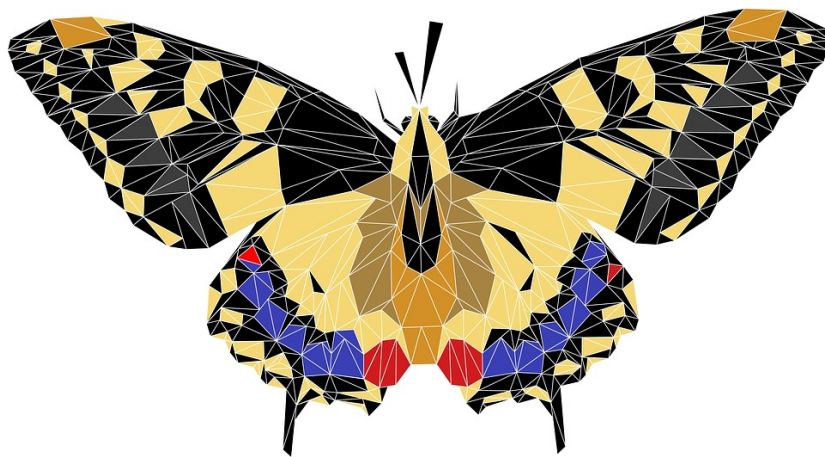


VARIABLE COMPLEXE ET SURFACES RIEMANNIENNES

AZIZ EL KACIMI ALAOU
(Professeur à l'Université de Valenciennes)



Juillet 2017

AVANT-PROPOS

Ce texte se compose de deux parties constituant, plus ou moins, les contenus de divers cours que j'ai dispensés en Licence 3 et en Master à l'Université de Valenciennes.

Partie I. Elle traite des éléments fondamentaux de la théorie des fonctions d'une variable complexe et s'adresse, en principe, aux étudiants de la troisième année de Licence de Mathématiques. (À niveau-là, cet enseignement tend hélas à disparaître !)

- Construction algébrique du corps $(\mathbb{C}, +, \times)$ des nombres complexes. Interprétation géométrique : module, argument... Quelques applications.
- Séries entières, rayon de convergence. Fonctions analytiques et quelques-unes de leurs propriétés essentielles telles que la C^∞ -dérivabilité, le prolongement analytique, leurs zéros isolés...
- Les diverses définitions de l'holomorphie d'une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ (U ouvert).
- Intégration sur un chemin, tout ce qui tourne autour et ses diverses applications.
- Homotopie des chemins dans le plan. Ouverts simplement connexes (entre autres les ouverts convexes, étoilés).
- Formule de Cauchy, théorème de Cauchy pour les fonctions holomorphes et les diverses conséquences qu'on en tire : analyticité d'une fonction holomorphe...
- Étude de l'homographie $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ sur la sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
- Le groupe \mathcal{H} des homographies en lien avec $SL(2, \mathbb{C})$ (groupe des matrices complexes 2×2 de déterminant 1).
- La description explicite du groupe des automorphismes du disque unité ouvert et celui du demi-plan supérieur.
- Étude des singularités isolées d'une fonction holomorphe : singularité apparente, pôle ou singularité essentielle.
- Théorème des résidus. Ses applications au calcul effectif des intégrales de fonctions d'une variable réelle.

Partie II. Plus réduite que la première, elle est consacrée à une introduction élémentaire des surfaces et la courbure. C'est un cours que j'ai dispensé il y a quelques années en Master 1 recherche de Mathématiques à l'Université de Valenciennes.

- Introduction à la notion de surface : application différentiable, carte locale. Espace tangent, champ de vecteurs, application tangente. Actions de groupes.
- Métriques riemanniennes, longueur d'une courbe. Les trois exemples fondamentaux : le plan euclidien \mathbb{R}^2 , la sphère \mathbb{S}^2 , le demi-plan de Poincaré \mathbb{H}^2 .
- Connexions, connexions affines, connexions riemanniennes, le théorème de Levi-Civita. Géodésiques, courbure, courbure sectionnelle. Calcul des courbures respectives de \mathbb{R}^2 , \mathbb{S}^2 et \mathbb{H}^2 . Le théorème de classification.
- Une étude spécifique du demi-plan \mathbb{H}^2 , ses géodésiques, son groupe d'isométries. Surfaces hyperboliques. Théorème de Poincaré.

Des exercices résolus et d'autres en vrac sont proposés. Ils sont assez diversifiés mais ne sont pas toujours rangés dans l'ordre de la présentation des chapitres du cours.

Dans l'appendice en fin de texte, quelques notions en théorie des groupes sont exposées. Elles peuvent compléter la lecture de certains passages dans les deux parties principales.

Lille, septembre 2017
AZIZ EL KACIM

TABLE DES MATIÈRES

VARIABLE COMPLEXE

I. NOMBRES COMPLEXES

1. L'aspect algébrique	9
2. L'aspect géométrique	11
3. Propriétés et calculs	13

II. SÉRIES ENTIÈRES

1. Rappels sur les séries numériques	21
2. Séries entières	23
3. Exponentielle et logarithme complexes	25
4. Fonctions analytiques	28

III. FONCTIONS HOLOMORPHES

1. Préliminaires et premières définitions	31
2. Intégration complexe	34

IV. FORMULE ET THÉORÈME DE CAUCHY

1. Homotopie des chemins	39
2. Théorème de Cauchy	40
3. Formule de Cauchy	43
4. Analyticité des fonctions holomorphes	44

V. HOMOGRAPHIE

1. Définitions et notations	47
2. Étude de l'homographie	48
3. Le groupe $PSL(2, \mathbb{C})$	50
4. Le birapport	51
5. Étude géométrique d'un exemple	52
6. Biholomorphismes	54

VI. SINGULARITÉS ET RÉSIDUS

1. Séries de Laurent	59
2. Singularités	60
3. Résidus	63
4. Calcul d'intégrales	65

UN COMPLÉMENT : Le théorème fondamental de l'algèbre	69
--	----

EXERCICES RÉSOLUS	73
-------------------------	----

EXERCICES EN VRAC	87
-------------------------	----

SURFACES RIEMANNIENNES

I. SURFACES DIFFÉRENTIABLES

1. Définitions et exemples	99
2. Applications différentiables	101
3. Espaces tangents	102
4. Actions de groupes	104

II. SURFACES RIEMANNIENNES

1. Métriques riemanniennes	109
2. Exemples de surfaces riemanniennes	111

III. COURBURE

1. Connexions	115
2. Courbure	118
3. Exemples de calcul	119

IV. GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE

1. Groupe des isométries de \mathbb{H}^2	123
2. Géodésiques de \mathbb{H}^2	125
3. Surfaces hyperboliques	127

EXERCICES	131
-----------------	-----

APPENDICE : Quelques notions utiles en théorie des groupes

1. La notion de section	139
2. Extensions de groupes	141
3. Divers	142
4. Exemples d'extensions	143
5. Groupes résolubles, groupes nilpotents	146

RÉFÉRENCES	149
------------------	-----

INDEX ALPHABÉTIQUE	151
--------------------------	-----

VARIABLE COMPLEXE

CHAPITRE 0

NOMBRES COMPLEXES

1. L'aspect algébrique

La hiérarchie numérique débute par les nombres entiers naturels qui comptent les éléments des ensembles finis. Leur ensemble, noté \mathbb{N} , est muni d'une addition $m + n$ et d'une multiplication mn . Le besoin de résoudre les équations du type $x + m = n$ et $mx = n$ a amené à l'élargir et à introduire l'anneau des entiers relatifs $(\mathbb{Z}, +, \times)$ et le corps des nombres rationnels $(\mathbb{Q}, +, \times)$. Les nombres réels sont arrivés pour des besoins géométriques ou autres (on pourrait à cet effet évoquer simplement le nombre $\sqrt{2}$ à partir du théorème de Pythagore). Ces derniers forment un corps $(\mathbb{R}, +, \times)$ possédant beaucoup de propriétés intéressantes, entre autres la *complétude*, fondamentale en analyse : toute suite de Cauchy y converge.

Malgré toutes les belles propriétés du corps $(\mathbb{R}, +, \times)$, un problème se pose : on ne peut pas y résoudre l'équation $x^2 + 1 = 0$. Il est donc nécessaire de l'agrandir en le plongeant dans un corps commutatif \mathcal{K} (le plus petit) dans lequel cela sera possible. C'est l'objet de cette section.

1.1. Construction de \mathcal{K}

• Supposons que \mathcal{K} est construit et qu'on y a trouvé un élément i (*imaginaire*, c'est pour cela qu'on le note ainsi) tel que $i^2 = -1$; \mathcal{K} devrait alors contenir tous les produits $iy = yi$ avec $y \in \mathbb{R}$ et par suite les éléments de la forme $x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$. En plus, le produit $(x + iy)(x' + iy')$, calculé en utilisant les règles habituelles (commutativité, associativité, distributivité), doit aussi rester de cette forme ; et c'est le cas puisque :

$$\begin{aligned}(x + iy)(x' + iy') &= x(x' + iy') + (iy)(x' + iy') \\ &= xx' + xiy' + iyx' + iyiy' \\ &= (xx' - yy') + i(xy' + x'y).\end{aligned}$$

Cela nous suggère \mathbb{R}^2 comme ensemble sous-jacent à \mathcal{K} ainsi que les opérations d'addition et de multiplication à mettre dessus :

$$(0.1) \quad (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \quad \text{et} \quad (x, y)(x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y).$$

Il est bien connu que $(\mathbb{R}^2, +)$ est un groupe commutatif ; son élément neutre est $(0, 0)$ et le symétrique de (x, y) étant son opposé $(-x, -y)$. Des calculs faciles à mener montrent que la multiplication qu'on vient de définir est commutative, associative, distributive par rapport à l'addition et qu'elle a $(1, 0)$ comme élément neutre. Montrons que tout élément non nul (x, y) a un inverse (x', y') ; on doit avoir $(x, y)(x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y) = (1, 0)$, ce

qui nous amène à la résolution du système linéaire (où les inconnues sont les nombres réels x' et y') :

$$\begin{cases} xx' - yy' = 1 \\ yx' + xy' = 0. \end{cases}$$

La résolution de ce système donne $(x', y') = (x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right)$. Tout élément $(x, y) \neq (0, 0)$ est donc inversible. L'ensemble $\mathcal{K} = \mathbb{R}^2$ muni des opérations d'addition et de multiplication définies en (0.1) est donc un corps commutatif.

• Nous allons plonger le corps des réels \mathbb{R} dans le corps \mathcal{K} qu'on vient de construire. À cet effet, on considère l'application $j : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathcal{K}$ définie par $j(x) = (x, 0)$. Il est évident que j est injective et vérifie, pour tous $x, x' \in \mathbb{R}$:

$$j(x + x') = j(x) + j(x') \quad \text{et} \quad j(xx') = j(x)j(x')$$

autrement dit, j est un homomorphisme de corps, injectif ; on peut alors voir \mathbb{R} comme un *sous-corps* de \mathcal{K} . Le nombre réel x sera identifié à l'élément $(x, 0)$; on écrira donc $(x, 0) = x$ tout simplement. Il est aussi facile de voir que $(0, 1)^2 = (-1, 0) = -1$; l'élément $(0, 1)$, qui n'est pas réel mais dont le carré vaut le réel -1 sera noté i . Ainsi tout élément $z = (x, y)$ de \mathcal{K} s'écrira sous la forme :

$$(0.2) \quad z = x + iy \quad \text{avec} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Cette représentation est unique. En effet si $z = x + iy = x' + iy'$, on a $x - x' = i(y' - y)$; donc $(x - x')^2 = -(y' - y)^2$, ce qui n'est possible que si $x = x'$ et $y = y'$.

Le nombre réel x est appelé *partie réelle* de z qui est notée $\Re(z)$; y est sa *partie imaginaire* et est notée $\Im(z)$. Un nombre complexe de la forme iy avec $y \in \mathbb{R}$ est dit *imaginaire pur*.

• \mathcal{K} est le plus petit corps contenant \mathbb{R} et dans lequel l'équation $x^2 + 1 = 0$ admet une solution. On le note \mathbb{C} et on l'appelle le corps des *nombres complexes*.

1.2. Quelques propriétés et définitions

• L'application de \mathbb{C} dans lui-même qui à tout $z = x + iy$ associe le nombre complexe $\bar{z} = x - iy$ est appelée *conjugaison* ; on dira que \bar{z} est le *conjugué* de z . Cette application est une involution i.e. $\overline{\bar{z}} = z$; et c'est un automorphisme du corps $(\mathbb{C}, +, \times)$, c'est-à-dire qu'on a :

$$(0.3) \quad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'} \quad \text{et} \quad \overline{zz'} = \bar{z} \cdot \bar{z'}.$$

On en déduit alors (pour $z' \neq 0$) $\bar{z} = z' \cdot \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \bar{z'} \cdot \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}$ et donc $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$; autrement dit, le conjugué d'un quotient est le quotient des conjugués.

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. Alors $\bar{z} = z$ si, et seulement si, z est réduit à sa partie réelle x .

• Un nombre complexe z est connu dès qu'on a sa partie réelle x et sa partie imaginaire y . Inversement, on peut donner x et y en fonction de z et \bar{z} . En effet, on a le système :

$$\begin{cases} x + iy = z \\ x - iy = \bar{z}. \end{cases}$$

Sa résolution immédiate donne :

$$(0.4) \quad \begin{cases} x = \frac{z + \bar{z}}{2} \\ y = \frac{z - \bar{z}}{2i}. \end{cases}$$

• Tel qu'on a construit \mathbb{C} , c'est un espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension 2 (par exemple $(1, i)$ en est une base ; c'est la plus utilisée). Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes. On a :

$$z\bar{z}' = (xx' + yy') - i(xy' - yx').$$

La partie réelle de ce nombre définit une forme \mathbb{R} -bilinéaire symétrique $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ par $\langle z, z' \rangle = xx' + yy'$; comme $\langle z, z \rangle = z\bar{z} = x^2 + y^2 > 0$ pour tout z non nul, cette forme est définie positive, c'est donc un produit scalaire sur le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} . Il donne alors lieu à une norme :

$$(0.5) \quad |z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Le nombre réel positif ou nul $|z|$ est appelé *module* du nombre complexe $z = x + iy$. Les principales propriétés du module sont :

$$(0.6) \quad |zz'| = |z| \cdot |z'|, \quad \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad \text{et} \quad ||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

Évidemment, lorsque z est réel, son module n'est rien d'autre que sa valeur absolue $|z|$ qu'on connaît habituellement. On a en particulier $|1| = 1$ et $|i| = 1$. Comme en plus $\langle 1, i \rangle = 0$, la base $\{1, i\}$ du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} est en fait orthonormée.

2. L'aspect géométrique

Nous avons vu la représentation algébrique des nombres complexes $z = x + iy$ qui fait de \mathbb{C} un espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension 2. Il y a donc une identification canonique entre \mathbb{R}^2 et \mathbb{C} par l'application $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + iy = z \in \mathbb{C}$.

