

Des triangles dorés

Construire une leçon concrète de didactique à partir
d'une question simple de géométrie élémentaire !

A. EL KACIMI

1. Prologue

Dans une salle d'attente, et pour un petit moment. La lecture ne manque pas mais elle est du même genre comme toujours dans ces endroits-là : des revues datant de quelques années déposées sur une table basse. Les gens n'y lisent rien, ils regardent simplement les images en attendant leur tour. Ça ne m'emballe nullement. Je sors plutôt mon petit cahier fourre-tout où j'ai l'habitude de loger au crayon presque tout ce qui me passe par la tête. Je commence à regarder un petit exercice que j'ai trouvé par hasard le matin même en feuilletant une revue de vulgarisation des mathématiques. Juste après avoir dégagé les pistes pour le résoudre, j'y ai découvert de belles choses à partir desquelles on peut générer une bonne leçon de didactique, concrète, et donc utile. Voici de quoi il en est question.

Soit $\tau = ABC$ un triangle non plat. Alors 6 nombres lui sont associés : les mesures x , y et z respectivement des côtés BC , CA et AB et celles α , β et γ respectivement des angles \widehat{A} , \widehat{B} et \widehat{C} . Trouver deux triangles τ et τ' non isométriques ayant 5 de ces nombres égaux.

Une petite grimace à la lecture de l'énoncé : sans jamais faire attention j'ai toujours eu l'image un peu vague que deux triangles ayant les mêmes angles (donc semblables d'après le troisième cas de similitude) avec en plus un côté égal sont isométriques. Mais je me ressaisis en me disant que si la question est posée c'est que je me trompe (et que j'aurais dû vérifier une fois pour toutes ce qu'il en est). Je me mets à réfléchir dessus. Et bien sûr la première chose que je vois est que si 5 des 6 nombres sont égaux, c'est que celui qui diffère est forcément un côté (l'assertion "trois côtés égaux" implique l'isométrie entre les deux d'après le premier cas d'égalité des triangles).

Puisque un triangle est caractérisé à isométrie près par ses côtés, il sera dorénavant désigné par un triplet $\tau = \langle x, y, z \rangle$ de nombres réels $x > 0$, $y > 0$ et $z > 0$ tels que :

$$(1) \quad \begin{cases} x < y + z \\ y < z + x \\ z < x + y. \end{cases}$$

(Les inégalités sont strictes parce que les triangles que nous considérons sont supposés non plats.) La vraie question est donc en fait :

Trouver deux triangles τ et τ' non isométriques mais semblables et ayant deux côtés égaux.

Les deux triangles $\tau = \langle x, y, z \rangle$ et $\tau' = \langle x', y', z' \rangle$ étant semblables, il existe un nombre réel $\lambda > 0$ tel que $x' = \lambda x$, $y' = \lambda y$ et $z' = \lambda z$.

2. Résolution

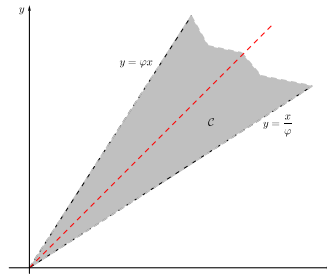
Nous allons en fait répondre à une question un peu plus générale : trouver toutes les paires (τ, τ') de triangles $\tau = \langle x, y, z \rangle$ et $\tau' = \langle x', y', z' \rangle$ tels que :

$$(2) \quad \begin{cases} x' = y \\ y' = z \end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z}.$$

La résolution (assez facile) de ce problème nous amène à choisir librement x et y et prendre nécessairement $z = \frac{y^2}{x}$ et $z' = \frac{y^3}{x^2}$. A priori, les solutions sont de la forme :

$$(3) \quad \tau = \left(x, y, \frac{y^2}{x} \right) \quad \text{et} \quad \tau' = \left(y, \frac{y^2}{x}, \frac{y^3}{x^2} \right) \quad \text{avec } x \text{ et } y \text{ arbitraires dans } \mathbb{R}_+^*.$$

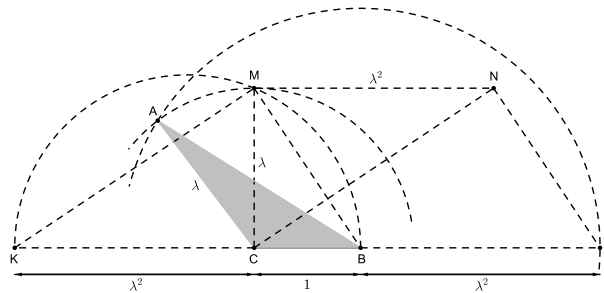
Mais le triplet $(x, y, \frac{y^2}{x})$ ne représente un triangle τ que si ses composantes vérifient les inégalités (1). Un calcul simple amène à imposer à x et y la condition $\frac{x}{\varphi} < y < \varphi x$ où φ est le nombre d'or qui vaut $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Le couple (x, y) ne peut donc être choisi que dans le cône ouvert \mathcal{C} grisé dans le dessin ci-dessous. Et comme x doit être différent de y (les triangles cherchés ne peuvent pas être isocèles), \mathcal{C} est privé de la première bissectrice.



