-orbites. Ce feuilletage est sans feuille compacte, de classe C^r et à holonomie non triviale : par conséquent, le théorème A de [GT] entraine que ψ est transversalement C^r. Dans la carte locale considérée ici, on a :

$$\phi(g, z) = (g, z + e^{\beta y} \int_z^{z+t} k(\tau) d\tau). \tag{9}$$

et vue la forme particulière (9) de ψ, ce morphisme est en fait de classe C^r. □

Remarque. Nous avons signalé que si G est un groupe de Lie dont l'algèbre de Lie respecte la formule suivante :

$$[X_i, Y] = \alpha_i X_i \; i = 1, ..., n-2, \; Re(\alpha_i) < 0. \tag{10}$$

tout feuilletage de codimension 1 obtenu par une action de G qui préserve le volume satisfait nos hypothèses. Mais selon le théorème et la classification du paragraphe 1, ceci implique que G est le produit semi-direct de $\mathbb{R}^{n-2}$ par $\mathbb{R}$, avec la loi

$$(x_1, t_1).(x_2, t_2) = (x_1 + A_1^t x_2, t_1 + t_2)$$

la matrice A étant diagonale avec pour valeurs propres les conjugués d'un nombre de Pisot. Par conséquent, si G est un choix "générique" dans la famille des groupes définis par (10), *il n'existe aucun feuilletage de codimension 1 sur une variété fermée M, induit par une action localement libre de G qui préserve le volume*. A notre connaissance, ceci constitue le premier exemple d'une famille de groupes ne possédant aucun feuilletage suffisamment régulier de codimension 1.

Deuxième partie

Scindement de $\mathcal{F}$-fibrés hermitiens

Résumé **Soient M une variété C^∞ connexe, munie d'un flot $\mathcal{F}$ et E un $\mathcal{F}$-fibré hermitien au-dessus de M. On donne une version basique du théorème de Leray-Hirsch pour le fibré $P(E)$, projectifié de E. Ensuite on établit un "principe de scindement" feuilleté, i.e on montre qu'il existe une variété B munie d'un flot $\mathcal{V}$ et une application feuilletée $\sigma : B \longrightarrow M$ telles que le fibré vectoriel image réciproque $\sigma^{-1}E$ se décompose en somme directe de $\mathcal{V}$-fibrés hermitiens S_i de rang 1 et l'application σ^*, induite en cohomologie basique, est injective.**

5. Introduction

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage sur une variété connexe M de classe C^∞. On note $A(M)$ l'algèbre des fonctions sur M, $T\mathcal{F}$ le fibré tangent à $\mathcal{F}$ et $\nu\mathcal{F} = TM/T\mathcal{F}$ son fibré normal ; $\mathcal{X}(M)$ sera le $A(M)$-module des champs de vecteurs sur M et $\Gamma(\mathcal{F})$ le sous-module des champs tangents à $\mathcal{F}$.

Une forme différentielle ω sur M est dite *basique* si elle vérifie $i_X\omega = 0$ et $i_X dw = 0$ pour tout champ de vecteurs X tangent à $\mathcal{F}$. Les formes basiques constituent un sous-complexe différentiel $(\Omega_b^*(M), d)$ du complexe de de Rham. Son homologie $H_b^*(M)$ est appelée la *cohomologie basique* de $\mathcal{F}$.

Soit $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibré vectoriel complexe de rang n. Une *connexion* sur E est une application $\nabla : \mathcal{X}(M) \times C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ $A(M)$-linéaire par rapport au premier facteur qui à (X, s) associe $\nabla(X, s) = \nabla_X(s)$ telle que (1) $\nabla_X(s+t) = \nabla_X(s) + \nabla_X(t)$, (2) $\nabla_X(fs) = X(f)s + f\nabla_X(s)$ pour tout $X \in \mathcal{X}(M)$, toutes sections s, $t \in C^\infty(E)$ et toute fonction $f \in A(M)$. Pour tous $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ on note $\mathcal{R}(X, Y)$ l'endomorphisme de $C^\infty(E)$, $\mathcal{R}(X, Y) = \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$ qu'on appelle la *courbure* de ∇ sur E. On dit que E est *feuilleté* s'il admet une connexion ∇ pour laquelle $\mathcal{R}(X, Y)$ est nulle pour tous $X, Y \in \Gamma(\mathcal{F})$. Pour plus de détails sur les fibrés feuilletés voir [KT]. Si $\mathcal{R}$ vérifie $i_X\mathcal{R} = 0$ pour tout $X \in \Gamma(\mathcal{F})$ on dira que la connexion ∇ est *basique* et que E est un *$\mathcal{F}$-fibré.* Le fibré E est appelé *$\mathcal{F}$-fibré hermitien* s'il est muni d'une connexion basique et d'une métrique hermitienne plate le long des feuilles pour cette connexion.

La première partie de ce travail est consacrée à l'étude générale des $\mathcal{F}$-fibrés hermitiens. Dans la deuxième partie, nous étudions les fibrés projectifiés qui leur sont associés et nous démontrons le résultat suivant.

Théorème. *Soient M une variété C^∞ connexe, munie d'un flot $\mathcal{F}$ et $\mathcal{E} : E \longrightarrow M$ un $\mathcal{F}$-fibré hermitien. Alors la cohomologie basique de $P(E)$, fibré projectifié de E, est le produit tensoriel de la cohomologie basique de la base par la cohomologie de $P(\mathbb{C}^n)$.* Dans la dernière partie, nous

définissons les classes de Chern basiques, pour les $\mathcal{F}$-fibrés hermitiens et nous montrons qu'elles mesurent l'obstruction à l'existence de sections basiques linéairement indépendantes lorsque $\mathcal{F}$ est un flot. Ensuite nous établissons un *principe de scindement feuilleté* pour ces mêmes fibrés ; plus précisément on a le

Théorème principal. *Soient M une variété C^∞ connexe, munie d'un flot $\mathcal{F}$ et $\mathcal{E} : E \longrightarrow M$ un $\mathcal{F}$-fibré hermitien. Alors il existe une variété B munie d'un flot $\mathcal{V}$ et une application feuilletée $\sigma : B \longrightarrow M$ telles que*

(1) le fibré vectoriel image réciproque de E au-dessus de B se décompose en une somme directe de $\mathcal{V}$-fibrés hermitiens en droites,

(2) l'application $\sigma^* : H_b^*(M) \longrightarrow H_b^*(B)$, induite en cohomologie basique, est injective.

On appelle *classe caractéristique basique* d'un $\mathcal{F}$-fibré $E \longrightarrow M$ toute application qui à E associe une classe de cohomologie basique $\mathcal{C}(E)$ telle que

i) si $(N, \mathcal{V})$ est une autre variété feuilletée et $f : N \longrightarrow M$ est une application préservant les feuilletages alors $\mathcal{C}(f^{-1}E) = f^*\mathcal{C}(E)$;

ii) si $E' \longrightarrow M$ est un autre $\mathcal{F}$-fibré alors $\mathcal{C}(E \oplus E') = \mathcal{C}(E)\mathcal{C}(E')$.

L'intérêt du théorème principal réside alors dans le fait suivant : pour montrer que deux classes caractéristiques basiques sont égales, il suffit de montrer qu'elles coïncident sur les $\mathcal{F}$-fibrés hermitiens de rang 1.

6. $\mathcal{F}$-FIBRÉS HERMITIENS

Soient M une variété C^∞ connexe, munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ et $\mathcal{P} \stackrel{\iota}{\longrightarrow} M$ un fibré principal de groupe structural $K \subset GL(n, \mathbb{C})$. Le groupe K agit à droite sur $\mathcal{P}$ et sur son algèbre de Lie $\mathcal{K}$ par la représentation adjointe. On note V_z l'espace tangent en z à la fibre de $\mathcal{P}$.

6.1. **Définition.** *Une* **connexion** *sur* $\mathcal{P} \stackrel{\iota}{\longrightarrow} M$ *est un sous-fibré vectoriel* $\mathcal{H}$ *de* $T\mathcal{P}$ *tel que*

i) pour tout $z \in \mathcal{P}$ $\quad T_z\mathcal{P} = V_z + H_z$,

ii) pour tout $k \in K$ *et tout* $z \in \mathcal{P}$ $\quad H_{zk} = (R_k)_* H_z$ *où* R_k *est l'action à droite de* k *sur* $\mathcal{P}$.