Deux groupes sont en jeu : le groupe additif $(\mathbb{C}, +)$ et le groupe multiplicatif (\mathbb{C}^*, \times) . Nous allons les interpréter géométriquement.

2.1. Le groupe additif $(\mathbb{C}, +)$

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. La transformation $\tau_z : u \in \mathbb{C} \mapsto u + z \in \mathbb{C}$ s'écrit en coordonnées cartésiennes $\tau_z(\alpha, \beta) = (\alpha + x, \beta + y)$; elle correspond à la translation par le vecteur $z = (x, y)$. Nous avons donc une application :

$$\tau : z \in \mathbb{C} \mapsto \tau_z \in \mathcal{T}$$

où \mathcal{T} est le groupe des translations du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} . Un calcul assez facile montre que τ est une bijection vérifiant $\tau_{z+z'} = \tau_{z'} \circ \tau_z$, autrement dit, τ est un isomorphisme du groupe additif $(\mathbb{C}, +)$ sur le groupe (\mathcal{T}, \circ) où \circ est la composition des applications.

2.2. Le groupe multiplicatif (\mathbb{C}, \times) ou (\mathbb{C}, \cdot)

• Nous avons vu que la partie réelle de l'application $(z, z') \mapsto z\bar{z}'$ définit un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} par $\langle z, z' \rangle = xx' + yy'$. On peut donc parler de *similitude linéaire directe* (“directe” signifie qu'elle préserve l'orientation donnée par exemple par la base $(1, i)$). La matrice Z d'une telle application par rapport à la base orthonormée $(1, i)$ a la forme :

$$(0.7) \quad Z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

où x et y sont des nombres réels non simultanément nuls. Si :

$$Z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Z' = \begin{pmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{pmatrix}$$

sont deux matrices de ce type, leur produit (calcul facile à mener) est encore de ce type :

$$(0.8) \quad Z \cdot Z' = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' - yy' & -(xy' + x'y) \\ xy' + x'y & xx' - yy' \end{pmatrix}.$$

Bien évidemment, la matrice identité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en fait partie ainsi que l'inverse de $Z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ qui est :

$$Z^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} & \frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des matrices de la forme (0.7) avec $x^2 + y^2 \neq 0$ muni de la multiplication habituelle est un groupe commutatif (facile à voir sur le produit (0.8)). Il est isomorphe au groupe $(\text{Sim}_0^+(\mathbb{C}), \circ)$ des similitudes linéaires directes de l'espace euclidien $(\mathbb{C}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Comme en plus l'ensemble \mathcal{H} de toutes les matrices de la forme (0.7) (sans imposer cette fois-ci la condition $x^2 + y^2 \neq 0$) est un groupe pour l'addition habituelle (des matrices), $(\mathcal{H}, +, \cdot)$ est en fait un corps commutatif canoniquement isomorphe au corps $(\mathbb{C}, +, \times)$ via l'application :

$$(0.9) \quad z = x + iy \in \mathbb{C} \xrightarrow{\simeq} \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \in \mathcal{H}.$$

En conclusion, le groupe $(\mathbb{C}, +)$ est isomorphe au groupe des translations (\mathcal{T}, \circ) : quand on rajoute un nombre complexe $z = x + iy$ à $u = \alpha + i\beta$, on translate le point (α, β) par (x, y) .

Le groupe multiplicatif (\mathbb{C}, \cdot) est isomorphe à (\mathcal{H}^*, \cdot) (où \mathcal{H}^* est l'ensemble des matrices non nulles de la forme (0.7)) : multiplier $w = a + ib$ par $z = x + iy$ revient à appliquer à (a, b) la matrice $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$.

• Nous venons donc d'identifier un nombre complexe non nul $z = x + iy$ à la matrice $Z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$. Mais cette dernière peut s'écrire sous la forme :

$$Z = \sqrt{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}.$$

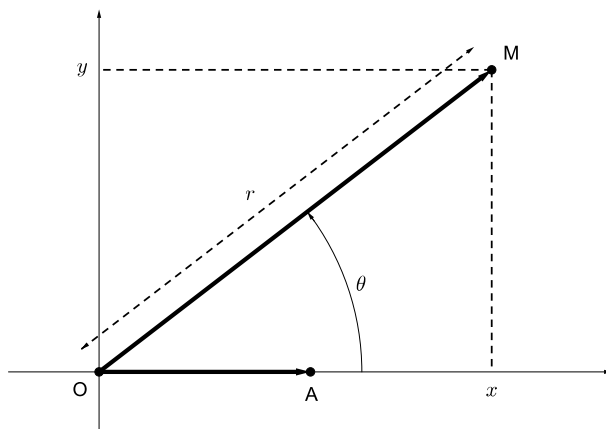
C'est la matrice de la similitude centrée à l'origine de rapport $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ et d'angle θ tel que $\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. On a donc :

$$Z = r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Le nombre complexe correspondant s'écrit alors $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$. L'angle θ (défini à un multiple entier de 2π près) est appelé *argument* de z et se note $\text{Arg}(z)$. Le nombre complexe non nul z est donc entièrement déterminé par son module r et son argument θ ; on l'écrit $z = [r, \theta]$. Un calcul immédiat montre que $zz' = [r, \theta] \cdot [r', \theta'] = [rr', \theta + \theta']$. L'application $\Phi : (r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \mapsto [r, \theta] = z \in \mathbb{C}^*$ est donc un homomorphisme de groupes ; il est surjectif mais pas injectif, son noyau est $\{1\} \times 2\pi\mathbb{Z}$. Comme le quotient $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ n'est rien d'autre que le groupe $\text{SO}(2)$ des rotations de centre l'origine (c'est aussi le *groupe des angles* de sommet l'origine), Φ induit un isomorphisme de groupes :

$$(0.10) \quad \Phi : \mathbb{R}_+^* \times \text{SO}(2) \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}^*.$$

• La similitude Z appliquée au point $A = 1 = (1, 0)$ donne le point $M = x + iy$ tel que $OM = r$ et $(\vec{OA}, \vec{OM}) = \theta$ (modulo 2π) (voir le dessin ci-dessous).



3. Propriétés et calculs

On connaît très bien les règles de calcul sur les nombres réels. Elles sont un peu plus riches sur le corps des complexes car, en plus de leur aspect algébrique, elles y mêlent de la géométrie, principalement par l'usage qu'elles font des rotations.

3.1. Formule de Moivre

On vient de voir qu'un nombre complexe non nul $z = x + iy$ s'écrit aussi sous la forme trigonométrique :

$$(0.11) \quad z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ est son module et θ son argument. On a aussi vu qu'on utilise l'écriture $z = [r, \theta]$ et que :

$$[r, \theta] \cdot [r', \theta'] = [rr', \theta + \theta']$$

pour tout $z = x + iy$ et tout $z' = x' + iy'$ (tous deux non nuls). Comme $1 = [1, 0]$, cette formule implique :

$$\frac{z}{z'} = \frac{[r, \theta]}{[r', \theta']} = \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta' \right].$$

On a donc, pour tout entier relatif n : $z^n = [r^n, n\theta]$. Mise sous forme trigonométrique, cette égalité s'écrit, pour $r = 1$:

$$(0.12) \quad (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

C'est la *formule de Moivre*.

On verra dans le chapitre sur les séries entières comment on définit l'exponentielle d'un nombre complexe qui permet d'écrire la formule de Moivre sous la forme :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad \text{et donc} \quad e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Nous commencerons d'ores et déjà à l'utiliser car elle simplifie certains calculs et permet d'aller plus vite.

3.2. Racine d'un nombre complexe

• On sait que le corps $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ a été fabriqué afin de répondre au besoin de la résolution de l'équation du second degré $z^2 + 1 = 0$; celle-ci a deux solutions $z_0 = i$ et $z_1 = -i$. *Qu'en est-il de l'équation $z^n = a$ où a est un nombre complexe non nul quelconque et n un entier tel que $n \geq 2$?* Posons $z = [r, \theta]$ et $a = [\rho, \alpha]$. L'équation devient alors $[r^n, n\theta] = [\rho, \alpha]$; ce qui est équivalent au système :

$$r^n = \rho \quad \text{et} \quad n\theta = \alpha + 2k\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}$$

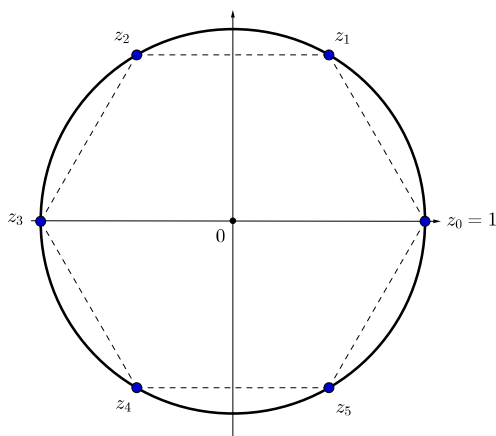
dont la résolution donne :

$$r = \rho^{\frac{1}{n}} \quad \text{et} \quad \theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{k}{n}2\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

L'équation $z^n = a$ a donc les n solutions listées ci-dessous :

$$z_0 = \left[\rho^{\frac{1}{n}}, \frac{\alpha}{n} \right], \quad z_1 = \left[\rho^{\frac{1}{n}}, \frac{\alpha + 2\pi}{n} \right], \dots, z_{n-1} = \left[\rho^{\frac{1}{n}}, \frac{\alpha + (n-1)2\pi}{n} \right].$$

En particulier, si $a = 1$, on obtient les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité $z_k = \left[1, \frac{2k\pi}{n} \right]$ où k varie dans $\{0, 1, \dots, n-1\}$. On peut les représenter géométriquement sur le cercle unité par les sommets d'un polygone régulier à n côtés dont l'un d'eux est $z_0 = 1$ (voir dessin ci-dessous pour $n = 6$).



• Dans $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, l'équation du second degré $x^2 + 1 = 0$ a deux solutions i et $-i$. Qu'en est-il pour $az^2 + bz + c = 0$ (a , b et c étant des complexes avec, bien sûr, $a \neq 0$) ? En la mettant sous la forme :

$$a \left\{ \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right\} = 0$$

on voit tout de suite que le problème se ramène au calcul des racines carrées du nombre complexe $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$; et ça on sait le faire bien entendu (cf. Exercice 1).

Le cas le plus ardu est celui de l'équation $P(z) = 0$ où P est un polynôme de degré n à coefficients complexes. On sait montrer qu'elle admet une solution : c'est le *théorème fondamental de l'algèbre*. On dit que le corps $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ est *algébriquement clos*. Mais on ne sait pas toujours trouver explicitement les solutions.

3.3. Quelques applications

• La formule de Moivre (0.12) est une "belle invention" ; elle permet, entre pas mal d'autres choses, de simplifier certains calculs en trigonométrie. Voyons quelques exemples.

– Prenons $n = 2$. Alors $(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos(2\theta) + i \sin(2\theta)$. En développant le terme de gauche et en identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient les formules bien connues :

$$\cos(2\theta) = (\cos \theta)^2 - (\sin \theta)^2 \quad \text{et} \quad \sin(2\theta) = 2 \cos \theta \sin \theta.$$

– Prenons $n = 3$. Alors $(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos(3\theta) + i \sin(3\theta)$. De même, en développant le terme de gauche et en identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient les formules bien connues :

$$\cos(3\theta) = 4(\cos \theta)^3 - 3 \cos \theta \quad \text{et} \quad \sin(3\theta) = 3 \sin \theta - 4(\sin \theta)^3.$$

– En prenant $n = 4$, on obtient :

$$\cos(4\theta) = (\cos \theta)^4 - 6(\cos \theta)^2(\sin \theta)^2 + (\sin \theta)^4$$

et

$$\sin(4\theta) = 4((\cos \theta)^3 \sin \theta - \cos \theta (\sin \theta)^3).$$

Ces méthodes sont aussi efficaces pour “linéariser” certaines expressions sous forme de puissances de $\cos \theta$ et $\sin \theta$; cela permet de faciliter la recherche de primitives et par suite le calcul d’un certain type d’intégrales. Sans trop insister là-dessus, nous donnons juste le cas de :

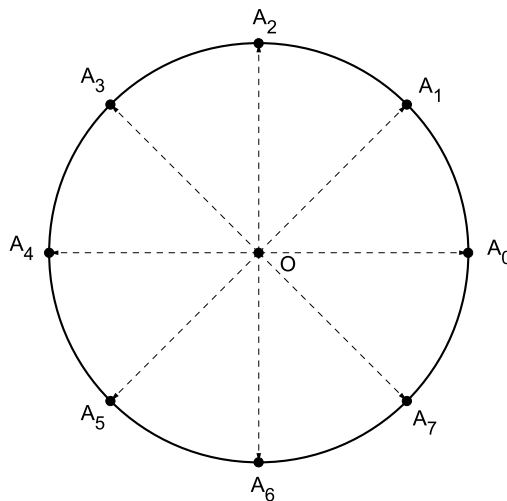
$$(\cos \theta)^2 = \frac{\cos(2\theta) + 1}{2} \quad \text{et} \quad (\sin \theta)^3 = \frac{3 \sin \theta - \sin(3\theta)}{4}$$

dont les primitives respectives sont :

$$\frac{\sin(2\theta) + 2\theta}{4} + \text{constante} \quad \text{et} \quad \frac{\cos(3\theta) - 9 \cos \theta}{12} + \text{constante.}$$

• Une application qui donne une remarque en géométrie. Soit $w = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ la “première” racine $n^{\text{ème}}$ de 1. Comme $(1 + w + w^2 + \dots + w^{n-1})(w - 1) = w^n - 1 = 0$ et que $w \neq 1$, on a $1 + w + \dots + w^{n-1} = 0$ qui se traduit géométriquement par (*cf.* dessin ci-dessous pour $n = 8$) :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{OA_k} = \vec{0}.$$



Cette relation en elle-même n’est pas étonnante : elle dit simplement que le point O est l’isobarycentre des sommets du polygone régulier $A_0A_1 \dots A_{n-2}A_{n-1}$ comme on pouvait s’y attendre. Si on prend par exemple $w = j$ (racine cubique de l’unité), la relation $1 + j + j^2 = 0$ est d’une grande utilité (voir exercice 5).

EXERCICES RÉSOLUS

Exercice 1

Résoudre l'équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$ où $a \neq 0$, b et c sont des nombres complexes.

Solution

On met le polynôme $P(z) = az^2 + bz + c$ sous sa forme canonique $a \left\{ \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right\}$. On voit apparaître l'expression $\Delta = b^2 - 4ac$ qu'on appelle *discriminant* du polynôme P . Il existe alors un nombre complexe δ tel que $\delta^2 = \Delta$ (il y en a un autre qui est $-\delta$). D'où la forme factorisée :

$$P(z) = a \left\{ \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a} \right)^2 \right\} = a \left(z + \frac{b + \delta}{2a} \right) \left(z + \frac{b - \delta}{2a} \right).$$

Ce qui nous donne les deux solutions $z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$. Reste évidemment le calcul de δ qui n'est pas si immédiat que cela. Il y a deux façons de le faire.