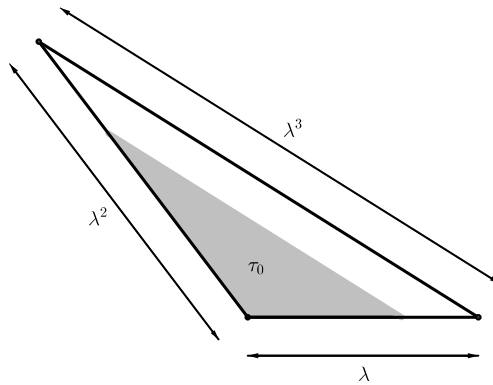
Finalement, les paires de triangles (τ, τ') répondant à la question sont (que nous présentons de façon légèrement différente) :

$$(4) \quad \tau = (x, \lambda x, \lambda^2 x) \quad \text{et} \quad \tau' = (\lambda x, \lambda^2 x, \lambda^3 x) \quad x, \lambda \in \mathbb{R}_+^* \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\varphi} < \lambda < \varphi \quad \text{et} \quad \lambda \neq 1.$$

Si on prend par exemple $x = 1$, les triangles $\tau_0 = \langle 1, \lambda, \lambda^2 \rangle$ et $\tau_1 = \langle \lambda, \lambda^2, \lambda^3 \rangle$ répondent à la question mais aussi $\tau_n = \langle \lambda^n, \lambda^{n+1}, \lambda^{n+2} \rangle$ et $\tau_{n+1} = \langle \lambda^{n+1}, \lambda^{n+2}, \lambda^{n+3} \rangle$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Le nombre $\lambda \in]\varphi^{-1}, \varphi[$ étant donné, construisons géométriquement par exemple la paire (τ_0, τ_1) en commençant par τ_0 .



On trace un segment BC de longueur 1. Sur la perpendiculaire en C à la droite (BC) , on repère un point M tel que $CM = \lambda$. La perpendiculaire en M à (BM) coupe la droite (BC) en un point K tel que $CK = \lambda^2$. On construit le parallélogramme $CKMN$ ensuite le parallélogramme $MNLB$; le segment LB mesure donc λ^2 . Le point A , troisième sommet du triangle τ_0 (les deux premiers étant B et C) est l'intersection du cercle de centre C et passant par M et le cercle de centre B et passant par L .



Le triangle τ_1 s'obtient en appliquant au triangle τ_0 déjà construit l'homothétie de centre C (ou A ou B) et de rapport λ .

On peut aussi se poser une autre question (supplémentaire) : *parmi ces triangles solutions du problème, y en a-t-il qui sont rectangles ?* Une simple application du théorème de Pythagore montre que de tels triangles sont donnés comme suit :

$$(5) \quad \tau = (x, \lambda x, \lambda^2 x) \quad \text{et} \quad \tau' = (\lambda x, \lambda^2 x, \lambda^3 x) \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \lambda = \sqrt{\varphi}.$$

(On vérifie facilement que les nombres $\sqrt{\varphi}$ et $\frac{1}{\sqrt{\varphi}}$ sont bien dans l'intervalle $]\varphi^{-1}, \varphi[$.) Le rapport des aires de ces deux triangles (du plus grand au plus petit) est donc exactement le nombre d'or φ !

3. Épilogue

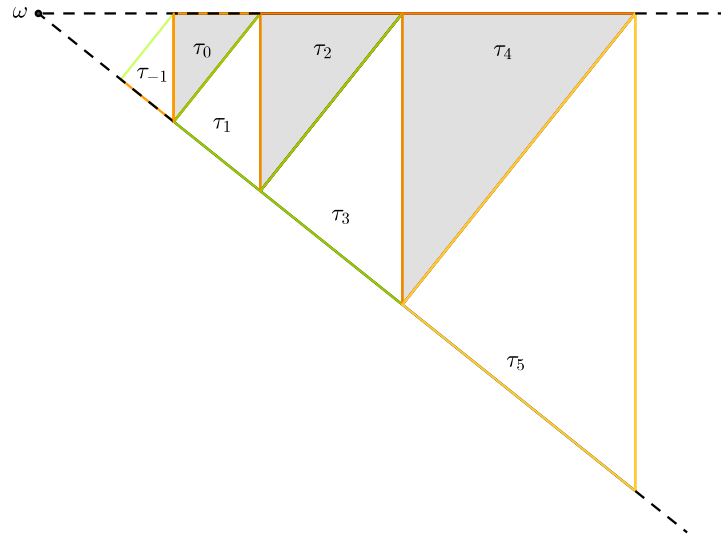
Il est clair que je n'ai rien inventé de nouveau à travers cet exercice qui, comme tout le monde peut le remarquer, est vraiment très élémentaire. Et je comprend que quand on n'est pas un "ouvrier de l'enseignement" constamment sur le front, on puisse être amené à se demander quel est son intérêt. Son intérêt ? Il est riche par tout ce que fait revisiter sa résolution, notamment :