La restriction de ι_* (la dérivée de ι) à H_z est un isomorphisme sur $T_{\iota(z)}M$. Soit $\tau = \iota_*^{-1}(T\mathcal{F})$.

6.2. **Définition.** *On dira que* $\mathcal{P}$ *est* **feuilleté** *si* τ *est intégrable.*

Dans ce cas τ définit un feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}$ sur $\mathcal{P}$ de même dimension que $\mathcal{F}$ et invariant par l'action à droite de K sur $\mathcal{P}$. Par exemple si $\dim\mathcal{F} = 1$ tout fibré principal au-dessus de M est feuilleté.

On sait que $\mathcal{H}$ est le noyau d'une 1-forme ω sur $\mathcal{P}$ et à valeurs dans $\mathcal{K}$. Cette forme est appelée *forme de connexion* du fibré principal. Elle vérifie les propriétés suivantes

1) $i(Z)\omega = Z$ pour $Z \in \mathcal{K}$,

2) $(R_k)_*\omega = (Ad(k^{-1}))\omega$.

Cette dernière propriété signifie que ω est équivariante relativement à l'action de K sur $\mathcal{P}$.

6.3. **Définition.** *On dira que la connexion* $\mathcal{H}$ *est* **basique** *si la* 1*-forme* ω *est basique (pour le feuilletage* $\widetilde{\mathcal{F}}$*). Un fibré principal feuilleté* $\mathcal{P}$ *est un* $\mathcal{F}$**-fibré** *s'il est muni d'une connexion basique.*

Soit $E \longrightarrow M$ un fibré vectoriel complexe de rang n défini par un cocycle $\{U_\alpha, g_{\alpha\beta}, K\}$ où $\{U_\alpha\}$ est un recouvrement de M et les $g_{\alpha\beta}$ sont les fonctions de transition $U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow K \subset GL(n, \mathbb{C})$. On dira que E est *feuilleté* si le fibré principal associé $K \longrightarrow \mathcal{P} \longrightarrow M$ l'est . Dans ce cas

E peut être défini à l'aide d'un cocycle dont les fonctions de transition sont constantes sur les plaques de $\mathcal{F}$. On dira que E est un *$\mathcal{F}$-fibré* si $\mathcal{P}$ est un $\mathcal{F}$-fibré. Le fibré E s'obtient en prenant le quotient de $\mathcal{P} \times \mathbb{C}^n$ par l'action diagonale de K. Le feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}$ induit alors un feuilletage $\mathcal{F}_E$ sur E. Un *$\mathcal{F}$-morphisme* $\phi : (E, \omega) \longrightarrow (E', \omega')$ entre deux $\mathcal{F}$-fibrés est un morphisme de fibrés qui envoie les feuilles de $\mathcal{F}_E$ sur celles de $\mathcal{F}_{E'}$ et la connexion de E' sur celle de E.

Soit $E \longrightarrow M$ un $\mathcal{F}$-fibré. Le fibré dual E^* et toutes les puissances extérieures $\Lambda^* E$, $\Lambda^* E^*$ sont des $\mathcal{F}$-fibrés ; en particulier le fibré

$$\mathcal{H}^2 E = \{2 - \text{formes hermitiennes sur } E\}$$

est un $\mathcal{F}$-fibré.

On note $C^\infty(E)$ l'espace des sections globales de E. On dira qu'une section $\alpha \in C^\infty(E)$ est *basique* si $\nabla_X \alpha = 0$ pour tout $X \in \Gamma(\mathcal{F})$. L'espace $C^\infty(E/\mathcal{F})$ des sections basiques de E est un module sur l'algèbre $A_b(M)$ des fonctions basiques.

Notons $\nabla^2 : \mathcal{X}(M) \times C^\infty(\mathcal{H}^2 E) \longrightarrow C^\infty(\mathcal{H}^2 E)$ la dérivée covariante induite par ∇ sur le $\mathcal{F}$-fibré $\mathcal{H}^2 E$.

6.4. **Définition.** *On dira que le $\mathcal{F}$-fibré E est un* **$\mathcal{F}$-fibré hermitien** *si $\mathcal{H}^2 E$ admet une section basique $<,>$ définie positive. Une telle section sera appelée* **métrique basique**.

Ceci est équivalent à dire que E est un $\mathcal{F}$-fibré défini par un cocycle feuilleté $\{U_\alpha, g_{\alpha\beta}, K\}$ où $K \subset SU(n)$.

6.5. **Exemple.** Supposons $\mathcal{F}$ défini par un cocycle $\{U_i, f_i, \gamma_{ij}\}$ où $\{U_i\}_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de M, $f_i : U_i \longrightarrow T$ une submersion au-dessus d'une variété transverse T et γ_{ij} des difféomorphismes locaux de T tels que si $U_i \cap U_j \neq 0$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} U_i \cap U_j & \xrightarrow{f_i} & T \\ || & & \uparrow \; \gamma_{ij} \\ U_i \cap U_j & \xrightarrow{f_j} & T \end{array}$$

commute. On dira que $\mathcal{F}$ est *riemannien* si T est une variété riemannienne et les γ_{ij} sont des isométries locales. Dans ce cas la métrique sur T permet de définir une métrique g_T sur $\nu\mathcal{F}$ invariante le long des feuilles ; on l'appelle *métrique transverse* ou *basique*. Soit un champ de vecteurs X sur M ; la dérivée de Lie $L_X g_T$ est définie par

$$L_X g_T = X.g_T(Y, Z) - g_T([X, Y], Z) - g_T(Y, [X, Z])$$

pour tous $Y, Z \in \mathcal{X}(M)$. On a $L_X g_T = 0$ pour tout $X \in \Gamma(\mathcal{F})$ [Mo].

Si $\mathcal{F}$ est riemannien le complexifié $\nu\mathcal{F}\otimes\mathbb{C}$ de son fibré normal ainsi que toutes ses puissances extérieures $\Lambda^*\nu\mathcal{F}\otimes\mathbb{C}$ et $\Lambda^*\nu^*\mathcal{F}\otimes\mathbb{C}$ sont des $\mathcal{F}$-fibrés hermitiens.

6.6. **Proposition.** *Soit $\mathcal{E} : E \xrightarrow{\pi} M$ un fibré vectoriel complexe de rang n et notons $M_1 = P(E) \xrightarrow{\pi_1} M$ son projectifié. Alors*
i) si E est feuilleté, $P(E)$ l'est aussi et dans ce cas
ii) $\pi_1^{-1}E$ est un fibré feuilleté au-dessus de M_1.

Démonstration. i) Le fibré E est défini par un cocycle $\{U_\alpha, g_{\alpha\beta}\}$. Ce cocycle induit celui de $P(E)$: $\{U_\alpha, \overline{g}_{\alpha\beta}\}$ avec

$$\overline{g}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow PGL(n,\mathbb{C}) = GL(n,\mathbb{C})/(\lambda Id)_{\lambda\in\mathbb{C}}$$

tel que $\overline{g}_{\alpha\beta}(x) = \overline{A}_x$ où $\overline{A}_x$ est un difféomorphisme de $P(\mathbb{C}^n)$ qui provient d'un difféomorphisme linéaire A_x de $\mathbb{C}^n$. Il est alors clair que $\overline{g}_{\alpha\beta}$ est constant sur les plaques du feuilletage de M i.e $P(E)$ est un fibré feuilleté. Soit $\mathcal{F}_1$ le feuilletage ainsi défini sur M_1.

ii) Le fibré $\pi_1^{-1}E$ est défini par le cocycle $\{\pi_1^{-1}U_\alpha, \pi_1^* g_{\alpha\beta}\}$ où les fonctions de transition sont $\pi_1^* g_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\beta}(\pi_1(x))$ pour tout $x \in M_1$. Le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \pi_1^{-1}E & \longrightarrow & E \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \pi \\ M_1 & \xrightarrow{\pi_1} & M \end{array}$$

montre immédiatement que le cocycle $\pi_1^* g_{\alpha\beta}$ est constant sur les plaques du feuilletage de M_1, c'est-à-dire $\pi_1^{-1}E$ est un fibré feuilleté au-dessus de M_1. □

Un cas particulier de fibrés feuilletés est constitué par les fibrés plats. En effet ces fibrés peuvent être définis à l'aide d'un cocycle dont les fonctions de transition sont constantes. On a alors un feuilletage sur E de même dimension que la base M. A un fibré plat de fibre, un espace vectoriel V (resp. une variété compacte V), est associée une représentation du groupe fondamental $\pi_1(M)$ dans le groupe des automorphismes linéaires de V (resp. le groupe des difféomorphismes de V).