• Si Δ se présente sous la forme $re^{i\theta}$ de façon explicite (on reconnaît bien r et θ), alors on a bien entendu $\delta = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$.

• Sinon, on procède de façon artisanale. On pose $\delta = x + iy$ et on cherche x et y de telle sorte que $(x + iy)^2 = \alpha + i\beta$ où $\Delta = \alpha + i\beta$. Ce qui nous donne le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \alpha \\ 2xy = \beta \end{cases}$$

dont des solutions sont $x = \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha}{2}}$ et $y = \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}{2}}$. (On pourrait aussi prendre $x = -\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha}{2}}$ et $y = -\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}{2}}$ mais cela ne change pas les solutions de l'équation du second degré de départ.)

Exercice 2

Résoudre l'équation $z^6 + z^3 - 2 = 0$.

Solution

On pose $u = z^3$ et on récupère alors l'équation du second degré $u^2 + u - 2 = 0$. Celle-ci a comme racines évidentes $u_1 = 1$ et $u_2 = -2$. L'équation de départ $z^6 + z^3 - 2 = 0$ a donc pour solutions $z_1 = 1$, $z_2 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, $z_3 = e^{\frac{-2i\pi}{3}}$, $z_4 = -2^{\frac{1}{3}}$, $z_5 = 2^{\frac{1}{3}}e^{\frac{i\pi}{3}}$, $z_6 = 2^{\frac{1}{3}}e^{\frac{-i\pi}{3}}$.

Exercice 3

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une expression plus simple de :

$$A = \sum_{k=0}^n a^k \cos(k\theta).$$

Expliciter le cas particulier où $a = 1$.

Solution

Comme $e^{ik\theta} = \cos(k\theta) + i \sin(k\theta)$ (formule de Moivre), la somme $A = \sum_{k=0}^n a^k \cos(k\theta)$ est la partie réelle de $\sum_{k=0}^n a^k e^{ik\theta}$ qui elle vaut $\frac{1-a^{n+1}e^{i(n+1)\theta}}{1-ae^{i\theta}}$. Pour le calcul effectif, on multiplie le numérateur et le dénominateur par l'expression $1 - ae^{-i\theta}$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a^k e^{ik\theta} &= \frac{(1 - a^{n+1}e^{i(n+1)\theta})(1 - ae^{-i\theta})}{(1 - ae^{i\theta})(1 - ae^{-i\theta})} \\ &= \frac{1 - ae^{-i\theta} - a^{n+1}e^{i(n+1)\theta} + a^{n+2}e^{in\theta}}{1 - 2a \cos \theta + a^2} \\ &= \frac{1 - a \cos \theta - a^{n+1} \cos(n+1)\theta + a^{n+2} \cos n\theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} + iB \end{aligned}$$

où B est la partie imaginaire de l'expression $\sum_{k=0}^n a^k e^{ik\theta}$. Finalement :

$$A = \frac{1 - a \cos \theta - a^{n+1} \cos(n+1)\theta + a^{n+2} \cos n\theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2}.$$

Si on fait $a = 1$ dans cette expression, on a :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1 - \cos \theta - \{\cos(n+1)\theta - \cos n\theta\}}{2(1 - \cos \theta)} \\ &= \frac{2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2 \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) \theta \sin \frac{\theta}{2}}{4 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{\sin \frac{\theta}{2} + \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) \theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2} \cos \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}. \end{aligned}$$

Exercice 4

Soient A , M et P trois points du plan complexe \mathbb{C} ayant respectivement pour affixes 1, $z \neq 1$ et z^2 . Pour quelles valeurs de z , le triangle AMP est-il rectangle et isocèle en A ?

Solution

Dire que le triangle AMP est rectangle et isocèle en A , c'est dire que l'angle géométrique \widehat{MAP} est droit et que les côtés AM et AP sont égaux. Cela se traduit comme suit :

$$\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AP}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AP}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{AP}\|.$$

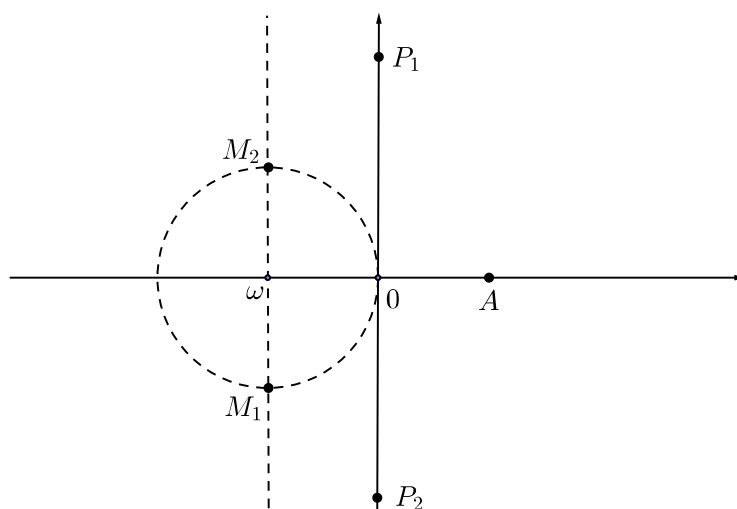
En termes d'affixes :

$$\left\{ \operatorname{Arg} \left(\frac{z^2 - 1}{z - 1} \right) = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \operatorname{Arg} \left(\frac{z^2 - 1}{z - 1} \right) = -\frac{\pi}{2} \right\} \text{ et } |z^2 - 1| = |z - 1|.$$

Ou encore :

$$\left\{ \operatorname{Arg}(z + 1) = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \operatorname{Arg}(z + 1) = -\frac{\pi}{2} \right\} \text{ et } |z + 1| = 1.$$

Ceci nous dit que M doit se trouver sur la droite d'équation $x = -1$ et sur le cercle de centre le point ω d'affixe -1 et de rayon 1 (voir le dessin ci-dessous). Il y a donc deux solutions : le point M_1 d'affixe $z_1 = -1 - i$ et le point M_2 d'affixe $z_2 = -1 + i$; les points P_1 et P_2 qui leur sont associés ont respectivement pour affixes $z_1^2 = 2i$ et $z_2^2 = -2i$.



Exercice 5

Soient a , b et c trois nombres complexes. Montrer que le triangle abc est équilatéral si, et seulement si, a , b et c vérifient $a + jb + j^2c = 0$ ou $a + j^2b + jc = 0$.

Solution

Remarquons tout d'abord que, pour toute similitude σ (qui s'écrit $\sigma(z) = \alpha z + \beta$ si elle est directe et $\sigma(z) = \alpha \bar{z} + \beta$ sinon), le triangle abc est équilatéral si, et seulement si, $\sigma(a)\sigma(b)\sigma(c)$ l'est. D'autre part, comme $1 + j + j^2 = 0$, un calcul simple montre :

$$a + jb + j^2c = 0 \iff \sigma(a) + j\sigma(b) + j^2\sigma(c) = 0 \quad \text{si } \sigma \text{ est directe}$$

et

$$a + jb + j^2c = 0 \iff \sigma(a) + j^2\sigma(b) + j\sigma(c) = 0 \quad \text{si } \sigma \text{ est indirecte.}$$

– Si $a = b = c$, les relations $a + jb + j^2c = 0$ et $a + j^2b + jc = 0$ sont évidentes puisque $1 + j + j^2 = 0$. Réciproquement, si on a à la fois $a + jb + j^2c = 0$ et $a + j^2b + jc = 0$, un calcul simple amène alors à $a = b = c$ et le triangle abc est donc trivialement équilatéral.

– Désormais, abc sera non réduit à un point.

• Supposons abc équilatéral et notons ω le centre de son cercle circonscrit. Alors la similitude $\sigma(z) = \frac{z-\omega}{a-\omega}$ envoie a sur $a' = 1$ et b et c respectivement sur $b' = j$ et $c' = j^2$ ou $b' = j^2$ et $c' = j$ (car le triangle $a'b'c'$ doit être équilatéral).

Si $b' = j$ et $c' = j^2$, on a :

$$a' + jb' + j^2c' = 1 + j^2 + j = 0$$

et donc $a + jb + j^2c = 0$; si $b' = j^2$ et $c' = j$, on a :

$$a' + j^2b' + jc' = 1 + j + j^2 = 0$$

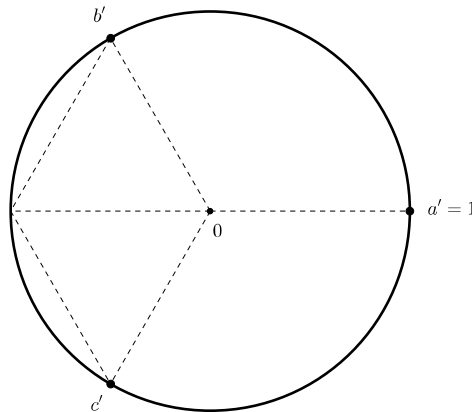
et donc $a + j^2b + jc = 0$. Ceci démontre l'implication directe.

• On suppose $a + jb + j^2c = 0$ et $a + j^2b + jc \neq 0$. (Le problème se traite de la même façon en partant de l'hypothèse $a + j^2b + jc = 0$ et $a + jb + j^2c \neq 0$. Le cas $a + jb + j^2c = 0$ et $a + j^2b + jc = 0$ a déjà été considéré.) Il est alors clair que $b \neq c$. Et tout cela interdit à a d'être le milieu $\frac{b+c}{2}$ de b et c car sinon les deux égalités $a = -(jb + j^2c)$ et $2a = b + c$ entraîneraient $b = c$, ce qui n'est pas le cas comme on vient de le voir. On en déduit que le centre ω du cercle circonscrit à abc est distinct de a .

On va montrer que le triangle abc est équilatéral. À cet effet on utilise la similitude $\sigma(z) = \frac{z-\omega}{a-\omega}$; elle envoie a sur $a' = 1$ et b et c respectivement sur b' et c' , tous les deux sur le cercle unité. On aura alors $1 + jb' + j^2c' = 0$. Un examen attentif du dessin ci-dessous montre que cette dernière relation n'a lieu que si :

$$b' = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = j \quad \text{et} \quad c' = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = j^2$$

i.e. le triangle $a'b'c'$ est équilatéral, donc abc l'est aussi. ◇



Certes, on peut se passer de l'utilisation des similitudes et faire le calcul directement, mais on perd la géométrie (qu'on vient de voir) liée à la régularité de la répartition des nombres $1, j$ et j^2 sur le cercle unité.

CHAPITRE I

SÉRIES ENTIÈRES

1. Rappels sur les séries numériques

On se donne une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = x_0 + \cdots + x_n$; on obtient ainsi une nouvelle suite (S_n) . Si (S_n) converge, on dit que la *série de terme général* x_n converge ; la limite S de (S_n) est la *somme* de la série (les quantités S_n sont appelées *sommes partielles*) ; on écrit $S = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Sinon, on dira que la série est *divergente*. Dorénavant la notation (x_n) désignera indifféremment la suite x_n ou la série qu'elle définit. Étudier la nature d'une série, c'est étudier sa convergence ou sa divergence.

On dira qu'une série (x_n) est *absolument convergente* si la série réelle à termes positifs $(|x_n|)$ est convergente. Toute série absolument convergente est convergente ; dans ce cas, on a :

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|.$$

La réciproque de cette implication est en général fautive (cf. Exercice 7).

Y a-t-il des critères qui permettent de décider de la convergence d'une série ? Oui, bien sûr ! D'abord, comme étudier une série revient en fait à étudier une suite, il y a le :

1.1. Critère de Cauchy. Il est lié à la complétude du corps \mathbb{C} des nombres complexes et illustré par l'équivalence des assertions qui suivent :

- i) la série de terme général x_n converge ;
- ii) la suite $S_n = x_0 + \cdots + x_n$ converge (par définition) ;
- iii) la suite (S_n) est de Cauchy *i.e.* pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ on ait : $n > m \geq N \implies |S_n - S_m| = |x_{m+1} + \cdots + x_n| < \varepsilon$.

Lorsque tous les termes x_n sont des réels positifs, on dispose de pas mal de critères de convergence. Donnons-en quelques-uns. (Comme les termes nuls ne modifient en rien la nature de la série, on supposera que tous les x_n sont strictement positifs.)

1.2. Sommes partielles bornées. Supposons que les sommes partielles $S_n = x_0 + \cdots + x_n$ soient bornées par une constante $M > 0$ indépendante de n . Alors la suite (S_n) est croissante majorée par M , donc convergente *i.e.* la série (x_n) est convergente.

1.3. Critère de comparaison. On considère deux séries (x_n) et (y_n) . On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $x_n \leq y_n$. Si la série (y_n) converge, il en est de même pour la série (x_n) ; si la série (x_n) diverge, il en est de même pour la série (y_n) . Pour montrer la convergence (resp. la divergence) d'une série à termes positifs, il suffit donc de la majorer (resp. la minorer) par une série qui converge (resp. qui diverge).

1.4. Règle de d'Alembert. On suppose que la suite $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ converge vers une limite ℓ . Si $\ell < 1$, la série converge ; si $\ell > 1$, la série diverge. On ne peut rien dire en général lorsque $\ell = 1$. Mais il est possible que cette limite n'existe pas ; dans ce cas on peut utiliser uniquement le rapport $\frac{x_{n+1}}{x_n}$:

- S'il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \alpha$ pour n suffisamment grand, la série converge.
- Si $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$ pour n suffisamment grand, la série diverge.

1.5. Règle de Cauchy. On suppose que la suite $(x_n)^{\frac{1}{n}}$ converge vers une limite ℓ . Si $\ell < 1$, la série (x_n) converge ; si $\ell > 1$, elle diverge. On ne peut rien dire en général lorsque $\ell = 1$. Comme précédemment, il est possible que cette limite n'existe pas ; dans ce cas on peut utiliser uniquement la suite $(x_n)^{\frac{1}{n}}$:

- S'il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que $(x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \alpha$ pour n suffisamment grand, la série converge.
- Si $(x_n)^{\frac{1}{n}} \geq 1$ pour n suffisamment grand, la série diverge.

Utiliser ce critère pour étudier la convergence ou la divergence de la série de terme général $x_n = \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{-n^2}$.

1.6. Comparaison à une intégrale. Petit rappel d'abord. Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction, continue (pour simplifier). Pour tout $t \in [1, +\infty[$, on pose $F(t) = \int_1^t f(\theta) d\theta$. La fonction $F : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ ainsi définie est croissante. Si la limite de F existe lorsque t tend vers $+\infty$, on dit que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ est *convergente*.

Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue et décroissante. Alors la série de terme général $x_n = f(n)$ ($n \geq 1$) est convergente si, et seulement si, l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ est convergente.

1.7. Opérations sur les séries

On se donne deux séries (x_n) et (y_n) de nombres complexes. On définit la *somme* des deux comme étant $(x_n + y_n)$ et leur *produit* sera la série de terme général :

$$w_n = \sum_{k=0}^n x_k y_{n-k}.$$

Alors :

- i) si (x_n) et (y_n) sont convergentes, $(x_n + y_n)$ est aussi convergente et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

- ii) si (x_n) et (y_n) sont absolument convergentes, (w_n) est aussi absolument convergente et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n \right).$$

1.8. Quelques exercices

1. Soit a un nombre réel non nul. Étudier, en fonction de a , la nature de la série de terme général $x_n = a^n$ dite *série géométrique de raison a* .