- Les cas d'égalité et de similitude des triangles. C'est l'occasion de les rappeler. Le moins que je puisse dire est que la majorité des étudiants que j'ai en Licence 3 et en Master ne savent plus (ou n'ont peut-être jamais su) ce que c'est.
- Un peu d'analyse élémentaire dans la résolution du problème. L'apparition quelque peu mystérieuse du nombre d'or $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, de son inverse $\frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et de sa racine carrée (pour les paires de triangles rectangles) est une si agréable surprise. Il est encore là ce φ , la nature est donc bien faite !
- Des constructions géométriques à la règle et au compas, notamment pour avoir λ^2 et λ^3 à partir de λ dès qu'on se donne celui-ci.

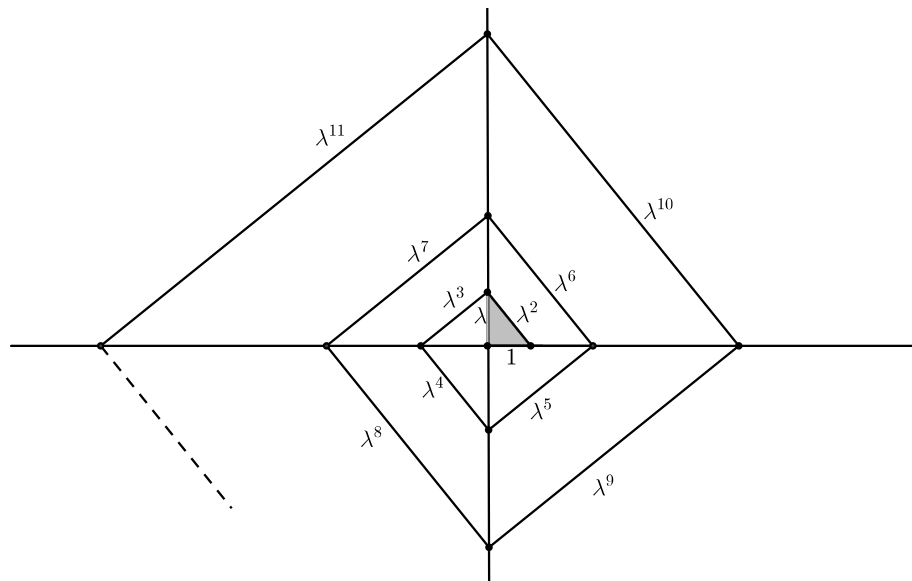
Bref... il me semble bien adapté pour un cours de didactique dans les différentes formations des enseignants. C'est aussi un thème de travail qui pourrait être développé en Seconde, Première ou Terminale par exemple. Et au-delà de tout ça, il intéresserait sûrement toute personne passionnée par ce genre de mathématiques.

Des triangles rectangles répondant à la question

Le paramètre λ qui suit désigne $\sqrt{\varphi}$.



On part du triangle rectangle $\tau_0 = \langle 1, \lambda, \lambda^2 \rangle$ et on construit $\tau_1 = \langle \lambda, \lambda^2, \lambda^3 \rangle$. Les triangles τ_2 et τ_3 sont les transformés respectifs de τ_0 et τ_1 par l'homothétie de centre ω et de rapport $\lambda^2 = \varphi$. Et ainsi de suite...



On part du triangle rectangle $\tau_0 = \langle 1, \lambda, \lambda^2 \rangle$ et on construit $\tau_1 = \langle \lambda, \lambda^2, \lambda^3 \rangle$ en lui appliquant la similitude σ de centre l'origine, de rapport λ et d'angle $\frac{\pi}{2}$. De façon générale, τ_n (avec $n \in \mathbb{Z}$) est obtenu en appliquant à τ_0 la similitude $\sigma_n = \sigma^n$. (Ici, σ_0 est l'identité et $\sigma_n = (\sigma^{-1})^{|n|}$ si $n < 0$.) Pour chaque entier $k \geq 0$, on pourrait placer la suite partielle à quatre termes $(\tau_{4k}, \tau_{4k+1}, \tau_{4k+2}, \tau_{4k+3})$ à une certaine hauteur de telle sorte qu'on verrait l'ensemble comme un immeuble avec une infinité d'étages, le $k^{\text{ème}}$ au niveau λ^{4k} et une infinité de sous-sols, le $\ell^{\text{ème}}$ au niveau $-\lambda^{-4\ell}$.