6.7. **Lemme.** *Soit $\mathcal{E} : E \longrightarrow M$ un fibré vectoriel complexe plat de rang n. Alors il existe une action linéaire de $\mathbb{C}^*$ sur E qui préserve le feuilletage $\mathcal{F}_E$.*

Démonstration. Soit $\widetilde{M} \xrightarrow{\rho} M$ le revêtement universel de M. Le fibré image réciproque de E au-dessus de $\widetilde{M}$ est trivial : $\rho^{-1}E = \widetilde{M} \times \mathbb{C}^n$. On a une action de $\mathbb{C}^*$ sur $\rho^{-1}E$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* \times (\widetilde{M} \times \mathbb{C}^n) & \longrightarrow & \widetilde{M} \times \mathbb{C}^n \\ (\lambda, (\widetilde{x}, v)) & \longrightarrow & (\widetilde{x}, \lambda v) \end{array}$$

Les feuilles sur $\widetilde{M} \times \mathbb{C}^n$ étant les facteurs $\widetilde{M} \times \{v\}$, cette action préserve le feuilletage. D'autre part E est défini par une représentation de $\pi_1(M)$ dans $GL(n, \mathbb{C})$. L'action de $\mathbb{C}^*$ commute aux éléments du groupe linéaire ; elle commute donc avec cette représentation et passe au quotient en une action sur $E = \widetilde{M} \times \mathbb{C}^n / \pi_1(M)$ préservant le feuilletage $\mathcal{F}_E$.

□

6.8. **Remarque.** Sur le fibré E privé de la section nulle, l'action de $\mathbb{C}^*$ est libre.

Rappelons que le sous-fibré tautologique au-dessus de $P(E)$ est le sous-fibré de $\pi_1^{-1}E$ dont la fibre en un point l_x est l'ensemble des vecteurs de l_x, où l_x est vue comme une droite de E.

6.9. **Proposition.** *Soit $\mathcal{E} : E \longrightarrow M$ un fibré feuilleté. Alors le sous-fibré tautologique au-dessus de $P(E)$ est feuilleté.*

Démonstration. Notons E_0 le fibré E privé de la section nulle. On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} E_0|_{U_\alpha} & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & U_\alpha \times \{\mathbb{C}^n - \{0\}\} \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ P(E)|_{U_\alpha} & \underset{\overline{\varphi}_\alpha}{\longrightarrow} & U_\alpha \times P(\mathbb{C}^n) \end{array}$$

où φ_α et $\overline{\varphi}_\alpha$ sont les trivialisations locales induites par celles de E respectivement sur E_0 et $P(E)$ et $p'(x, v) = (x, [v])$ où $[v]$ est la classe de v dans $P(\mathbb{C}^n)$. Ceci définit la projection p. Le feuilletage de E induit un feuilletage sur E_0 qui se projette par p sur $\mathcal{F}_{P(E)}$. D'après le **lemme 1.7**, sur la restriction de E_0 à chaque feuille de $\mathcal{F}_{P(E)}$, on a une action libre de $\mathbb{C}^*$ qui préserve le feuilletage. Cette action s'étend en une action différentiable de $\mathbb{C}^*$ sur $E_{|U_\alpha}$ et commute au cocycle du fibré E. Par conséquent elle définit une action libre de $\mathbb{C}^*$ sur E_0 qui préserve le feuilletage $\mathcal{F}_{E_0}$. Autrement dit $\mathbb{C}^* \longrightarrow E_0 \xrightarrow{p} P(E)$ est un fibré principal feuilleté. Le fibré vectoriel associé S est un sous-fibré vectoriel de $\pi_1^{-1}E$. Il est obtenu à partir de E_0 en prenant le quotient de $E_0 \times \mathbb{C}$ par l'action libre de $\mathbb{C}^*$

$$\lambda.(z, v) = (z\lambda, \lambda^{-1}v).$$

Soit $z \in E_0$ tel que $p(z) = l_x$; la fibre de S en l_x est l'ensemble des vecteurs de la droite l_x. Donc S est le sous-fibré tautologique au-dessus de $P(E)$. □

Maintenant plaçons nous dans le cas où E est muni d'une connexion basique. Soit (U_α) un recouvrement de M tel que pour tout α il existe une base de sections définies sur U_α : $(e_\alpha^1, \dots, e_\alpha^n)$. La section $\nabla_X e_\alpha^i$ s'écrit alors

$$\nabla_X e_\alpha^i = \sum_{j=1}^{n} \Theta_{ij}^\alpha(X) e_\alpha^j$$

pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ où les Θ_{ij}^α sont des 1-formes différentielles locales. Si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, e_α^i est basique alors $\Theta_{ij}^\alpha(X) = 0$ pour tout $X \in \Gamma(\mathcal{F})$.

6.10. **Remarque.** Dans le cas d'un $\mathcal{F}$-fibré la matrice locale $(\Theta_{ij}^\alpha)_{1 \leq i,j \leq n}$ de connexion a pour coefficients des 1-formes basiques.

La *matrice de courbure* s'écrit (cf. [We])

$$(R_{ij}^\alpha) = d(\Theta_{ij}^\alpha) + (\Theta_{ij}^\alpha) \wedge (\Theta_{ij}^\alpha)$$

c'est-à-dire

$$R_{ij}^\alpha = d\Theta_{ij}^\alpha + \sum_{k=1}^{n} \Theta_{ik}^\alpha \wedge \Theta_{kj}^\alpha$$

pour tous $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$. Elle a donc pour coefficients des 2-formes basiques.

6.11. **Proposition.** *Le fibré $\mathcal{E} : E \xrightarrow{\pi} M$ est un $\mathcal{F}$-fibré si et seulement si c'est un fibré feuilleté et sa matrice de courbure (R_{ij}^α) sur chaque U_α est constituée de formes basiques.*

Démonstration. Montrons que E est un $\mathcal{F}$-fibré. Soient $(e_\alpha^1, \dots, e_\alpha^n)$ une base de sections basiques définies sur U_α et $(e_\beta^1, \dots, e_\beta^n)$ une base de sections basiques définies sur U_β. Sur l'intersection de ces ouverts, la matrice de changement de base de $(e_\beta^1, \dots, e_\beta^n)$ sur $(e_\alpha^1, \dots, e_\alpha^n)$ n'est autre que le cocycle $g_{\alpha\beta}$ et $(R_{ij}^\alpha) = g_{\alpha\beta}(R_{ij}^\beta)g_{\alpha\beta}^{-1}$ (cf. [We]). Comme $g_{\alpha\beta}$ est constant sur les plaques de $\mathcal{F}$, on en déduit que la matrice de courbure formée de 2-formes basiques définit une courbure basique globale. La réciproque est immédiate. $\square$

6.12. **Proposition.** *Soit $\mathcal{E} : E \longrightarrow M$ un $\mathcal{F}$-fibré hermitien. Alors $\pi_1^{-1}E$ est un $\mathcal{F}_1$- fibré hermitien.*