2. Montrer que la série de terme général $x_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$ (dite *série harmonique*) est divergente. (On utilisera le critère de Cauchy.)

3. Soit α un nombre réel strictement positif. On appelle *série de Riemann* la série numérique de terme général $x_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Étudier, en fonction de α , la nature de cette série. (On utilisera le critère de comparaison à une intégrale convenable.)

4. Soient (x_n) et (y_n) deux séries à termes strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $z_n = \sqrt{x_n y_n}$. Montrer que si (x_n) et (y_n) sont convergentes, il en est de même pour la série (z_n) .

5. Étudier la nature des séries dont les termes généraux respectifs sont les suivants (pour $n \geq 1$) :

$$x_n = (-1)^n, \quad y_n = \frac{\sin^2 n}{n^2}, \quad z_n = \frac{1}{n^2 - n + 1} \quad \text{et} \quad t_n = \sqrt{\frac{n^2 + 1}{n^5 - 1}}.$$

6. Montrer que les séries numériques :

$$x_n = \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{et} \quad y_n = \frac{2}{(n-1)n(n+1)}$$

sont convergentes et calculer leurs sommes respectives.

Séries réelles alternées

On dira qu'une série réelle (x_n) est *alternée* si elle s'écrit $x_n = (-1)^n u_n$ où $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit (x_n) une telle série. Supposons que la suite u_n tend en décroissant vers 0 ; alors la série (x_n) converge.

7. Soit (x_n) la série de terme général $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

- Dire pourquoi cette série est convergente mais non absolument convergente.
- Appliquer convenablement la formule de Mac-Laurin à la fonction $f(x) = \text{Log}(1+x)$ pour calculer la somme de cette série.
- On considère maintenant la série de terme général $y_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(2n+1)} - \frac{1}{2(2n+2)}$. Montrer qu'elle converge et calculer sa limite. Conclusion ?

8. On considère les séries $x_n = \frac{1}{n}$ et $y_n = \frac{1}{n^2}$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_{n+1}}{y_n}$.

Que peut-on conclure ?

9. Soit (x_n) une suite à termes strictement positifs. On suppose que pour un réel $p \geq 1$, la série (x_n^p) converge. Montrer que, pour tout réel q tel que $q \geq p$, la série (x_n^q) converge.

2. Séries entières

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres complexes. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $N \in \mathbb{N}$, on pose :

$$(I.1) \quad S_N(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n$$

On définit ainsi une fonction $S_N : z \in \mathbb{C} \mapsto S_N(z) \in \mathbb{C}$. On se pose une question toute naturelle : *pour quelles valeurs de z la limite (quand N tend vers $+\infty$) de la quantité $S_N(z)$ existe-t-elle ?* La proposition qui suit est facile à démontrer :

2.1. Proposition. *S'il existe $r \in]0, +\infty[$ tel que la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ converge, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge uniformément sur le disque fermé $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \rho\}$ pour tout $\rho < r$.*

Si tel est le cas, on a donc une fonction f bien définie sur le disque $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ par $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

On appelle **rayon de convergence** de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ le plus grand nombre réel positif R (fini ou égal à $+\infty$) tel que la série converge pour $|z| < R$. Ce nombre peut être nul, strictement positif ou égal à $+\infty$ comme on le verra sur les exemples qui vont suivre.

On suppose les coefficients a_n tous non nuls. Le rayon de convergence R de la série est alors donnée par l'une des formules qui suivent.

$$(I.2) \quad \frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \quad (\text{Formule de Hadamard})$$

$$(I.3) \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \quad (\text{Formule de d'Alembert})$$

Le lemme qui suit est très utile dans l'étude de la convergence des séries entières.

2.2. Lemme d'Abel. *Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n$ une série où les a_n sont réels positifs et les x_n des nombres complexes. On suppose :*

- i) *que la suite (a_n) est décroissante et tend vers 0 ;*
- ii) *qu'il existe une constante $M > 0$ telle que $|\sum_{k=0}^n x_k| \leq M$ pour tout $n \geq 0$.*

Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n$ converge.

Il permet, entre autres, d'établir la proposition qui suit.

2.3. Proposition. *Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R .*

- i) *pour tout $r < R$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge uniformément sur le disque fermé $\overline{D}(0, r)$.*
- ii) *pour tout $r > R$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ diverge.*

*On dira que $D(0, R)$ est le **disque de convergence** de la série.*

Tout peut se produire sur le cercle $|z| = R$. On donnera des exemples sur lesquels on peut voir différentes situations.

2.4. Exemples

- La série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence $R = +\infty$. La série $\sum_{n=0}^{\infty} (n!) z^n$ a un rayon de convergence $R = 0$: elle ne converge que pour $z_0 = 0$.

- Les séries $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ ont un rayon de convergence $R = 1$. La différence est notable au niveau de la convergence sur le cercle unité $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$:

la première y diverge, la deuxième y converge sauf en $z = 1$ et la troisième y converge en tout point ! (Le lecteur est prié de justifier toutes ces affirmations.)

2.5. Exercice

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière réelle d'intervalle de convergence $] -R, R[$ avec $R > 0$. Montrer que, pour $s \in \mathbb{N}^*$, la série *dérivée* $s^{\text{ème}}$ de f :

$$f^{(s)}(x) = \sum_{n=s}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-s+1) a_n x^{n-s}$$

a aussi pour intervalle de convergence $] -R, R[$.

2.6. Rayon de convergence d'une somme et d'un produit

Une série entière s'écrit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$; elle est donc donnée par la suite (a_n) de nombres complexes (a_n) . On en parlera toujours en se référant à cette suite.

Soient (a_n) et (b_n) deux séries entières. Leur somme est la série entière de coefficient général $(a_n + b_n)$ et leur produit (de Cauchy) a pour coefficient général :

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Notons R_1 et R_2 les rayons de convergence respectivement de (a_n) et (b_n) .

- Supposons $R_1 \neq R_2$. On vérifie facilement (on laisse ça au lecteur) que la série somme $(a_n + b_n)$ a pour rayon de convergence $R = \min(R_1, R_2)$.

- Si $R_1 = R_2$ le rayon de convergence R de la somme est $R \geq R_1$. Il peut être égal à $R_1 = R_2$. Mais il peut être aussi strictement plus grand ; par exemple si (a_n) a pour rayon $R_1 \in]0, +\infty[$ et si on prend $b_n = -a_n$, la série $(a_n + b_n)$ (dont tous les termes sont nuls) a évidemment $R = +\infty$ pour rayon de convergence.

- La série produit (c_n) a un rayon de convergence R qui est plus grand ou égal à $\min(R_1, R_2)$. Il peut être strictement plus grand comme le montre l'exemple $a_n = 1$ pour tout n et pour (b_n) on prend $b_0 = 1, b_1 = -1$ et $b_n = 0$ pour $n \geq 2$. On voit tout de suite que (a_n) a $R_1 = 1$ pour rayon de convergence, (b_n) a $R_2 = +\infty$ pour rayon de convergence. D'autre part, un calcul immédiat donne $c_0 = 1$ et $c_n = 0$ pour $n \geq 1$. Donc la série (c_n) a pour rayon de convergence $R = +\infty$.

3. Exponentielle et logarithme complexes

Nous avons vu que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence $R = +\infty$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ la quantité $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ existe donc ; elle sera notée e^z . On a alors une fonction bien définie $z \in \mathbb{C} \mapsto e^z \in \mathbb{C}$ appelée *exponentielle complexe*. Comme la série converge uniformément sur tout disque fermé $\overline{D}(0, r)$, cette fonction est continue. En fait on a plus :

3.1. Proposition. *La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes.*

i) Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$ on a $e^{z+z'} = e^z \cdot e^{z'}$.

- ii) L'exponentielle est un morphisme du groupe additif $(\mathbb{C}, +)$ dans le groupe multiplicatif (\mathbb{C}^*, \times) .

Démonstration. i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$w_n = \sum_{k=0}^n \frac{z^k z'^{n-k}}{k!(n-k)!}.$$

Un calcul utilisant la formule du binôme de Newton montre que $w_n = \frac{(z+z')^n}{n!}$. D'après 1.7.ii) la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+z')^n}{n!}$ converge et on a :

$$e^{z+z'} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+z')^n}{n!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right) \cdot \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{z'^{\ell}}{\ell!} \right) = e^z \cdot e^{z'}.$$

ii) Comme $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, on a $e^0 = 1$. Soit $z \in \mathbb{C}$; alors $e^{z+(-z)} = e^z \cdot e^{-z} = 1$ et donc $e^z \in \mathbb{C}^*$. Le fait que l'exponentielle soit un morphisme de $(\mathbb{C}, +)$ dans (\mathbb{C}^*, \times) est donné par le point i). Nous verrons par la suite qu'il est surjectif mais non injectif (et on déterminera son noyau). \diamond

De cette proposition il découle que $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$. On connaît assez bien l'exponentielle e^x (x est réel). Décortiquons e^{iy} . On a :

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \left(\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{y^{2p}}{(2p)!} \right) + i \left(\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{y^{2p+1}}{(2p+1)!} \right) = \cos y + i \sin y.$$

D'où $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$; par suite le module de e^z est e^x et son argument $\text{Arg}(z)$ est y (modulo 2π).

3.2. Autres fonctions

L'exponentielle complexe permet de définir d'autres fonctions généralisant celles que l'on connaît habituellement dans le domaine réel.

- Fonctions trigonométriques circulaires. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on pose :

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Mais aussi :

$$\text{tg}(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)} \quad \text{pour } z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{2k+1}{2}\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

et :

$$\text{cotg}(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)} \quad \text{pour } z \in \mathbb{C} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

- Fonctions trigonométriques hyperboliques. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on pose :

$$\text{ch}(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \text{et} \quad \text{sh}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Mais aussi :

$$\operatorname{th}(z) = \frac{\operatorname{sh}(z)}{\operatorname{ch}(z)} \text{ pour } z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{2k+1}{2}i\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

et :

$$\operatorname{coth}(z) = \frac{\operatorname{ch}(z)}{\operatorname{sh}(z)} \text{ pour } z \in \mathbb{C} \setminus \{ki\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Les quatre fonctions \cos , \sin , ch et sh ont comme développement en série entière :

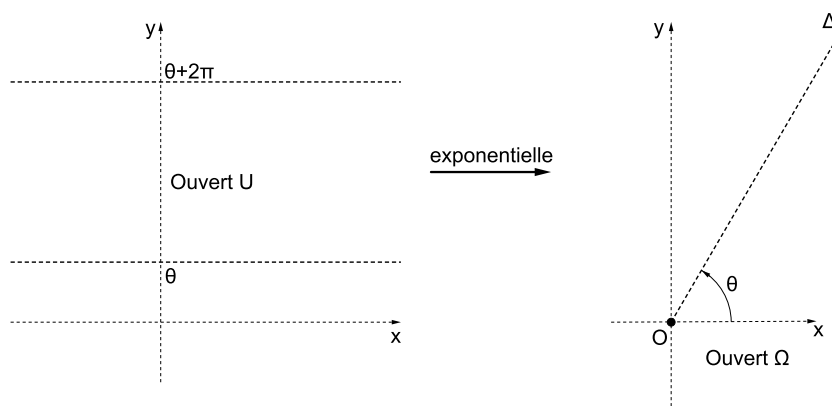
$$\begin{aligned} \cos(z) &= \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{z^{2p}}{(2p)!} & \sin(z) &= \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{z^{2p+1}}{(2p+1)!} \\ \operatorname{ch}(z) &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{z^{2p}}{(2p)!} & \operatorname{sh}(z) &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{z^{2p+1}}{(2p+1)!} \end{aligned}$$

chacune d'elles ayant un rayon de convergence infini.

3.3. Logarithme complexe

Dans le cas réel la fonction exponentielle $x \in \mathbb{R} \mapsto e^x \in \mathbb{R}$ réalise une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R}_+^* . En fait, c'est un isomorphisme du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ sur le groupe multiplicatif (\mathbb{R}_+^*, \times) . La fonction réciproque est bien connue : c'est le logarithme $t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \ln(t) \in \mathbb{R}$. La situation est différente pour le cas complexe : certes l'exponentielle $z \in \mathbb{C} \mapsto e^z \in \mathbb{C}^*$ est surjective mais elle n'est pas injective, ce qui pose un problème pour définir sa "fonction réciproque". Il y en aura beaucoup ; on dira alors que c'est une fonction *multiforme*. Pour en avoir une il faut se restreindre à des ouverts du plan complexe \mathbb{C} .

Pour tout $z = x + iy$ on a bien sûr $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$. Cette fonction envoie la droite d'équation $y = \theta$ ($\theta \in \mathbb{R}$) sur la demi-droite Δ privée de l'origine faisant un angle θ (modulo 2π) avec l'axe Ox (cf. le dessin qui suit). On voit alors que f réalise une bijection de l'ouvert $U = \mathbb{R} \times]\theta, \theta + 2\pi[$ sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{C} \setminus \Delta$.



Une *détermination* de la fonction logarithme complexe devrait être bien sûr de la forme $g(w) = \ln|w| + i\operatorname{Arg}(w)$ pour qu'elle vérifie $e^{g(w)} = w$. La *détermination principale* est donnée lorsqu'on prend $\theta = -\pi$: $g_0(w) = \ln|w| + i\operatorname{Arg}(w)$ sur l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \{y = 0 \text{ et } x \leq 0\}$. Toute autre détermination est de la forme $g_k = g_0 + 2ik\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

4. Fonctions analytiques

4.1. Variable réelle

• Soient I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On dira que f est *analytique réelle* si tout point $x_0 \in I$ possède un voisinage ouvert $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset I$ sur lequel la fonction f s'écrit sous forme d'une série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ où (a_n) est une suite de nombres complexes. Pour $0 < \eta < \varepsilon$, la série converge uniformément sur $[x_0 - \eta, x_0 + \eta]$ et donc f est continue. Plus même : d'après l'exercice 2.5, pour tout $s \in \mathbb{N}^*$ la série $s^{\text{ème}}$ dérivée $f^{(s)}(x) = \sum_{n=s}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-s+1)a_n x^{n-s}$ converge uniformément sur $[x_0 - \eta, x_0 + \eta]$. La fonction f est donc de classe C^∞ .

Par exemple, parmi les fonctions usuelles, toutes celles qui suivent sont analytiques là où elles sont définies :

Une fonction polynôme	$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$
Une fonction rationnelle	$\frac{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m}$
ln(x)	e^x
ch(x)	sh(x)
	cos(x) sin(x).

Une fonction de classe C^∞ n'est pas forcément analytique. L'exemple le plus simple et le plus connu est celui de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0. \end{cases}$$

(La démonstration est laissée en exercice au lecteur.)

• Soient maintenant U un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On dira que f est *analytique* si, pour tout point $z_0 = (x_0, y_0)$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que sur le disque ouvert $D(z_0, \varepsilon)$, f admet un développement en série entière :

$$f(x, y) = \sum_{n,m=0}^{\infty} a_{nm}(x - x_0)^n(y - y_0)^m$$

où les a_{nm} sont des constantes complexes. Comme dans le cas d'une variable, la série converge uniformément sur tout compact du disque $D(z_0, \varepsilon)$ ainsi que toutes les dérivées partielles. La fonction est donc de classe C^∞ .

4.2. Variable complexe

• Soient U un ouvert de \mathbb{C} et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On dira que f est *analytique* si, pour tout $z_0 \in U$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que, sur le disque ouvert $D(z_0, \varepsilon)$, f s'écrit sous forme d'une série entière :

$$(I.4) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

où les a_n sont des constantes complexes.

Par exemple, comme dans le cas d'une variable réelle, les fonctions qui suivent sont analytiques là où elles sont définies :

$$\begin{array}{ll} \text{Une fonction polynôme} & P(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n \\ \text{Une fonction rationnelle} & \frac{a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n}{b_0 + b_1z + \cdots + b_mz^m} \\ \ln(z) & e^z & \text{ch}(z) & \text{sh}(z) & \cos(z) & \sin(z). \end{array}$$

Il existe des fonctions usuelles qui ne sont pas analytiques : par exemple la fonction $z \in \mathbb{C} \mapsto \bar{z} \in \mathbb{C}$. Mais elle est analytique en tant que fonction des deux variables x et y puisque $\bar{z} = x - iy$. L'analyticité réelle d'une fonction d'une variable complexe n'implique donc pas l'analyticité de celle-ci.

• On vérifie aisément que la somme $f + g$, le produit fg , le quotient $\frac{f}{g}$ (là où il est défini) de deux fonctions analytiques f et g sont des fonctions analytiques. Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ et $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ sont des fonctions analytiques avec $f(U) \subset V$ la composée $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction analytique.

4.3. Unicité du développement. *Supposons que deux séries entières $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$ convergent sur un disque $D(z_0, R)$ coïncident sur une suite $(z_k)_{k \geq 1}$ (dans ce disque) s'accumulant sur z_0 . Alors $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. On a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$(I.5) \quad a_0 + a_1(z_k - z_0) + a_2(z_k - z_0)^2 + \cdots = b_0 + b_1(z_k - z_0) + b_2(z_k - z_0)^2 + \cdots$$

Soit r tel que $0 < r < R$. Comme les deux sommes sont continues sur le disque fermé de centre z_0 et de rayon r , on a :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (a_0 + a_1(z_k - z_0) + a_2(z_k - z_0)^2 + \cdots) = \lim_{k \rightarrow \infty} (b_0 + b_1(z_k - z_0) + b_2(z_k - z_0)^2 + \cdots)$$

et donc $a_0 = b_0$. L'expression (I.5) devient alors :

$$a_1(z_k - z_0) + a_2(z_k - z_0)^2 + \cdots = b_1(z_k - z_0) + b_2(z_k - z_0)^2 + \cdots$$

On divise les deux membres par $z_k - z_0$ et on refait le même raisonnement ; on obtient alors $a_1 = b_1$. De cette façon on montre que $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. \diamond

Ceci va nous permettre d'établir le théorème qui suit qui donne une propriété remarquable des fonctions analytiques.

4.4. Principe du prolongement analytique. *Soient f et g deux fonctions analytiques définies sur un ouvert U connexe de \mathbb{C} . Supposons que f et g coïncident sur les points d'une suite (z_k) s'accumulant sur un point $z_0 \in U$. Alors f et g sont égales.*

Démonstration. Soient $z \in U$ différent de z_0 et γ un chemin $[0, 1] \rightarrow U$ d'origine z_0 et d'extrémité z (il existe car U étant un ouvert connexe de \mathbb{C} il est aussi connexe par arcs).

Comme $\gamma([0, 1]) = C$ (image de la courbe dans \mathbb{C}) est un compact, il existe $r > 0$ et un nombre fini de disques ouverts D_0, D_1, \dots, D_ℓ tous de rayon r , centrés respectivement en des points $z_0 = a_0, a_1, \dots, a_\ell = z$ et tels que :

- $C \subset D_0 \cup D_1 \cup \dots \cup D_\ell$;
- le disque D_j contient le point z_{j+1} (centre du disque D_{j+1}) ;
- les fonctions f et g admettent sur chacun des D_j un développement en série (uniformément convergent).

Comme les fonctions f et g sont égales sur l'ensemble $D_0 \cap \{z_j : j \in \mathbb{N}^*\}$, d'après le théorème 4.3 qui précède, elles sont égales sur D_0 . Mais D_0 contient le point a_1 qui est un point d'accumulation d'une suite dans D_1 sur laquelle les fonctions f et g vont coïncider. Le même raisonnement montre alors que f et g vont aussi coïncider sur D_1 . En poursuivant la même démarche on montre ainsi que f et g sont égales sur la réunion $D_0 \cup D_1 \cup \dots \cup D_n$ et par suite $f(z) = g(z)$. Comme aucune hypothèse particulière n'a été faite sur le point z , les fonctions f et g sont donc égales sur U . \diamond

4.5. Zéros d'une fonction analytique

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique sur un ouvert U de \mathbb{C} . On appelle *zéro* de f tout point $z \in U$ tel que $f(z) = 0$.

Supposons que f n'est pas identiquement nulle sur U connexe. Alors l'ensemble $Z(f)$ des zéros de f est un ensemble discret de U .

Démonstration. Comme f est continue, $Z(f)$ est une partie fermée de U . Montrons que chacun de ses points est isolé. Soit $z_0 \in Z(f)$; alors f se développe sur un voisinage de ce point en série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. Comme elle n'est pas identiquement nulle sur ce voisinage (sinon elle serait nulle partout en vertu du théorème 4.4) l'un au moins des coefficients a_n est non nul ; soit p le plus petit des entiers n tel que $a_n \neq 0$. Alors on peut écrire $f(z) = (z - z_0)^p Q(z)$ où $Q(z) = (a_p + a_{p+1}(z - z_0) + a_{p+2}(z - z_0)^2 + \dots)$. La fonction $Q(z)$ étant analytique en z_0 elle y est a fortiori continue et donc non nulle sur un voisinage de z_0 . Par conséquent le seul point en lequel f est nulle sur ce voisinage est le point z_0 ; ce qui montre que z_0 est isolé dans $Z(f)$. \diamond

CHAPITRE II

FONCTIONS HOLOMORPHES

1. Préliminaires et premières définitions

1.1. \mathbb{R} -linéarité et \mathbb{C} -linéarité

• On sait que le corps \mathbb{C} des nombres complexes est un espace vectoriel de dimension 1 sur lui-même ; il a pour base (entre autres) le nombre 1. Mais si on le voit comme espace vectoriel réel sa dimension est 2 ; une base en est $\{1, i\}$ qui permet d'écrire tout nombre complexe z de façon unique sous la forme qu'on connaît $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

• Une application linéaire $f : z \in \mathbb{C} \mapsto f(z) \in \mathbb{C}$ est toujours de la forme $f(z) = \alpha z$ avec $\alpha = f(1)$. Si $\alpha = a + ib$, alors $f(z) = \alpha z = (a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(bx + ay)$. Donc, si on voit f comme application du \mathbb{R} -espace \mathbb{C} dans lui-même, sa matrice par rapport à la base $\{1, i\}$ est nécessairement de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. On peut vérifier facilement qu'une application \mathbb{R} -linéaire de \mathbb{C} dans \mathbb{C} dont la matrice par rapport à cette base est de cette forme est aussi \mathbb{C} -linéaire.

Par exemple, l'application conjugaison $z \in \mathbb{C} \mapsto \bar{z} \in \mathbb{C}$ est \mathbb{R} -linéaire mais elle n'est pas \mathbb{C} -linéaire !

• Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une application \mathbb{C} -linéaire (mais qu'on voit comme \mathbb{R} -linéaire) de matrice $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$; alors on peut toujours écrire $A = \sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ où θ est un réel (donné modulo 2π). Par conséquent, du point de vue géométrique, une application \mathbb{C} -linéaire n'est rien d'autre qu'une similitude directe de centre l'origine : c'est la composée de l'homothétie de centre 0 et de rapport $\sqrt{a^2 + b^2}$ et de la rotation de centre 0 et d'angle θ .

1.2. Définition de l'holomorphie

Soient U un ouvert de \mathbb{C} et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction.

On dira que f est **holomorphe** au point $z_0 \in U$ si elle est dérivable en ce point, c'est-à-dire si la limite suivante existe :

$$(II.1) \quad \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Cette limite est notée $f'(z_0)$ et appelée **dérivée** de f au point z_0 . On dira que f est holomorphe sur U si elle est holomorphe en tout point de U .

Formellement, c'est la même définition que pour la dérivabilité d'une fonction d'une variable réelle. Mais en réalité, demander à une fonction d'être holomorphe lui impose des contraintes extrêmement fortes comme nous le verrons par la suite. Regardons d'abord quelques exemples.

- Les fonctions usuelles que nous avons déjà évoquées :

$$\begin{array}{ll} \text{Une fonction polynôme} & P(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n \\ \text{Une fonction rationnelle} & \frac{a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n}{b_0 + b_1z + \cdots + b_mz^m} \\ \ln(z) & e^x & \text{ch}(z) & \text{sh}(z) & \cos(z) & \sin(z). \end{array}$$

sont holomorphes (facile à vérifier).

- Toute fonction analytique $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe. En effet, f étant analytique, pour tout point $z_0 \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel qu'on ait :

$$(II.2) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \text{pour} \quad |z - z_0| < \varepsilon.$$

On sait alors que la série dérivée $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1}$ converge uniformément pour $|z - z_0| \leq \rho$ avec $0 < \rho < \varepsilon$; donc f est dérivable au point z_0 au sens de la définition II.1.2. *i.e.* f est holomorphe en z_0 .

- On vérifie facilement (exactement comme on le fait pour les fonctions d'une variable réelle) que la somme $f+g$, le produit fg , le quotient $\frac{f}{g}$ (là où il est défini) de deux fonctions holomorphes sont des fonctions holomorphes.

• Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ et $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ sont des fonctions holomorphes avec $f(U) \subset V$ la composée $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe et on a $(g \circ f)'(z) = f'(z)g'(f(z))$. Si $f : U \rightarrow V$ est une bijection et f est holomorphe en z_0 avec $f'(z_0) \neq 0$, alors f^{-1} est holomorphe en $w_0 = f(z_0)$ et $(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$.

- Une bijection $f : U \rightarrow V$ (U et V des ouverts de \mathbb{C}) holomorphe avec inverse f^{-1} holomorphe est appelée *biholomorphisme* de U sur V . On dira aussi que U et V sont *biholomorphiquement équivalents*.

Par exemple la fonction $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ est un biholomorphisme du demi-plan supérieur $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$ sur le disque unité $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

L'ensemble $\text{Aut}(U)$ des biholomorphismes d'un ouvert U est un groupe pour la composition des applications. Il est toujours contenu dans le groupe $\text{Diff}(U)$ des difféomorphismes de U et est beaucoup plus petit.

- **Exemple non holomorphe.** La fonction $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\phi(z) = \bar{z}$ n'est holomorphe nulle part. Vérifions-le au point $z_0 = 0$ en calculant $\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \neq 0}} \frac{\phi(z) - \phi(0)}{z} = \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \neq 0}} \frac{\bar{z}}{z}$ lorsque z tend vers 0 par valeurs réelles et lorsque z tend vers 0 par valeurs imaginaires pures. On a :

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \text{ réel} \neq 0}} \frac{\bar{z}}{z} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{x}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \text{ imaginaire} \neq 0}} \frac{\bar{z}}{z} = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y \neq 0}} \frac{-iy}{iy} = -1.$$

Les deux limites ne coïncident pas, donc ϕ n'est pas holomorphe en 0.

1.3. Conditions de Cauchy-Riemann

Soient U un ouvert de \mathbb{C} , $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et $z_0 \in U$. On sait alors que $\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe. Cela signifie que :

$$(II.3) \quad f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0) + \varepsilon(z)|z - z_0|$$

avec $\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} \varepsilon(z) = 0$. Écrivons $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $f(z) = u(z) + iv(z)$, $f'(z_0) = a + ib$, $z - z_0 = h + ik$ et $\varepsilon = \alpha + i\beta$. Alors l'expression (II.3) devient en coordonnées réelles :

$$(II.4) \quad \begin{cases} u(x_0 + h, y_0 + k) - u(x_0, y_0) = ah - bk + \alpha\sqrt{h^2 + k^2} \\ v(x_0 + h, y_0 + k) - v(x_0, y_0) = bh + ak + \beta\sqrt{h^2 + k^2} \end{cases}$$

Ceci montre que la fonction $f : (x, y) \in U \mapsto u(x, y) + iv(x, y) \in \mathbb{C}$ est différentiable au point $z_0 = (x_0, y_0)$ et de différentielle :

$$d_{z_0} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix}$$

avec :

$$(CR) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0).$$

Les relations (CR) sont appelées *conditions de Cauchy-Riemann*. Cela signifie que f est différentiable au point z_0 (au sens réel) et sa différentielle $d_{z_0} f$ (qui est une application \mathbb{R} -linéaire de \mathbb{C} dans \mathbb{C}) est en fait \mathbb{C} -linéaire.

Si on considère f comme fonction complexe des variables réelles x et y , les conditions (CR) s'écrivent aussi :

$$(II.5) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = 0.$$

Comme $z = x + iy$, on a $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$. On peut donc considérer z et \bar{z} comme des variables par rapport auxquelles on peut aussi dériver :

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Les conditions (CR) s'écrivent donc $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

On peut montrer facilement qu'une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ différentiable au point z_0 et vérifiant les conditions de Cauchy-Riemann est holomorphe en ce point. On a donc l'équivalence :

$$f : U \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorphe en } z_0 \iff f \text{ différentiable en } z_0 \text{ et vérifie (CR).}$$

1.4. Quelques conséquences de l'holomorphie

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur un domaine (ouvert connexe) U de \mathbb{C} .

- Il est clair que $f'(z) = 0$ pour tout $z \in U$ si f est constante. Réciproquement, on vérifie aisément que si $f'(z) = 0$ pour tout $z \in U$ alors f est constante.

- Si la partie réelle, la partie imaginaire, le module ou l'argument de f est constant, la fonction f est constante. Tout ceci découle du fait qu'une fonction holomorphe sur le domaine U vérifie les conditions de Cauchy-Riemann.

- Si $u = \Re f$ est constante alors $\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial u}{\partial y}(z) = 0$; donc $\frac{\partial v}{\partial y}(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) = 0$ et $\frac{\partial v}{\partial x}(z) = -\frac{\partial u}{\partial y}(z) = 0$. Par suite $d_z f = 0$ en tout point $z \in U$, donc f est constante. Le même raisonnement vaut pour la partie imaginaire de f .