Démonstration. Reprenons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_1^{-1}E & \longrightarrow & E \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \pi \\ M_1 & \xrightarrow{\pi_1} & M \end{array}$$

et soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de sections basiques de E définies sur U et $({e'}_1, \ldots, {e'}_n)$ la base de sections basiques de $\pi_1^{-1}E$ définies par $e'_i = e_i \circ \pi_1$ sur $\pi_1^{-1}(U)$. La matrice de connexion $({\Theta'}_{ij})$ de $\pi_1^{-1}E$ vérifie

$$\Theta'_{ij} = \pi_1^* \Theta_{ij}. \tag{11}$$

Notons $({R'}_{ij})$ la matrice de courbure associée à la matrice de connexion $({\Theta'}_{ij})$. On a

$$({R'}_{ij}) = d({\Theta'}_{ij}) + ({\Theta'}_{ij}) \wedge ({\Theta'}_{ij}).$$

Mais d'après (1) on obtient

$$\begin{aligned} ({R'}_{ij}) &= d(\pi_1^*\Theta_{ij}) + (\pi_1^*\Theta_{ij}) \wedge (\pi_1^*\Theta_{ij}) \\ &= (d\pi_1^*\Theta_{ij}) + (\pi_1^*\Theta_{ij}) \wedge (\pi_1^*\Theta_{ij}) \\ &= \pi_1^* d(\Theta_{ij}) + \pi_1^*(\Theta_{ij}) \wedge \pi_1^*(\Theta_{ij}) \\ &= \pi_1^*(R_{ij}). \end{aligned}$$

De plus on a

$$\begin{aligned} d\pi_1^*\Theta_{ij}(X,Y) &= \pi_1^* d\Theta_{ij}(X,Y) \\ &= d\Theta_{ij}(d\pi_1(X), d\pi_1(Y)). \end{aligned}$$

Si X est tangent au feuilletage $\mathcal{F}_1$ de M_1 alors $d\pi_1(X)$ est tangent au feuilletage de M. Par conséquent $\pi_1^* d\Theta_{ij}(X,Y) = 0$ pour tout X tangent à $\mathcal{F}_1$ et tout $Y \in \mathcal{X}(M_1)$ car Θ_{ij} est une 1-forme basique. De même $\pi_1^*(\Theta_{ik} \wedge \Theta_{kj})(X,Y) = 0$. On en déduit que la matrice de courbure de $\pi_1^{-1}E$ est constituée de 2-formes basiques. La **proposition 1.11** et le fait que les cocycles de $\pi_1^{-1}E$ et de E sont à valeurs dans le même groupe $SU(n)$ permettent alors de conclure.

□

Soient $\mathcal{E} : E \longrightarrow M$ un $\mathcal{F}$-fibré hermitien, S un sous-fibré de E et $S^\perp$ son orthogonal. Le fait que S soit feuilleté n'implique pas que $S^\perp$ le soit aussi. Par exemple, considérons la sphère $\mathbb{S}^2$ plongée dans $\mathbb{R}^3$ munie du feuilletage dont elle-même est la seule feuille. La restriction à $\mathbb{S}^2$ du fibré tangent à $\mathbb{R}^3$ est un fibré trivial E de rang 3. Comme $\mathbb{S}^2$ est orientable, son fibré normal S est un sous-fibré trivial de E. Cependant l'orthogonal, le fibré tangent à $\mathbb{S}^2$, n'est pas plat. On complexifie ces fibrés et on obtient l'exemple voulu. Toutefois on a la

6.13. **Proposition.** *Supposons S et son orthogonal $S^{\perp}$ feuilletés. Alors S et $S^{\perp}$ sont des $\mathcal{F}$-fibrés hermitiens.*

Démonstration. Soit(U_α, ϕ_α) une trivialisation de E. On a

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) & \xrightarrow{\varphi_\beta} & U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{C}^n \\ || & & \downarrow g_{\alpha\beta} \\ \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{C}^n \end{array}$$

et $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow SU(n)$ car E est un $\mathcal{F}$-fibré hermitien. Comme S et $S^{\perp}$ sont feuilletés, il existe une application continue $\lambda_\alpha : U_\alpha \longrightarrow SU(n)$ feuilletée et telle que $g_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha \begin{pmatrix} g^S_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & g^{S^{\perp}}_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \lambda_\beta^{-1}$ sur $U_\alpha \cap U_\beta$ où $g^S_{\alpha\beta}$ et $g^{S^{\perp}}_{\alpha\beta}$ sont les cocycles de S et $S^{\perp}$. Ce changement de repère λ_α nous donne

$$R_\alpha = \lambda_\alpha^{-1} \begin{pmatrix} R^S_\alpha & 0 \\ 0 & R^{S^{\perp}}_\alpha \end{pmatrix} \lambda_\alpha.$$

Comme la matrice R_α est constituée de 2-formes basiques, il en sera de même pour les matrices de courbure R^S_α et $R^{S^{\perp}}_\alpha$ de S et de $S^{\perp}$. Le fait que les fonctions de transition de S et $S^{\perp}$ soient feuilletées et la **proposition 1.11** permettent de dire que S et $S^{\perp}$ sont des $\mathcal{F}$-fibrés. On a alors un $\mathcal{F}$-isomorphisme entre E et $S \oplus S^{\perp}$. En plus la métrique basique sur E induit une métrique basique sur chacun des sous-fibrés. Ceci termine la démonstration de la proposition. $\square$

7. Fibré projectifié d'un $\mathcal{F}$-fibré hermitien

Soient M une variété C^∞ connexe munie d'un flot $\mathcal{F}$ et $\mathcal{E} : E \xrightarrow{\pi} M$ un $\mathcal{F}$-fibré hermitien de rang n.

Dans toute la suite le fibré projectifié sera noté $P(\mathbb{C}^n) \longrightarrow P \xrightarrow{\pi_1} M$. Soit $SU(n) \longrightarrow \mathcal{P} \longrightarrow M$ le fibré principal associé à E. On a une action de $SU(n)$ sur $\mathcal{P} \times P(\mathbb{C}^n)$ et comme dans [GHV] le fibré projectifié est obtenu en prenant le quotient de $\mathcal{P} \times P(\mathbb{C}^n)$ par cette action. Le feuilletage $\mathcal{F}_P$ sur P est obtenu de la façon suivante. Sur chaque facteur $\mathcal{P} \times \{e\}$ on met le feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}$. On obtient de cette façon un feuilletage $SU(n)$-invariant sur $\mathcal{P} \times P(\mathbb{C}^n)$ qui passe au quotient.

7.1. **Remarques et définitions.** i) Comme E est un $\mathcal{F}$-fibré hermitien, le fibré principal associé $\mathcal{P}$ a une 1-forme de connexion basique $SU(n)$-invariante ; elle définit donc une connexion basique sur P dont on notera $\mathcal{H} \subset TP$ le fibré horizontal associé. Convenons de dire qu'un vecteur tangent de P est *horizontal* s'il est tangent Ĺà la connexion $\mathcal{H}$; *vertical* s'il est tangent aux fibres de $P \longrightarrow M$. Soient p et q deux entiers naturels. On dira que $\alpha \in \Omega_b^{p+q}(P)$ est de type (p, q) si $\alpha(Z_1, \dots , Z_{p+q}) = 0$ sauf si les champs de vecteurs Z_i sont p vecteurs horizontaux et q vecteurs verticaux. On note $\Omega_b^{p,q}(P)$ l'ensemble des formes basiques de type (p,q).

ii) Rappelons que le fibré $\pi_1 : P \longrightarrow M$ est feuilleté et est défini par un cocycle $\{U_i, \gamma_{ij}\}$ dont les fonctions de transition γ_{ij} sont constantes sur les plaques et à valeurs dans $PSU(n)$. Chaque application γ_{ij} induit un automorphisme γ_{ij}^* de l'espace de Fréchet $\Omega^q(P(\mathbb{C}^n))$ des q-formes différentielles sur $P(\mathbb{C}^n)$. On peut donc associer à $P \longrightarrow M$ un fibré localement trivial feuilleté $\mathcal{A}^q$ au-dessus de M de fibre $\Omega^q(P(\mathbb{C}^n))$.

iii) On note $\Omega^p(M, \mathcal{A}^q)$ l'ensemble des p-formes sur M à valeurs dans $\mathcal{A}^q$; un élément $\alpha \in \Omega^p(M, \mathcal{A}^q)$ est une collection d'éléments $\alpha_i \otimes \beta_i$ dans $\Omega^p(U_i) \otimes \Omega^q(P(\mathbb{C}^n))$ vérifiant pour tout $x \in U_i \cap U_j \neq \emptyset$

$$\alpha_i(x) \otimes \beta_i = \alpha_j(x) \otimes (\gamma_{ij}^*(x)(\beta_j)).$$

On dira qu'un élément $\alpha = \{\alpha_i \otimes \beta_i\}$ de $\Omega^p(M, \mathcal{A}^q)$ est *basique* si α_i est basique pour tout i. L'ensemble de ces éléments sera noté $\Omega_b^p(M, \mathcal{A}^q)$.

iv) On a une application J de $\Omega_b^{p,q}(P)$ dans $\Omega_b^p(M, \mathcal{A}^q)$ qui à α associe $J(\alpha)$ telle que l'évaluation

$$J(\alpha)_x\big(X_1(x), \ldots, X_p(x)\big)_z\big((Y_1(z), \ldots, Y_q(z)\big)$$

soit égale à

$$\alpha_z\big(\widetilde{X_1}(z), \ldots, \widetilde{X_p}(z), Y_1(z), \ldots, Y_q(z)\big)$$

où $\pi_1(z) = x$ et $\widetilde{X_i}(z)$ est le champ relevé du champ $X_i(x)$ de M à P à l'aide de la connexion $\mathcal{H}$. On voit facilement que cette application est injective. Elle est aussi surjective. En effet soient $\alpha' \in \Omega_b^p(M, \mathcal{A}^q)$, $x \in M$ et $z \in P$ tel que $\pi_1(z) = x$; on pose

$$\alpha_z\big(T_1(z), \ldots, T_p(z), Y_1(z), \ldots, Y_q(z)\big)$$

égal à

$$\alpha'_x\left(\overline{T}_1(x), \ldots, \overline{T}_p(x)\right)_z((Y_1(z), \ldots, Y_q(z))$$

où pour tout $k = 1, \ldots p$, $\overline{T}_k(x) = d_z\pi_1(T_k(z))$. La forme α ainsi définie sur P est de type (p,q) et basique. L'application $J : \Omega_b^{p,q}(P) \longrightarrow \Omega_b^p(M, \mathcal{A}^q)$ est donc un isomorphisme.

Le résultat suivant est un élément clé pour la démonstration du théorème principal.

7.2. **Théorème.** *Soient M une variété C^∞ connexe, munie d'un flot et $\mathcal{E} : E \longrightarrow M$ un $\mathcal{F}$-fibré hermitien. Alors la cohomologie basique de $P = P(E)$ est le produit tensoriel de la cohomologie basique de M par la cohomologie de la fibre : $H_b^*(P) = H_b^*(M) \otimes H^*(P(\mathbb{C}^n))$.*

Démonstration. On a pour tout $r \in \mathbb{N}$

$$\Omega_b^r(P) = \bigoplus_{p+q=r} \Omega_b^{p,q}(P).$$

On pose

$$F^p\Omega_b^{p+q}(P) = \Omega_b^{p+q,0}(P) + \ldots + \Omega_b^{p,q}(P).$$

On a de façon évidente

$$F^{p+1}\Omega_b^{p+q}(P) \subset F^p\Omega_b^{p+q}(P)$$

pour tous $p, q \in \mathbb{N}$.

On obtient ainsi une filtration décroissante de $\Omega_b^{p+q}(P)$ dont il est facile de vérifier qu'elle est compatible avec la différentielle extérieure d. Elle définit donc une suite spectrale $(E_r, d_r)_{r\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $H_b^*(P)$ et de terme

$$E_0^{pq} = F^p\Omega_b^{p+q}(P)/F^{p+1}\Omega_b^{p+q}(P) = \Omega_b^{p,q}(P)$$

qui est encore isomorphe via J à $\Omega_b^p(M, \mathcal{A}^q)$. Nous allons expliciter les termes E_1^{pq} et E_2^{pq}. Sur $\Omega_b^{p,q}(P)$, la différentielle extérieure d se décompose en trois parties $d_{0,1}$, $d_{1,0}$ et $d_{2,-1}$. La première vérifie $d_{01}^2 = 0$ et consiste à dériver dans la direction verticale ; elle est définie comme suit : soient $\alpha \in \Omega_b^{p,q}(P)$, $X_1, \ldots, X_p$ des champs horizontaux et $Y_1, \ldots, Y_{q+1}$ des champs verticaux ; alors on a

$$\begin{aligned} d_{01}\alpha(X_1, \ldots, X_p, Y_1, \ldots, Y_{q+1}) = \\ \sum_{i=1}^{q+1}(-1)^i Y_i \cdot \alpha(X_1, \ldots, X_p, Y_1, \ldots, \widehat{Y_i}, \ldots, Y_{q+1}) \\ + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\alpha(X_1, \ldots, X_p, [Y_i, Y_j], Y_1, \ldots, \widehat{Y_i}, \ldots, \widehat{Y_j}, \ldots, Y_{q+1}) \end{aligned}$$

La deuxième d_{10} consiste à dériver dans la direction horizontale et la troisième est un opérateur différentiel de type $(2, -1)$.

Sur

$$\Omega_b^*(M, \mathcal{A}^*) = \bigoplus_{r\geq 0}\left(\bigoplus_{p+q=r} \Omega_b^p(M, \mathcal{A}^q)\right)$$

on met la différentielle $\delta = J \circ d \circ J^{-1}$ qui se décompose en trois parties δ_{01}, δ_{10} et $\delta_{2,-1}$; la première est de carré nul et vérifie

$$J(d_{01}(\alpha)) = \delta_{01} J(\alpha).$$

C'est l'opérateur

$$\delta_{01} : \Omega_b^p(M, \mathcal{A}^q) \longrightarrow \Omega_b^p(M, \mathcal{A}^{q+1})$$

qui à $\alpha = \{\alpha_i \otimes \beta_i\}$ associe $\delta_{01}\alpha = \{\alpha_i \otimes d\beta_i\}$. Soit $\mathcal{H}^q(P(\mathbb{C}^n))$ le préfaisceau localement constant sur M de fibre l'espace vectoriel de cohomologie $H^q(P(\mathbb{C}^n))$. On peut le voir aussi comme fibré vectoriel plat au-dessus de M. On a alors

$$E_1^{pq} = \Omega_b^p(M, \mathcal{H}^q(P(\mathbb{C}^n)).$$

Le groupe fondamental de M, agissant par isométries sur $P(\mathbb{C}^n)$, agit trivialement sur $H^q(P(\mathbb{C}^n))$ (la cohomologie de $P(\mathbb{C}^n)$ étant engendrée par la forme de Kähler associée à la métrique de Fubini-Study qui est invariante par tout sous-groupe d'isométries de $P(\mathbb{C}^n)$). Comme en plus $H^q(P(\mathbb{C}^n))$ est de dimension finie on a

$$E_2^{pq} = H_b^p(M) \otimes H^q(P(\mathbb{C}^n)).$$

Il reste à montrer que la suite spectrale (E_r, d_r) stationne au terme E_2. Soit $r \geq 1$. Un élément α de $E_r^{0,q}$ est un cobord pour d_r si et seulement si il existe β dans $E_r^{-r,q+r-1}$ tel que $d_r\beta = \alpha$. L'espace vectoriel $E_r^{-r,q+r-1}$ étant réduit à $\{0\}$, on a $E_{r+1}^{0,q} = \mathrm{Ker} d_r$. On obtient alors une suite d'homomorphismes injectifs :

$$E_\infty^{0,q} = E_{q+2}^{0,q} \hookrightarrow E_{q+1}^{0,q} \hookrightarrow E_q^{0,q} \hookrightarrow ... \hookrightarrow E_2^{0,q}$$

L'égalité $E_\infty^{0,q} = E_{q+2}^{0,q}$ se démontre de la façon suivante : $E_{q+2}^{q+2,-1} = 0$ donc $d_{q+2} = 0$; d'où $E_{q+2}^{0,q} = E_{q+3}^{0,q}$ et ainsi de suite. De plus comme

$$E_2^{p,q} = H_b^p(M) \otimes H^q(P(\mathbb{C}^n))$$

et $H_b^0(M) = H^0(M) = \mathbb{R}$ on a $E_2^{0,q} = H^q(P(\mathbb{C}^n))$. D'autre part il est clair que l'application canonique

$$H_b^q(P) \longrightarrow E_\infty^{0,q}$$

est surjective.