- Si le module de f est constant, cela signifie que la fonction $u^2 + v^2$ est constante. Donc $u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ et $u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} = 0$. Les conditions (CR) donnent alors :

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ v \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

On regarde ces deux relations comme un système linéaire homogène dont les inconnues sont $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$. Si son déterminant $u^2 + v^2$ est nul, alors f est identiquement nulle ; sinon $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, donc u est constante et par suite f l'est aussi comme on l'a vu précédemment.

- On suppose maintenant $\text{Arg}(f) = \alpha$ constant. Alors la partie imaginaire $\Im(e^{-\alpha} f)$ de $e^{-\alpha} f$ est nulle, donc la fonction $e^{-\alpha} f$ est constante et par suite f l'est aussi. \diamond

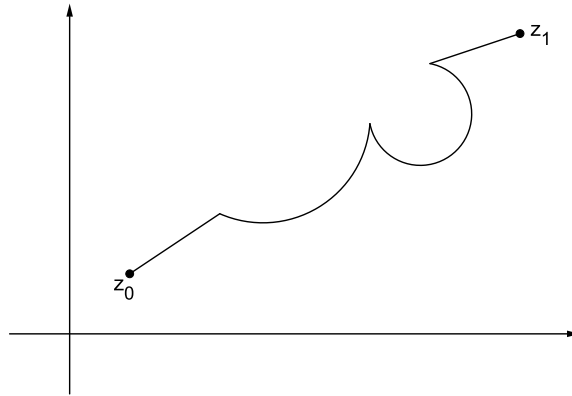
2. Intégration complexe

C'est un outil fondamental en théorie des fonctions d'une variable complexe. Nous allons définir l'intégrale sur un chemin d'une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ où U est un domaine de \mathbb{C} . On supposera f continue puisque, de toutes façons, on n'aura affaire par la suite qu'aux fonctions holomorphes.

2.1. Intégrale sur un chemin

- Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On appelle *chemin* dans U d'origine z_0 et d'extrémité z_1 toute application continue $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ telle que $\gamma(a) = z_0$ et $\gamma(b) = z_1$. Un chemin fermé est un chemin dont l'origine et l'extrémité sont confondues *i.e.* $z_0 = z_1$; on dira alors que c'est un *lacet* de base z_0 .

On dira qu'un chemin γ est C^1 par *morceaux* s'il existe une subdivision de l'intervalle $[a, b] : a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ telle que γ soit C^1 sur chacun des intervalles ouverts $]t_i, t_{i+1}[$ (avec $i = 0, \dots, n-1$) et $\gamma'(t)$ admet une limite à droite de t_i et une limite à gauche de t_{i+1} .



• Soit $\gamma : t \in [a, b] \mapsto \gamma(t) = x(t) + iy(t) \in U$ un chemin C^1 par morceaux donné comme précédemment. On définit l'intégrale de f sur γ comme l'intégrale ordinaire qui suit :

$$(II.6) \quad \int_{\gamma} f(z)dz = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\gamma(t))d\gamma(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\gamma(t)) \{x'(t) + iy'(t)\} dt.$$

• On a les propriétés qui suivent.

– L'intégrale (II.6) ne dépend pas du paramétrage du chemin γ . Vérifions-le pour γ de classe C^1 partout (le cas C^1 par morceaux se traite presque de la même manière). Soit $\tau : s \in [c, d] \mapsto t = \tau(s) \in [a, b]$ un changement de paramétrage de la courbe γ . Alors, la formule de changement de variable sur les intégrales nous donne :

$$\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_c^d f(\gamma(\tau(s))\tau'(s)\gamma'(\tau(s))ds = \int_c^d f(\gamma \circ \tau(s))(\gamma \circ \tau)'(s)ds$$

qui montre bien l'indépendance de l'intégrale $\int_{\gamma} f(z)dz$ par rapport au paramétrage du chemin γ .

– On a de façon évidente :

$$\int_{\gamma} (f(z) + g(z))dz = \int_{\gamma} f(z)dz + \int_{\gamma} g(z)dz, \quad \text{et} \quad \int_{\gamma} \lambda f(z)dz = \lambda \int_{\gamma} f(z)dz$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ i.e. l'intégrale est linéaire en l'argument f .

– Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ un chemin dans U d'origine z_0 et d'extrémité z_1 et C^1 par morceaux. Alors l'application $\gamma^{-1} : [-b, -a] \rightarrow U$ définie par $\gamma^{-1}(t) = \gamma(-t)$ est un chemin dans U de classe C^1 par morceaux d'origine z_1 et d'extrémité z_0 ; c'est le chemin γ parcouru en sens inverse. On a :

$$\int_{\gamma^{-1}} f(z)dz = - \int_{\gamma} f(z)dz.$$

• **Exemple fondamental.** La fonction $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$ est définie et holomorphe sur l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Calculons son intégrale sur le chemin γ (C^1 partout), paramétré par $[0, 1]$ et donné par $\gamma(t) = z_0 + re^{2i\pi t}$ où r est un réel strictement positif ; γ est tout simplement le cercle centré en z_0 et de rayon r . On a :

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^1 \frac{1}{re^{2i\pi t}} d(z_0 + re^{2i\pi t}) = 2i\pi \int_0^1 dt = 2i\pi.$$

Si on prend cette fois-ci $\gamma_n(t) = z_0 + re^{2i\pi nt}$ avec $n \in \mathbb{Z}$ (toujours paramétré par $[0, 1]$), alors γ_n est le cercle de centre z_0 et de rayon r décrit n fois dans le sens positif si $n > 0$ et le sens négatif si $n < 0$. Dans ce cas :

$$\int_{\gamma_n} \frac{dz}{z-z_0} = 2i\pi n.$$

Nous verrons que, pour tout chemin fermé γ ne passant pas par z_0 , le nombre $\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0}$ est un entier relatif. On l'appelle *indice* de γ par rapport à z_0 et on le note $\text{Ind}(\gamma, z_0)$.

• Soient $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow U$ et $\gamma_2 : [a, b] \rightarrow U$ deux chemins C^1 par morceaux tels que l'origine de γ_2 soit égale à l'extrémité de γ_1 . On peut définir un chemin *produit* de γ_1 et γ_2 noté $\gamma_1\gamma_2$ par :

$$\gamma_1\gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t-a) & \text{si } a \leq t \leq \frac{a+b}{2} \\ \gamma_2(2t-b) & \text{si } \frac{a+b}{2} \leq t \leq b. \end{cases}$$

Soient γ_1 et γ_2 deux chemins dans U ayant même origine z_0 et même extrémité z_1 .

Question : Quel lien y a-t-il entre les deux intégrales $\int_{\gamma_1} f(z)dz$ et $\int_{\gamma_2} f(z)dz$?

Évidemment $\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$ si, et seulement si, $\int_{\gamma_1\gamma_2^{-1}} f(z)dz = 0$. Le problème de l'indépendance de l'intégrale $\int_{\gamma} f(z)dz$ par rapport au chemin γ lorsqu'on prescrit l'origine et l'extrémité se pose donc. Dans cette direction on a la :

2.2. Proposition. Soient $P, Q : U \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions continues. Alors les deux intégrales $\int_{\gamma_1} \{P(x, y)dx + Q(x, y)dy\}$ et $\int_{\gamma_2} \{P(x, y)dx + Q(x, y)dy\}$ sont égales pour n'importe quel couple de chemins γ_1 et γ_2 ayant même origine z_0 et même extrémité z_1 si, et seulement si, il existe une fonction $h : U \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 telle que :

$$\frac{\partial h}{\partial x} = P \quad \text{et} \quad \frac{\partial h}{\partial y} = Q.$$

Démonstration. Supposons qu'il existe $h : U \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 telle que $\frac{\partial h}{\partial x} = P$ et $\frac{\partial h}{\partial y} = Q$. Soient z_0 et z_1 deux points de U et γ_1 et γ_2 deux chemins ayant même origine z_0 et même extrémité z_1 . On va montrer que $\int_{\gamma} \{P(x, y)dx + Q(x, y)dy\} = 0$ où γ est le

lacet $\gamma_1\gamma_2^{-1}$ de base z_0 . On a :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \{P(x, y)dx + Q(x, y)dy\} &= \int_{\gamma} \left\{ \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy \right\} \\ &= \int_{\gamma} \left\{ \frac{\partial h}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial h}{\partial y} y'(t) \right\} dt \\ &= \int_{\gamma} \frac{d}{dt} (h \circ \gamma)(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} (h \circ \gamma)(t) dt + \int_b^a \frac{d}{dt} (h \circ \gamma)(t) dt \\ &= (h(\gamma_1(b)) - h(\gamma_1(a)) + (h(\gamma_2(a)) - h(\gamma_2(b))) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Réciproquement, supposons que pour deux chemins γ_1 et γ_2 ayant même origine et même extrémité $\int_{\gamma_1} \{P(x, y)dx + Q(x, y)dy\} = \int_{\gamma_2} \{P(x, y)dx + Q(x, y)dy\}$. On choisit un point base $z_0 = x_0 + iy_0$ dans U . Pour tout $z = x + iy \in U$, soit γ n'importe quel chemin d'origine z_0 et d'extrémité z ; on pose :

$$h(z) = \int_{\gamma} \{P(x, y)dx + Q(x, y)dy\} = \int_{z_0}^z \{P(x, y)dx + Q(x, y)dy\}.$$

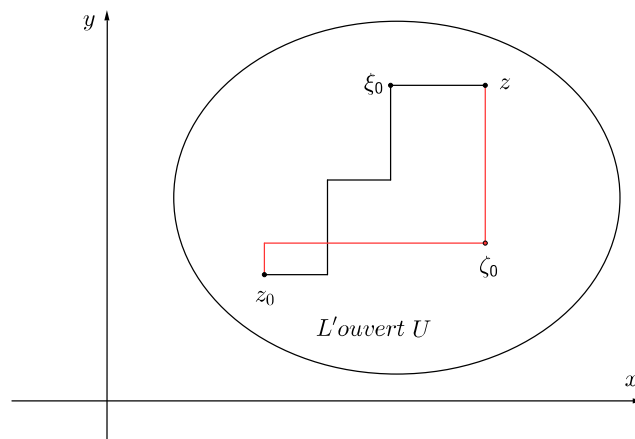
Cette quantité ne dépend pas du chemin qui joint z_0 à z ; on a donc une fonction bien définie. Si γ est une ligne polygonale dont le dernier segment $[\xi_0, z]$ (avec $\xi_0 = (t_0, y)$) est horizontal (*cf.* dessin ci-dessous), alors sur celui-ci y est constante et donc $dy = 0$; par suite l'intégrale s'écrit :

$$h(z) = \int_{t_0}^x P(t, y) dt + \text{constante en } y.$$

En dérivant par rapport à la première variable, on trouve $\frac{\partial h}{\partial x}(z) = P(z)$. En prenant cette fois-ci γ une ligne polygonale dont le dernier segment $[\zeta_0, z]$ (avec $\zeta_0 = (x, s_0)$) est vertical, alors sur celui-ci x est constante et donc $dx = 0$; par suite l'intégrale s'écrit :

$$h(z) = \int_{s_0}^y Q(x, s) ds + \text{constante en } x.$$

En dérivant par rapport à la deuxième variable, on trouve $\frac{\partial h}{\partial y}(z) = Q(z)$. Ce qui démontre la proposition. \diamond



2.3. Dans le cas où il existe une fonction $h : U \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 telle que $\frac{\partial h}{\partial x} = P$ et $\frac{\partial h}{\partial y} = Q$ on dira que la *forme différentielle* $\omega = Pdx + Qdy$ est *exacte i.e.* $dh = \omega$; cela signifie que ω est la différentielle de la fonction h ; h est alors une *primitive* de ω ; toute autre primitive est de la forme $h + \text{constante}$.

On dira qu'une forme différentielle $\omega = Pdx + Qdy$, avec cette fois-ci P et Q de classe C^1 , est *fermée* si $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Comme $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}$ (théorème de Schwarz pour une fonction de classe C^2), une forme différentielle exacte est toujours fermée ; la réciproque n'est pas vraie comme on peut le voir sur la 1-forme $\omega = \frac{dz}{z}$ définie sur \mathbb{C}^* .

Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est holomorphe, la forme différentielle $f(z)dz = f(z)dx + if(z)dy$ est fermée. Cela découle du fait que $\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Dans le même ordre d'idées on peut se poser la question quand une forme différentielle complexe $f(z)dz$ ($f : U \rightarrow \mathbb{C}$ étant continue) est-elle exacte *i.e.* existe-t-il une fonction $h : U \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $dh = f dz$? La réponse est bien entendu donnée aussi par la proposition 2.2. En écrivant $f(z)dz = f(z)dx + if(z)dy$, une telle fonction h , si elle existe, doit satisfaire $\frac{\partial h}{\partial x} = f$ et $\frac{\partial h}{\partial y} = if$ et donc $\frac{\partial h}{\partial x} + i\frac{\partial h}{\partial y} = 0$; par suite h doit être holomorphe. (On verra par la suite que cela implique que la fonction f elle-même est holomorphe.)

Conclusion : f admet une primitive si, et seulement si, pour tout lacet γ dans U et C^1 par morceaux, l'intégrale $\int_{\gamma} f(z)dz$ est nulle.

CHAPITRE III

FORMULE ET THÉORÈME DE CAUCHY

1. Homotopie

On se donne un ouvert connexe de \mathbb{C} (donc connexe par arcs). On rappelle qu'un chemin dans U d'origine z_0 et d'extrémité z_1 est une application continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\gamma(0) = z_0$ et $\gamma(1) = z_1$. Le chemin est dit *fermé* si $z_0 = z_1$. Si $\gamma(t) = z_0$ pour tout $t \in [0, 1]$ on dira que le chemin γ est *constant*.

On note $C([0, 1], U)$ l'ensemble de tous les chemins dans U qu'on munit de la topologie associée à la distance $d(\gamma, \sigma) = \sup_{t \in [0, 1]} |\gamma(t) - \sigma(t)|$.

1.1. Définition. On dira que deux chemins γ_0 et γ_1 sont **homotopes** s'il existe une application continue $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$, appelée **homotopie** entre γ_0 et γ_1 , telle que pour tout $t \in [0, 1]$ on ait :

$$\begin{cases} H(0, t) = \gamma_0(t) \\ H(1, t) = \gamma_1(t). \end{cases}$$

Cela signifie que le chemin γ_0 se déforme continûment et se meut dans U jusqu'à se superposer au chemin γ_1 : en effet, à l'instant $s = 0$, on est sur γ_0 , à l'instant s , on est sur le chemin $\gamma_s(t) = H(s, t)$ et à l'instant $s = 1$ (au bout d'une heure !) on est sur γ_1 . En d'autres termes, il existe un chemin dans l'espace métrique $(C([0, 1], U), d)$ d'origine γ_0 et d'extrémité γ_1 . Si deux chemins quelconques dans U sont toujours homotopes, l'espace métrique $(C([0, 1], U), d)$ est connexe par arcs.

On dira que γ_0 et γ_1 sont *homotopes relativement* à $\{z_0, z_1\}$ s'il existe une homotopie $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$ telle que $H(s, 0) = z_0$ et $H(s, 1) = z_1$ pour tout $s \in [0, 1]$; ceci force donc γ_0 et γ_1 à avoir la même origine et la même extrémité.