En résumé on a une suite d'homomorphismes

$$H_b^q(P) \twoheadrightarrow E_\infty^{0,q} = E_{q+2}^{0,q} \hookrightarrow E_{q+1}^{0,q} \hookrightarrow ... \hookrightarrow E_2^{0,q} = H^q(P(\mathbb{C}^n)).$$

D'après [MaC], la composée de ces homomorphismes est i^* (l'homomorphisme transposé de $i : P(\mathbb{C}^n) \hookrightarrow P$). Montrons que i^* est surjectif. Comme $\dim\mathcal{F} = 1$, en vertu de la **proposition 1.13**, le sous-fibré tautologique S au-dessus de P est un $\mathcal{F}_P$-fibré hermitien. Sa matrice de courbure sur U_α se réduit à une 2-forme basique w^α car S est un fibré en droites. De ce fait, w^α est égale au polynôme symétrique de degré 1 de la "matrice" $(w^\alpha) = R^j$ et sur $U_\alpha \cap U_\beta$ on a $w^\alpha = w^\beta$. On construit de cette façon une 2-forme basique fermée w ([BC]) et on obtient une classe de cohomologie globale $[\frac{i}{2\pi}w] = c_1(S)$ qui habite dans $H_b^2(P)$. De plus, la restriction de S au-dessus de $P = P(E)$ à une fibre $P(E_p) = P(\mathbb{C}^n)$ est le sous-fibré tautologique $\overline{S}$ de $P(E_p)$ i.e. $\overline{S} = \{(l,z) \in P(\mathbb{C}^n) \times \mathbb{C}^n \ : \ z \in l\}$. Notons $f : P \longrightarrow P(E_p)$ l'application “restriction" ; on a un diagramme commutatif (cf. [BT] et [We]) :

$$\begin{array}{ccc} S = f^{-1}\overline{S} & \longrightarrow & \overline{S} \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ P(E) = P & \underset{f}{\longrightarrow} & P(E_p) \end{array}$$

D'où $f^*c_1(\overline{S}) = c_1(S)$. En effet, on définit la matrice de connexion de $\overline{S}$, qui est une 1-forme, de manière à ce que $R^j = f^*\overline{R}^j$ où $\overline{R}^j$ est la matrice de courbure de $\overline{S}$ réduite à une 2-forme. Prenons $x = -c_1(S)$; la restriction de x à $P(E_p)$ définit $c_1(\overline{S})$. On en déduit que $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ sont des classes de cohomologie basique de P dont les restrictions à chaque fibre $P(\mathbb{C}^n)$ engendrent sa cohomologie d'où la surjectivité de i^*.

Ceci entraîne que les injections précédentes sont des isomorphismes. Par conséquent on a

$$E_\infty^{0,q} = E_2^{0,q} = H^q(P(\mathbb{C}^n))$$

d'où la nullité des différentielles d_r $(r \geq 2)$. D'autre part, comme $d_1 : E_1^{p,0} \longrightarrow E_1^{p+1,0} = \Omega_b^{p+1}(M)$, on a $E_2^{p,0} = H_b^p(M)$. Comme l'espace vectoriel $E_2^{p+2,0-2+1}$ est nul, on a $d_2 = 0$ sur $E_2^{p,0}$. Un raisonnement par récurrence montre que les différentielles d_r $(r \geq 2)$ sont nulles sur $E_2^{p,0}$. Comme d_2 est une antidérivation et est nulle sur $E_2^{p,0}$ ainsi que sur $E_2^{0,q}$, elle sera nulle sur

$$E_2^{p,q} = H_b^p(M) \otimes H^q(P(\mathbb{C}^n)).$$

On obtient alors $E_3^{p,q} = E_2^{p,q}$. En appliquant le même argument pour d_3 et en continuant de la même façon pour les différentielles suivantes, on montre que $E_\infty^{pq} = E_2^{pq}$ c'est-à-dire que la suite E_r stationne au terme E_2. Par conséquent on a

$$H_b^*(P) = H_b^*(M) \otimes H^*(P(\mathbb{C}^n)).$$

Ceci termine la démonstration. □

8. Classes de Chern basiques et scindement feuilleté

8.1. **Remarque.** Comme $\mathcal{E} : E \xrightarrow{\pi} M$ est un $\mathcal{F}$-fibré, le polynôme symétrique de degré k (homogène) de la matrice de courbure multiplié par $\frac{i}{2\pi}$ définit une classe de cohomologie basique globale $c_k(E) \in H_b^{2k}(M)$.

Notons $c(E) = \sum_{k=0}^n c_k(E) \in H_b^{2*}(M)$. Les propositions suivantes montrent que les classes de cohomologie basique $c_1(E) \ldots c_n(E)$ vérifient les mêmes propriétés que celles des classes de Chern classiques. On les appelle les *classes de Chern basiques* du $\mathcal{F}$-fibré hermitien E.

8.2. **Proposition.** *Soient N une variété différentiable, $\mathcal{E} : E \longrightarrow (M, \mathcal{F})$ et $\mathcal{E}' : E' \longrightarrow (M, \mathcal{F})$ deux $\mathcal{F}$-fibrés hermitiens. On a les propriétés suivantes*

i) soit $f : N \longrightarrow M$ une application différentiable transverse au feuilletage induisant un feuilletage $\mathcal{F}_1$ sur N. Alors $f^{-1}E$ est un $\mathcal{F}_1$-fibré hermitien et $c(f^{-1}E) = f^*c(E) \in H_b^{2*}(N)$;

ii) $c(E \oplus E') = c(E)c(E')$;

iii) $c(E)$ ne dépend que de la classe d'isomorphie du $\mathcal{F}$-fibré hermitien ;

iv) le fibré dual E^* de E est un $\mathcal{F}$-fibré hermitien et ses classes de Chern basiques vérifient $c_j(E^*) = (-1)^j c_j(E)$.

Démonstration. i) Les démonstrations des **propositions 1.6** et **1.12** restent valables si on remplace $P(E) \longrightarrow M$ par $N \xrightarrow{f} M$ avec f transverse au feuilletage. Par conséquent $f^{-1}E$ est un $\mathcal{F}_1$-fibré hermitien et si on note (R_{ij}) (resp. $({R'}_{ij})$) la matrice de courbure de E (resp. $f^{-1}E$) on a

$$({R'}_{ij}) = f^*(R_{ij}).$$

On en déduit (cf. [We]) que $c(f^{-1}E) = f^*c(E)$.

ii) Le fibré E (resp. E') est muni d'une connexion basique ∇ (resp. ∇') de matrice de connexion (Θ_{ij}) (resp. (Θ'_{ij})) définie sur un ouvert U_α de M. Il est facile de voir que l'application

$$\nabla'' = \nabla \oplus \nabla' : \mathcal{X}(M) \times C^\infty(E \oplus E') \longrightarrow C^\infty(E \oplus E')$$

de matrice $(\Theta''_{ij}) = \begin{pmatrix} (\Theta_{ij}) & 0 \\ 0 & (\Theta_{ij}) \end{pmatrix}$ est une connexion du fibré $E \oplus E'$. Donc sa matrice de courbure $(R''_{ij}) = \begin{pmatrix} (R_{ij}) & 0 \\ 0 & (R'_{ij}) \end{pmatrix}$ est constituée de formes basiques. De plus l'élément du cocycle $g''_{\alpha\beta}$ de $E \oplus E'$ défini sur $U_\alpha \cap U_\beta$ est feuilleté car $g''_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & g'_{\alpha\beta} \end{pmatrix}$. La **proposition 1.11** permet alors de dire que c'est un $\mathcal{F}$-fibré. Et il est évident que son cocycle est à valeurs dans le groupe spécial unitaire adhoc. Nous avons

$$\det\left(\frac{i}{2\pi}(R''_{ij}) + tId\right) = \det\left(\frac{i}{2\pi}(R_{ij}) + tId\right) \wedge \det\left(\frac{i}{2\pi}(R'_{ij}) + tId\right)$$

comme polynôme en t. Mais les coefficients de ces polynômes sont les polynômes symétriques respectifs des matrices $\frac{i}{2\pi}(R''_{ij})$, $\frac{i}{2\pi}(R_{ij})$ et $\frac{i}{2\pi}(R'_{ij})$; donc si on prend $t = 1$, on trouve

$$c(E'')|_{U_\alpha} = c(E)|_{U_\alpha} \wedge c(E')|_{U_\alpha}.$$

Par conséquent, on a bien $c(E \oplus E') = c(E)c(E')$.

iii) Supposons que $\psi : E \longrightarrow E'$ soit un isomorphisme de $\mathcal{F}$-fibrés hermitiens. Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de sections basiques de E définies sur U et $({e'}_1, \ldots, {e'}_n)$ la base de sections basiques de E' définies sur le même ouvert par ${e'}_i = \psi(e_i)$. La matrice de connexion (Θ'_{ij}) vérifie $\Theta'_{ij} = \Theta_{ij}$; ce qui donne l'égalité des matrices de courbure. On en déduit que $c(E) = c(E')$.

iv) Le cocycle $g^*_{\alpha\beta}$ de E^* est feuilleté car $g^*_{\alpha\beta} =$ transposé$(g^{-1}_{\alpha\beta})$. De plus (cf.[We]), sa matrice locale de courbure est $(\Theta^*_{ij}) = -^t(\Theta_{ij})$. D'où $(R^*_{ij}) = -^t(R_{ij})$. En résumé, E^* est un fibré feuilleté dont la matrice de courbure est constituée de formes basiques. C'est donc un $\mathcal{F}$-fibré. Soit n le rang de E. Comme $g_{\alpha\beta} \in SU(n)$, il est clair que $g^*_{\alpha\beta} \in SU(n)$; ce qui assure que E^* est un $\mathcal{F}$-fibré hermitien.

Notons $\Phi_k(A)$ le polynôme symétrique de la matrice A, on a

$$c_k(E^*) = \Phi_k\left(\frac{i}{2\pi}(R^*_{ij})\right) = (-1)^k \Phi_k\left(\frac{i}{2\pi}(R_{ij})\right) = (-1)^k c_k(E)$$

car Φ_k est homogène de degré k et est invariant par transposition puisque c'est un déterminant. Ceci termine la démonstration. ■ □

La proposition suivante montre que dans le cas où $\mathcal{F}$ est un flot, ces classes de cohomologie basique sont des obstructions à l'existence de sous-$\mathcal{F}$-fibrés hermitiens triviaux.

8.3. **Proposition.** *Soient M une variété C^∞ connexe munie d'un flot $\mathcal{F}$ et $\mathcal{E} : E \longrightarrow (M, \mathcal{F})$ un $\mathcal{F}$-fibré hermitien de rang n. Alors si E possède r sections basiques partout linéairement indépendantes, on a $c_k(E) = 0$, pour $k = n - r + 1, \ldots, n$.*

Démonstration. Supposons d'abord $r = n$. Dans ce cas, E est trivial. Toutes les classes $c_k(E)$ sont alors nulles.

Maintenant supposons $r < n$. Le fibré E possède alors un sous-fibré feuilleté S, de rang r, isomorphe à un fibré feuilleté trivial. Mais d'après la **proposition 1.13**, S et son orthogonal $S^\perp$ sont des $\mathcal{F}$-fibrés hermitiens. Nous avons donc $c(S) = 1$ (cf. plus haut) et $c(S)c(S^\perp) = c(E)$ (cf. **3.2.ii)**). Comme $S^\perp$ est de rang $n - r$, nous obtenons

$$\begin{aligned} c(E) &= 1 + c_1(E) + \ldots + c_n(E) \\ &= 1 + c_1(S^\perp) + \ldots + c_{n-r}(S^\perp) \end{aligned}$$

ce qui donne $c_k(E) = 0 \quad k = n - r + 1, \ldots, n$. ■ □

8.4. **Remarque.** Supposons que $\mathcal{F}$ est un flot. Posons $x = -c_1(S)$. Comme dans [BT], d'après le **théorème 2.2**, les éléments $1, x, \ldots x^{n-1}$ sont linéairement dépendants sur $H_b^*(M)$. On a

$$x^n + c_1(E)x^{n-1} + \ldots + c_{n-1}(E)x + c_n(E) = 0$$

et

$$H_b^*(P(E)) = H_b^*(M)[x]/(x^n + c_1(E)x^{n-1} + \ldots + c_{n-1}(E)x + c_n(E)).$$

Nous allons maintenant démontrer le théorème principal donné en introduction et dont on rappelle l'énoncé :

8.5. **Théorème de scindement feuilleté.** *Soient M une variété C^∞ connexe, munie d'un flot $\mathcal{F}$ et $\mathcal{E} : E \longrightarrow (M, \mathcal{F})$ un $\mathcal{F}$-fibré hermitien. Alors il existe une variété B munie d'un flot $\mathcal{V}$ et une application feuilletée $\sigma : B \longrightarrow M$ telles que*

i) le fibré image réciproque de E au-dessus de B se décompose en une somme directe de $\mathcal{V}$-fibrés hermitiens en droites S_i i.e.

$$\sigma^{-1}E = S_1 \oplus \ldots \oplus S_n$$

ii) L'application $\sigma^* : H_b^*(M) \longrightarrow H_b^*(B)$ induite par σ en cohomologie basique est injective.

Démonstration. La démonstration se fait par récurrence sur le rang du fibré. Si E est de rang 1, il n'y a rien à démontrer. Si E est de rang 2, on peut prendre $B = P(E)$. Le fibré tautologique et son orthogonal sont des sous-fibrés en droites de $\sigma^{-1}E$. La **propositions 1.13** et le **théorème 2.2** permettent alors de conclure. Supposons que la propriété soit vraie à l'ordre $r - 1$ et prenons E de rang r. Au-dessus de cette variété, le fibré image réciproque de E se décompose en une somme de deux fibrés $S_1 \oplus \Theta_1$ qui sont d'après la **proposition 1.13** des $\mathcal{F}_1$-fibrés hermitiens. Mais l'orthogonal du sous-fibré tautologique, $\Theta_1 \longrightarrow M_1$, est de rang $r-1$; donc d'après l'hypothèse de récurrence, il existe une variété feuilletée B et une application $\sigma : B \longrightarrow M_1$ telles que $\sigma^{-1}\Theta_1 = S_2 \oplus \ldots \oplus S_r$ et $\sigma^* : H_b^*(M_1) \longrightarrow H_b^*(B)$ est injective. Dans ce cas $\sigma^{-1}E = \sigma^{-1}(S_1) \oplus \ldots \oplus S_r$, i.e on a un diagramme commutatif (dont les flèches sont toutes feuilletées)

$$\begin{array}{ccccc}
\sigma^{-1}(S_1) \oplus \ldots \oplus S_r & \longrightarrow & \pi_1^{-1}E = S_1 \oplus \Theta_1 & \longrightarrow & E \\
\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \pi \\
B & \underset{\sigma}{\longrightarrow} & M_1 = P(E) & \underset{\pi_1}{\longrightarrow} & M
\end{array}$$

Comme les applications σ^* et π_1^* sont injectives, l'application

$$\sigma^* \circ \pi_1^* : H_b^*(M) \longrightarrow H_b^*(B)$$

l'est aussi. Ce qui termine la démonstration.

$\square$

8.6. **Application.** Soient M une variété C^∞ connexe, munie d'un flot $\mathcal{F}$ et $E \longrightarrow M$, $E' \longrightarrow M$ deux $\mathcal{F}$-fibrés hermitiens de rangs respectifs n et n'. A l'aide du **théorème 3.5**, on peut calculer les classes de Chern basiques totales des $\mathcal{F}$-fibrés hermitiens $E \otimes E'$ et $\wedge^r E$.