On ne considérera dans toute la suite que l'homotopie entre chemins ayant même origine et même extrémité. On a la proposition qui suit (la démonstration est laissée au lecteur).

1.2. Définition. Soient U un ouvert connexe de \mathbb{C} et $z_0, z_1 \in U$. On note $C(U; z_0, z_1)$ l'ensemble des chemins dans U joignant z_0 à z_1 . On a les propriétés qui suivent.

- i) Dans $C(U; z_0, z_1)$ la relation "être homotope à" est une relation d'équivalence.
- ii) Si γ_0 et γ_1 sont homotopes dans $C(U; z_0, z_1)$, σ_0 et σ_1 sont homotopes dans $C(U; z_1, z_2)$ alors les composés $\gamma_0\sigma_0$ et $\gamma_1\sigma_1$ sont homotopes dans $C(U; z_0, z_2)$.

1.3. Définition. On dira que l'ouvert U est **simplement connexe** s'il est connexe et si tout chemin dedans est homotope à un chemin constant.

Cette notion est capitale. Elle est fortement utilisée lorsqu'on cherche à uniformiser des fonctions qui a priori sont multiformes telles la fonction logarithme complexe, les

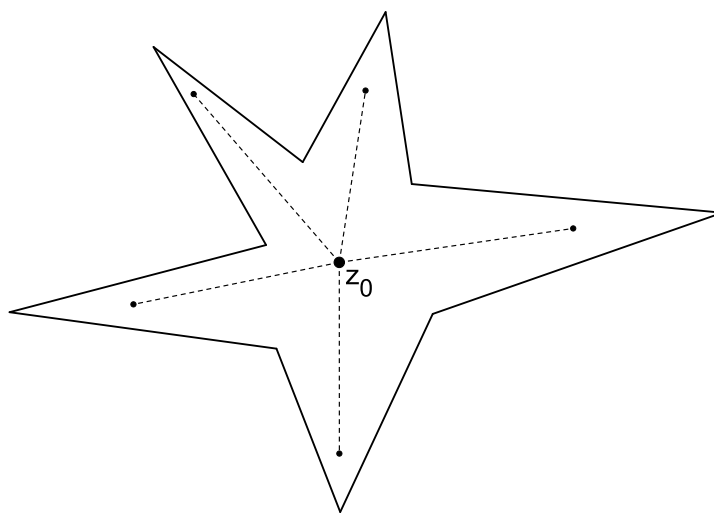
fonctions $z^{\frac{1}{n}}$ etc. Nous allons donner quelques exemples d'ouverts simplement connexes de \mathbb{C} et d'ouverts non simplement connexes.

1.4. Exemples

- Le plan complexe \mathbb{C} lui-même, le disque unité $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ et le demi-plan supérieur $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$ sont simplement connexes.

- De façon générale, tout ouvert U convexe est simplement connexe. En effet, soient γ_0 et γ_1 deux chemins quelconques dans U . Alors l'application $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$ définie par $H(s, t) = (1 - s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t)$ est une homotopie entre γ_0 et γ_1 . En particulier, tout lacet est homotope à un chemin constant.

- On dira que U est *étoilé* par rapport au point z_0 si, pour tout $z_1 \in U$, le segment $[z_0 z_1] = \{(1 - s)z_0 + sz_1 : 0 \leq s \leq 1\}$ est contenu dans U . Un tel ouvert est simplement connexe. Par exemple, \mathbb{C} privé d'une demi-droite fermée est un ouvert simplement connexe car il est étoilé par rapport à tout point dans le prolongement de cette demi-droite qui la complète en droite.



Ouvert étoilé

- Par contre \mathbb{C}^* n'est pas simplement connexe. De même, \mathbb{C} privé d'un nombre fini (ou dénombrable) de points n'est pas simplement connexe. Une couronne n'est pas simplement connexe.

Les exemples sont assez nombreux. Nous laissons le lecteur libre à son imagination d'en fabriquer comme bon lui semble.

- La simple connexité est une notion topologique : tout ouvert homéomorphe à un ouvert simplement connexe est simplement connexe.

2. Théorème de Cauchy

Il admet diverses versions qui sont fondamentalement les mêmes ; elles diffèrent simplement au niveau de leurs formulations et la nature topologique de l'ouvert sur lequel la fonction

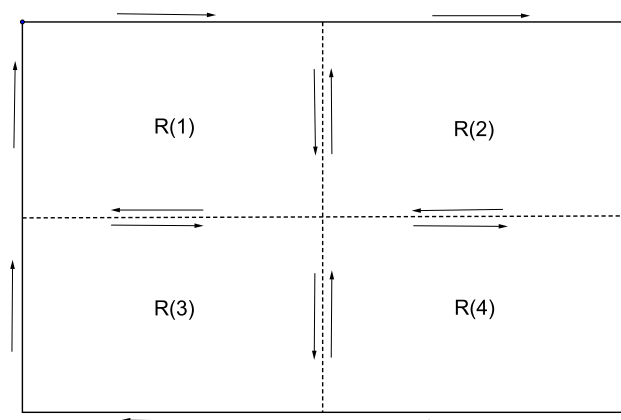
est holomorphe. Nous commencerons par le cas d'un rectangle.

2.1. Théorème de Cauchy 1. Soient U un ouvert connexe, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et R un rectangle contenu dans U . Alors :

$$(III.1) \quad I(f, \partial R) = \int_{\partial R} f(z) dz = 0.$$

où ∂R désigne le bord du rectangle R .

Démonstration. Pour simplifier, la quantité $I(f, \partial R)$ sera notée $I(R)$. On divise le rectangle R en quatre rectangles $R(1), R(2), R(3), R(4)$ comme sur la figure qui suit.



On a alors $I(R) = I(R(1)) + I(R(2)) + I(R(3)) + I(R(4))$. (L'intégrale de f sur chacun des côtés intérieurs se répète sur le même côté avec l'orientation opposée, donc la somme des deux donne 0.) Si on avait $|I(R(j))| < \frac{|I(R)|}{4}$ pour tout $j = 1, 2, 3, 4$ on aurait :

$$|I(R)| \leq |I(R(1))| + |I(R(2))| + |I(R(3))| + |I(R(4))| < |I(R)|,$$

ce qui est absurde ; donc l'un au moins des rectangles $R(j)$ est tel que $|I(R(j))| \geq \frac{|I(R)|}{4}$; notons-le R_1 . On refait la même chose avec R_1 ; on obtient un nouveau rectangle $R_2 \subset R_1$ tel que $|I(R_2)| \geq \frac{|I(R_1)|}{4} \geq \frac{|I(R)|}{4^2}$. De cette manière on construit une suite de rectangles $(R_n)_{n \geq 1}$ telle que :

$$(III.2) \quad R_1 \supset R_2 \supset \cdots \supset R_n \supset R_{n+1} \supset \cdots \quad \text{et} \quad |I(R_n)| \geq \frac{|I(R)|}{4^n}.$$

L'intersection des rectangles de la suite décroissante (R_n) (compacts dont le diamètre tend vers 0) est un point $w \in R$. Comme f est holomorphe en w , $f'(w)$ existe et, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$|z - w| < \eta \implies \left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - f'(w) \right| < \varepsilon$$

ou encore :

$$|z - w| < \eta \implies |(f(z) - f(w)) - (z - w)f'(w)| < |z - w|\varepsilon.$$

Comme l'intégrale de toute fonction constante et celle de z sont nulles sur R_n (calcul facile à mener), on a :

$$I(R_n) = \int_{\partial R_n} f(z)dz = \int_{\partial R_n} \{(f(z) - f(w) - (z - w)f'(w))\}dz$$

et donc :

$$|I(R_n)| = \left| \int_{\partial R_n} \{(f(z) - f(w) - (z - w)f'(w))\}dz \right| < \varepsilon \int_{\partial R_n} |z - w||dz|$$

lorsque $|z - w| < \eta$. Ici $|dz|$ désigne la variation infinitésimale du module de z . Soient d_n et L_n les mesures respectivement de la diagonale et du périmètre de R_n , d et L celles de R . Alors $|I(R_n)| \leq \frac{\varepsilon dL}{4^n}$ ce qui donne finalement (en utilisant (III.2)) $|I(R)| \leq dL\varepsilon$. Comme ε est arbitraire, la quantité $I(R)$ doit être nulle. \diamond

Les hypothèses peuvent être affaiblies et donner en plus une version un peu plus forte permettant d'établir d'autres résultats importants. On se contentera de son énoncé.

2.2. Théorème de Cauchy 2. *Soit Ω un ouvert obtenu à partir d'un rectangle R (comme dans le théorème 2.1) en lui ôtant un nombre fini de points z_1, \dots, z_k . On suppose que, pour tout $j = 1, \dots, k$, on a $\lim_{z \rightarrow z_j} (z - z_j)f(z) = 0$. Alors :*

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0.$$

Et encore une version un peu plus générale. (Cette fois-ci l'hypothèse est affaiblie en généralisant le chemin sur lequel on intègre.)

2.3. Théorème de Cauchy 3. *Soit f une fonction holomorphe sur un disque sauf en un nombre fini de points (de ce disque) z_1, \dots, z_k . On suppose que, pour tout $j = 1, \dots, k$, on a $\lim_{z \rightarrow z_j} (z - z_j)f(z) = 0$. Alors $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$ pour toute courbe fermée γ , C^1 par morceaux et ne passant par aucun des points z_1, \dots, z_k .*

La forme la plus générale du théorème de Cauchy est donnée par l'énoncé qui suit. Il est basé essentiellement sur la nature homotopique du chemin sur lequel on intègre.

2.4. Théorème de Cauchy. *Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur un ouvert connexe U . Alors :*

$$(III.3) \quad \int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

pour tout chemin fermé γ homotope à un point.

On sait, par définition même que, dans un ouvert simplement connexe, tout chemin fermé est homotope à un point. On obtient alors le :

2.5. Corollaire. *Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur un ouvert simplement connexe U . Alors :*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

pour tout chemin fermé γ dans U . La fonction f y admet alors une primitive i.e. il existe une fonction holomorphe $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $F'(z) = f(z)$ pour tout $z \in U$ donnée par :

$$(III.4) \quad F(z) = \int_{\sigma} f(\xi) d\xi$$

où σ est n'importe quel chemin joignant un point fixé z_0 au point z .

L'hypothèse " U simplement connexe" est substantielle pour la définition de la fonction F par la formule (III.4) car autrement F ne serait qu'une fonction multiforme.

3. Formule de Cauchy

C'est un bijou de la théorie des fonctions holomorphes. On va voir effectivement que cette formule y joue un rôle central : elle permet, entre autres, de montrer l'analyticité d'une fonction holomorphe et donc des propriétés importantes sur la nature de ses zéros et ses singularités.

3.1. Indice d'un chemin fermé

Nous avons déjà introduit cette notion pour un cercle. Nous allons donner la définition pour n'importe quel chemin fermé.

Soit γ un chemin fermé C^1 par morceaux dans \mathbb{C} et z_0 un point de $\mathbb{C} \setminus \gamma$. Alors l'intégrale $\int_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0}$ est de la forme $2i\pi n$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Quite à découper le chemin γ en plusieurs morceaux, on peut se ramener à la situation où γ est C^1 partout. On a donc un paramétrage continûment différentiable $\gamma : t \in [0, 1] \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{C}$. Soit $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$\psi(t) = \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0} ds.$$

Elle est de classe C^1 et a pour dérivée $\psi'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0}$. La dérivée de $e^{-\psi(t)}(\gamma(t) - z_0)$ est alors identiquement nulle ; par suite cette fonction est constante et est donc égale à sa valeur en 0 i.e. $e^{-\psi(t)}(\gamma(t) - z_0) = \gamma(0) - z_0$ ou $e^{\psi(t)} = \frac{\gamma(t) - z_0}{\gamma(0) - z_0}$. Comme $\gamma(1) = \gamma(0)$ (le chemin γ étant fermé) $e^{\psi(1)} = 1$ et donc $\psi(1) = \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0} dt$ doit être de la forme $2i\pi n$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Ce qui démontre l'énoncé. \diamond

L'entier :

$$(III.5) \quad \text{Ind}(\gamma, z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$$

est appelé l'*indice* du chemin fermé γ relativement au point z_0 . Donnons quelques-unes de ses propriétés.

Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ un chemin fermé C^1 par morceaux. Comme l'application γ est continue son image est un compact. Ce compact partage le plan en des ouverts : les composantes connexes de $\mathbb{C} \setminus \gamma$. Une et une seule de ces composantes est non bornée ; notons-la Ω_{∞} .

• On a $\text{Ind}(\gamma^{-1}, z_0) = -\text{Ind}(\gamma, z_0)$ où γ^{-1} est l'opposé de γ i.e. le chemin défini par $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$.

• Comme fonction de z_0 , $\text{Ind}(\gamma, z_0)$ est constant sur chacune des composantes connexes de $\mathbb{C} \setminus \gamma$. Pour $z_0 \in \Omega_\infty$, on a $\text{Ind}(\gamma, z_0) = 0$.

3.2. Formule intégrale de Cauchy. Soient $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur un disque U et $z_0 \in U \setminus \gamma$ où γ est un chemin fermé dans U . Alors :

$$(III.6) \quad \text{Ind}(\gamma, z_0)f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Démonstration. Pour $z \in U$ on pose $\Phi(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$. Cette quantité est définie partout sauf pour $z = z_0$. La fonction Φ est holomorphe sur $U \setminus \{z_0\}$ et vérifie :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} ((z - z_0)\Phi(z)) = \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) - f(z_0)) = 0.$$

D'après le Théorème III. 2.3 on a :

$$\int_\gamma \Phi(z) dz = \int_\gamma \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0$$

qu'on peut écrire aussi $\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_\gamma \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz$. Mais $\int_\gamma \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz = 2i\pi \text{Ind}(\gamma, z_0)f(z_0)$. Ce qui donne :

$$\text{Ind}(\gamma, z_0)f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

qui est la formule qu'on cherche à établir. \diamond

La formule de Cauchy habituellement utilisée est celle dans laquelle le chemin γ est d'indice $\text{Ind}(\gamma, z_0) = 1$. Et en fait on la voit comme une fonction de $\zeta \in U \setminus \gamma$; dans cette situation elle s'écrit :

$$(III.7) \quad f(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - \zeta} dz.$$

L'énoncé 3.2 est donné pour un disque alors qu'en réalité la formule intégrale de Cauchy est valable sur n'importe quel ouvert connexe. Voici la version générale :

Soient $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur un ouvert U et $z_0 \in U \setminus \gamma$ où γ est un chemin fermé dans U homotope à un point. Alors :

$$(III.8) \quad \text{Ind}(\gamma, z_0)f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

4. Analyticité des fonctions holomorphes

Nous avons déjà vu qu'une fonction analytique sur un ouvert y est holomorphe. L'objet de cette section est de montrer que la réciproque est vraie et de donner quelques propriétés en plus.