Calculons tout d'abord la classe de Chern basique d'un produit tensoriel de $\mathcal{F}$-fibrés hermitiens en droites L et L'. On note $\mathcal{R}^L$, $\mathcal{R}^{L'}$ et $\mathcal{R}^{L\otimes L'}$ les courbures des connexions de L, L' et $L\otimes L'$. Soit $(\sigma, \tau) \in C^\infty(L)\times C^\infty(L')$; d'après [GHV]

$$\mathcal{R}^{L\otimes L'}(\sigma \otimes \tau) = \mathcal{R}^L \sigma \otimes \tau + \sigma \otimes \mathcal{R}^{L'} \tau.$$

Comme ces fibrés sont de rang 1, les matrices locales de courbure se réduisent à des 2-formes basiques. Par conséquent, sur chaque ouvert trivialisant U_α

$$\frac{i}{2\pi} w_\alpha^{L\otimes L'} = \frac{i}{2\pi} w_\alpha^L \otimes 1 + 1 \otimes \frac{i}{2\pi} w_\alpha^{L'}$$

et sur $U_\alpha \cap U_\beta$ on a $w_\alpha^{L\otimes L'} = w_\beta^{L\otimes L'}$, $w_\alpha^L = w_\beta^L$ ainsi que $w_\alpha^{L'} = w_\beta^{L'}$. On en déduit que

$$c_1(L \otimes L') = c_1(L) + c_1(L'). \tag{12}$$

Supposons que E soit une somme directe de $\mathcal{F}$-fibrés hermitiens en droites : $E = \oplus_{i=1}^n L_i$. On note $x_i = c_1(L_i)$. On a

$$\wedge^r E = \bigoplus_{1\leq i_1 < \ldots < i_r \leq n} (L_{i_1} \otimes \ldots \otimes L_{i_r}).$$

Comme dans [BT], en utilisant **3.2.ii)** et **(2)**, on montre que

$$c(\wedge^r E) = \prod_{1\leq i_1 < \ldots < i_r \leq n} (1 + x_{i_1} + \ldots + x_{i_r}).$$

Le membre de droite de l'égalité étant symétrique en les x_i, la classe de Chern basique totale de $\wedge^r E$ s'écrit sous la forme d'un polynôme Q en les classes de Chern basiques $c_1(E), \ldots, c_n(E)$. En appliquant le **théorème 3.5**, on obtient $c(\wedge^r E) = Q(c_1(E), \ldots, c_n(E))$ pour tout $\mathcal{F}$-fibré hermitien de rang n. En fait ce polynôme ne dépend que de r et n (voir [BT]).

On prend maintenant $E = \oplus_{i=1}^n L_i$ et $E' = \oplus_{j=1}^{n'} L'_j$. On note $x_i = c_1(L_i)$ et $y_j = c_1(L'_j)$. On a

$$c(E \otimes E') = \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n'}} (1 + x_i + y_j).$$

De même la classe de Chern basique totale de $E \otimes E'$ s'écrit sous la forme d'un polynôme T en les classes de Chern basiques de E et de E'. Le **théorème 3.5** nous dit alors que l'égalité

$$c(E \otimes E') = T(c_1(E), \ldots, c_n(E), c_1(E'), \ldots, c_{n'}(E'))$$

est vraie pour tous $\mathcal{F}$-fibrés hermitiens E et E' de rangs respectifs n et n'. Donnons quelques cas particuliers. a) pour $n = 3$ et $r = 2$

$$c(\wedge^2 E) = (1 + c_1(E))^3 - c_1(E)(1 + c_1(E))^2 + c_2(E)(1 + c_1(E)) - c_3(E).$$

b) pour n quelconque et $n' = 1$

$$c(E \otimes E') = \sum_{i=0}^{n} c_i(E)(1 + c_1(E'))^{n-i}.$$

c) pour $n = n' = 2$

$$\begin{aligned} c(E \otimes E') = {} & c^2 + C^2 + 3c_1C_1 + C_1c_1^2 + C_1^2c_1 \\ & + C_1^2c_2 + c_1^2C_2 + 2C_1c_2 + 2c_1C_2 \\ & + C_1c_1c_2 + c_1C_1C_2 - 2C_2c_2 \end{aligned}$$

où $c_i = c_i(E)$ et $C_i = c_i(E')$.

Références

Bibliographie première partie

[An] Anosov, D.V., *Geodesic flows on compact Riemannian manifolds of negative curvature*, Proc. Steklov Inst. Math., A.M.S. Translations (1969).

[AI] Arnold, D.V., Ill'yashenko, Yu. D., *E.M.S. I (Dynamical Systems)*, Springer-Verlag.

[Be] Bernat, P. & Al., *Représentations des groupes de Lie résolubles*, Dunod, Paris **4** (1972).

[Bo] Bourbaki, N., *Groupes et algèbres de Lie*, Masson, éditeur.

[DNF] Doubrovine, B., Novikov, S., Fomenko, R., *Géométrie contemporaine (vol. 1)*, éditions MIR.

[EN] El Kacimi Alaoui, A., Nicolau, M., *A class of C^∞-stable foliations*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **13** (1993), 697-704.

[Gh1] Ghys, E., *Actions localement libres du groupe affine*, Invent. Math. **82** (1985), 479-526.

[Gh2] Ghys, E., *Codimension 1 Anosov flows and suspensions*, Lecture Notes **1331** (1980).

[Go] Godbillon, C., *Feuilletages*, Birkhauser, **P.M. 98** (1989).

[GT] Ghys, E., Tsuboï, T., *Différentiabilité des conjugaisons entre systèmes dynamiques de dimension 1*, Ann. Inst. Fourier **38** (1988), 215-244.

[HPS] Hirsh, M.W., Pugh, C.C., Shub, M., *Invariant manifolds*, Lect. Notes Math. **583** (1977).

[Ma] Marcus, B., *Ergodic properties of horocyclic flows for surfaces of negative curvature*, Ann. Math. **105** (1977), 81-105.

[Pi] Pisot, C., *Eine merkwürdige Klasse ganzer algebraischer Zahlen*, J. Reine Angew. Math. **209** (1962), 82-83.

[Pl] Plante, J.F., *Foliations with measure preserving holonomy*, Ann. Math. **102** (1978), 327-361.

[Ra] Raghunathan, M.S., *Discrete subgroups of Lie groups*, Springer.

[To1] Tomter, P., *Anosov flows on infra-homogeneous spaces*, Proc. Symp. In Pure Math. **14** (1970), 299-327.

[To2] Tomter, P., *On the classification of Anosov flows*, Topology **14** (1975), 179-189.

Bibliographie deuxième partie

[BC] Bott, R. et Chern, S.S., *Hermitian vector bundles and the equidistribution of the zeroes of their holomorphic sections*, Acta. Math. **114** (1965), 71-112.

[BT] Bott, R. et Tu, L.W., *Differential Forms in Algebraic Topology*, Springer-Verlag, GTM (1982).

[Ek] El Kacimi Alaoui, A., *Opérateurs transversalement elliptiques sur un feuilletage riemannien et applications*, Compositio Mathematica **73** (1990), 57-106.

[EN] El Kacimi Alaoui, A. et Nicolau, M., *On the topological invariance of the basic cohomology*, Mathematische Annalen **295** (1993), 627-634.

[GHV] Greub, Halperin et Vanstone, *Connections, curvature and cohomologie*, Volume II, Academic Press (1973).

[KT] Kamber, F. et Tondeur, P., *Foliated bundles and characteristic classes*, Lecture Notes in Math. **493** (1975).

[MaC] Mac Cleary, J., *User's guide to spectral sequences*, Mathematics Lecture Series **12**; Publisch or Perish, Inc. (1985).

[Mo] Molino, P., *Riemannian foliations*, Progress in Math., **73**; Basel Boston Stuttgart : Birkhauser, 1988.

[We] Wells, R.O., *Differential Analysis on Complex Manifolds*, Springer-Verlag, GTM (1980).

Liste des travaux

[BB] Belliart, M. et Birembaux, O., *Actions localement libres de groupes résolubles* Ann. Institut Fourier, **44**, **5** (1994), 1519-1537.

[Bi] Birembaux, O., *Scindement de $\mathcal{F}$-fibrés hermitiens* Prépublication de l'Université de Valenciennes, Novembre 1996.