4.1. Théorème. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur un ouvert U . Alors elle y est analytique.

Démonstration. Soient $z_0 \in U$ et $r > 0$ tel que le disque fermé $\overline{D}(z_0, r)$ de centre z_0 et de rayon r soit contenu dans U . Notons γ le cercle de centre z_0 et de rayon r . Alors, pour $z \in D(z_0, r)$, on a :

$$(III.9) \quad f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (\text{Formule de Cauchy}).$$

De façon évidente, $|z - z_0| < |\xi - z_0|$ pour tout ξ sur le cercle γ et tout z dans le disque ouvert $D(z_0, r)$. Par suite on a un développement en série convergente :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} \\ &= \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} \\ &= \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \left\{ 1 + \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right) + \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^2 + \dots + \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n + \dots \right\} \end{aligned}$$

En injectant dans (III.9) on obtient :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \right) d\xi.$$

Comme on intègre sur le compact γ et que la série y converge uniformément, on peut permuter les signes de sommation et d'intégration pour obtenir :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right) (z - z_0)^n$$

qui montre bien que, sur le disque ouvert $D(z_0, r)$, on a $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z - z_0)^n$ avec :

$$f_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

c'est-à-dire f est analytique. ◇

La série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z - z_0)^n$ est appelée *série de Taylor* de f au voisinage de z_0 . Si $f_0 = 0$, alors z_0 est un zéro de f . Le plus petit entier naturel $n \geq 1$ tel que $f_n \neq 0$ est appelé *multiplicité* du zéro z_0 .

Une estimation de la taille des coefficients f_n est décrite par la proposition qui suit.

4.2. Inégalités de Cauchy. Supposons f holomorphe sur le disque $D(z_0, r)$ et qu'il existe $M > 0$ tel que $\sup_{z \in D(z_0, r)} |f(z)| \leq M$. Alors les coefficients de sa série de Taylor au voisinage de z_0 vérifient l'inégalité :

$$(III.10). \quad |f_n| \leq \frac{M}{r^n}.$$

Démonstration. On sait, d'après ce qui précède, que le coefficient f_n est donné par la formule intégrale :

$$f_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

où γ_ρ est le cercle de centre z_0 et de rayon ρ avec $0 < \rho < r$. D'où :

$$\begin{aligned} |f_n| &= \left| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_\rho} \left| \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \right| \cdot |d\xi| \\ &\leq \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{2\pi\rho}{\rho^{n+1}} \\ &= \frac{M}{\rho^n}. \end{aligned}$$

En prenant la limite pour ρ tendant vers r on obtient l'inégalité cherchée. \diamond

Un corollaire presque immédiat des inégalités de Cauchy est le :

4.3. Théorème de Liouville. *Soit f une fonction holomorphe sur \mathbb{C} tout entier (on dit que f est une fonction **entière**). On suppose que f est bornée i.e. il existe $M > 0$ tel que $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Alors f est constante.*

Démonstration. La fonction f admet au voisinage de 0 un développement de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ convergeant sur tout disque $D(0, r)$. Comme f est bornée par $M > 0$, pour tout $r > 0$ on a $|f_n| \leq \frac{M}{r^n}$ pour tout n . On fait tendre r vers $+\infty$; ce qui nous donne $f_n = 0$ pour tout $n \geq 1$. Donc f est constante égale à f_0 . \diamond

Nous terminons cette section par le théorème suivant (que nous ne démontrerons pas).

4.4. Principe du maximum. *Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe non constante sur un ouvert connexe U . Alors il n'existe aucun point $z_0 \in U$ en lequel le module $|f|$ de f soit maximal. De façon précise, il n'existe pas de point $z_0 \in U$ tel que $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ pour tout $z \in U$.*

Ce théorème admet de façon presque immédiate le corollaire qui suit.

4.5. Corollaire. *Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe non constante sur un ouvert connexe borné U et continue sur son adhérence \bar{U} . Alors $|f|$ ne peut atteindre son maximum que sur le bord $\partial U = \bar{U} \setminus U$ de U .*

On peut dire aussi que si $|f|$ atteint son maximum sur U alors f est constante.

CHAPITRE IV

HOMOGRAPHIE

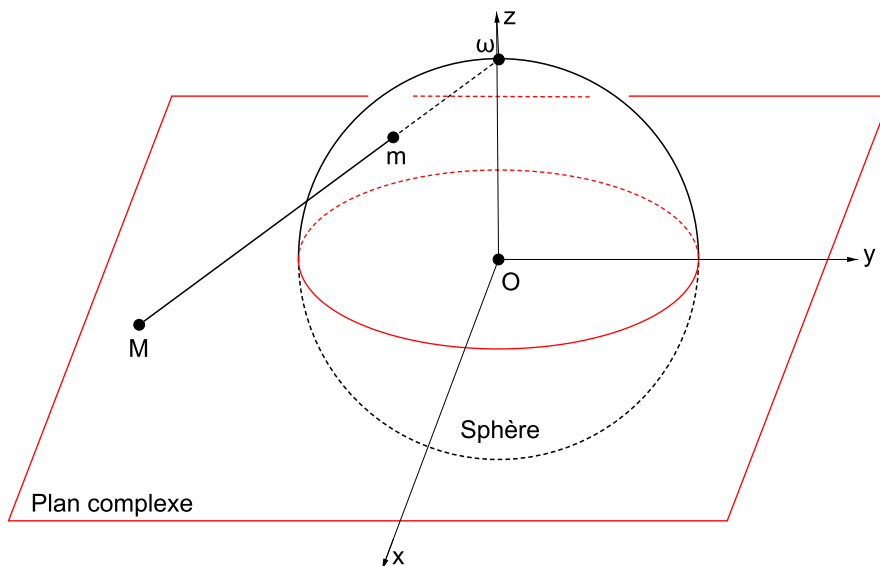
1. Définitions et Notations

1.1. On complète le plan complexe en lui rajoutant le point à l'infini ∞ ; on obtient alors ce qu'on appelle la *sphère de Riemann* et qu'on note $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. On prolonge une partie des opérations de l'addition et de la multiplication de \mathbb{C} à $\widehat{\mathbb{C}}$ en posant :

$$z + \infty = \infty + z = \infty \quad \infty \times \infty = \infty \quad \text{et} \quad \frac{z}{\infty} = 0 \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}$$

$$z \times \infty = \infty \times z = \infty \quad \text{et} \quad \frac{z}{0} = \infty \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}^*.$$

On peut montrer que, du point de vue topologique, $\widehat{\mathbb{C}}$ est la sphère unité \mathbb{S}^2 de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 (cf. dessin ci-dessous).



L'application ψ de la sphère unité \mathbb{S}^2 de l'espace \mathbb{R}^3 privée du point ω sur le plan complexe \mathbb{C} définie par $\psi(x, y, z) = \frac{x}{1-z} + i\frac{y}{1-z}$ est une bijection. Quand m se rapproche du point ω , le point M est rejeté à l'infini dans le plan complexe. Ainsi $\widehat{\mathbb{C}}$ s'identifie à la sphère \mathbb{S}^2 , ce qui justifie l'appellation *sphère de Riemann* pour $\widehat{\mathbb{C}}$. L'application ψ s'appelle *projection stéréographique*.

1.2. Définition. Une *homographie* de $\widehat{\mathbb{C}}$ est une transformation h qui à M d'affixe z associe le point M' d'affixe :

$$z' = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \\ \infty & \text{si } z = -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c} & \text{si } z = \infty \end{cases}$$

où a, b, c, d sont des nombres complexes.

On vérifie immédiatement que, si $ad - bc = 0$, la transformation h est constante ; on supposera donc $ad - bc \neq 0$.

2. Étude de l'homographie

2.1. Cas où elle est une similitude

On suppose $c = 0$. Comme $ad - bc \neq 0$, on a $d \neq 0$ et $a \neq 0$; h s'écrit alors $h(z) = \alpha z + \beta$ avec $\alpha = \frac{a}{d}$ et $\beta = \frac{b}{d}$. On voit clairement que $\omega_\infty = \infty$ est un point fixe de h . Voyons s'il en existe un autre ω_0 ; si tel est le cas, il doit vérifier $\alpha\omega_0 + \beta = \omega_0$. Si $\alpha = 1$, h est une translation si $\beta \neq 0$, donc pas de point fixe et l'identité si $\beta = 0$ donc tout point est fixe. Si $\alpha \neq 1$, h admet $\omega_0 = \frac{\beta}{1-\alpha}$ comme point fixe dans \mathbb{C} .

Regardons la décomposition de h en transformations élémentaires bien connues. En posant $\rho = |\alpha|$ et $\theta = \text{argument}(\alpha)$, on voit clairement qu'on passe de z à $z' = h(z)$ par la suite de transformations :

$$z \mapsto z_1 = \rho z \mapsto z_2 = \rho e^{i\theta} z_1 = \alpha z \mapsto z_3 = z_2 + \beta = \alpha z + \beta = z'.$$

La transformation h s'écrit donc $h = \tau_\beta \circ r(0, \theta) \circ h(0, \rho)$ où $h(0, \rho)$ est l'homothétie de centre 0 et de rapport ρ , $r(0, \theta)$ la rotation de centre 0 et d'angle θ et τ_β la translation de vecteur β . L'homographie h est donc une *similitude directe*.

Désormais, dans toute la suite, on supposera $c \neq 0$. C'est le cas générique ; il offre aussi une richesse géométrique immense.

2.2. La décomposition canonique

Nous allons mettre h sous la forme canonique $h(z) = \alpha + \frac{\beta}{cz+d}$. Celle-ci va nous permettre de la décomposer en transformations géométriques bien connues.

Comme on suppose $c \neq 0$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{az + b}{cz + d} \\ &= \frac{\frac{a}{c}(cz + d) + b - \frac{ad}{c}}{cz + d} \\ &= \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c}}{cz + d} \\ &= \alpha + \frac{\beta}{cz + d} \end{aligned}$$

avec $\alpha = \frac{a}{c}$ et $\beta = \frac{bc-ad}{c}$. On pose $Z = cz + d$ et on note s la similitude directe qui à z associe Z . On a la décomposition qui suit :

$$z \mapsto Z = cz + d \mapsto z_1 = \frac{1}{\bar{Z}} \mapsto z_2 = \bar{z}_1 = \frac{1}{Z} \mapsto z_3 = \beta z_2 = \frac{\beta}{Z} \mapsto \alpha + z_3 = \alpha + \frac{\beta}{Z}.$$

D'où $h = \tau_\alpha \circ r(0, \eta) \circ h(0, |\beta|) \circ s_{0x} \circ I(0, 1) \circ s$ où τ_α est la translation de vecteur α , s_{0x} est la réflexion par rapport à l'axe $(0x)$, $h(0, |\beta|)$ l'homothétie de centre 0 et de rapport

$|\beta|$, $r(0, \eta)$ la rotation de centre O et d'angle $\eta = \text{argument de } \beta$ et $I(0, 1)$ l'inversion de pôle 0 et de puissance 1 .

On se donne un point O du plan complexe et κ un réel non nul. On appelle *inversion* de pôle O et de puissance κ , l'application notée $I(O, \kappa)$ qui, à tout point M distinct de O associe le point M' sur la droite (OM) tel que $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = \kappa$. On peut bien sûr la prolonger à toute la sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ en posant $I(O, \kappa)(O) = \infty$ et $I(O, \kappa)(\infty) = O$.

2.3. Le groupe des homographies

L'ensemble \mathcal{H} des homographies de $\widehat{\mathbb{C}}$ muni de la loi de composition des applications est un groupe non commutatif.

Soient $h_1(z) = \frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}$ et $h_2(z) = \frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}$ deux homographies. Un calcul simple donne l'expression de la composée :

$$h_2 \circ h_1(z) = \frac{(a_2a_1 + b_2c_1)z + (a_2b_1 + b_2d_1)}{(c_2a_1 + d_2c_1)z + (c_2b_1 + d_2d_1)}$$

qui montre bien que $h_2 \circ h_1$ est une homographie. L'élément neutre est l'identité donnée par $a = d = 1$ et $b = c = 0$ ou $a = d = -1$ et $b = c = 0$. Toute homographie $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ est inversible et a pour inverse $h^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$. Ainsi l'ensemble \mathcal{H} des homographies muni de la composition des applications est un groupe. Il n'est pas commutatif car, si on prend $h_1(z) = z + 1$ et $h_2(z) = \frac{1}{z}$, on a $h_1 \circ h_2(z) = \frac{z+1}{z}$ alors que $h_2 \circ h_1(z) = \frac{1}{z+1}$.

2.4. Les points fixes

Soit $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ une homographie qui n'est pas l'identité. Un point fixe de h vérifie l'équation :

$$z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

- Si $c = 0$, on sait que h a un seul point fixe $= \infty$ si $\frac{a}{d} = 1$ et deux points fixes ∞ et $\frac{1}{1-\frac{a}{d}}$ si $\frac{a}{d} \neq 1$. Donc au plus deux points fixes.

- Supposons $c \neq 0$. Alors ∞ n'est pas un point fixe de h et $z \in \mathbb{C}$ en est un si, et seulement si, $cz^2 + (d-a)z - b = 0$. On résout cette équation en calculant le discriminant $\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-bc) = (a+d)^2 - 4$.

- Si $\Delta = 0$, cette équation a une solution double, c'est-à-dire h a un seul point fixe.

- Si $\Delta \neq 0$, l'équation a deux solutions distinctes c'est-à-dire h a deux points fixes différents.

Aussi bien dans le cas $c = 0$ que $c \neq 0$, si h a trois points fixes distincts dans $\widehat{\mathbb{C}}$ (l'un de ces points peut très bien être ∞), h est l'identité. Par suite deux homographies qui coïncident sur trois points distincts sont égales.

3. Le groupe PSL(2, C)

3.1. La description du groupe

Soit $\text{GL}(2, \mathbb{C})$ le groupe des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à coefficients complexes et inversibles. L'application déterminant $\det : A \in \text{GL}(2, \mathbb{C}) \mapsto \det A \in \mathbb{C}^*$ est un morphisme de

groupes. Son noyau est un sous-groupe normal de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ qu'on note $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Alors l'application :

$$\Theta : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \mapsto \left(z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \right) \in \mathcal{H}$$

est un morphisme de groupes. Ceci découle du calcul du produit de deux homographies fait à la sous-section 2.3. Ce morphisme est en plus surjectif puisque toute homographie est associée à une matrice de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$.

Le noyau de Θ est constitué de toutes les matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que, pour tout $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, on ait $\frac{az+b}{cz+d} = z$ c'est-à-dire $cz^2 + (d-a)z - b = 0$. Ce qui implique $b = c = 0$ et $a = d$. Mais comme $ad = 1$ (car $ad - bc = 1$) on doit avoir $a = d = 1$ ou $a = d = -1$. Par suite $\ker \Theta$ est réduit aux deux matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comme $\ker \Theta = \{I, -I\}$ est un sous-groupe normal de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, le quotient de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ par le sous-groupe $\{I, -I\}$ est un groupe noté $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$. On a donc un isomorphisme :

$$\Theta : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{H}$$

qui à tout élément de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ représenté par une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ associe l'homographie $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

3.2. La 3-transitivité de l'action de \mathcal{H}

Soient $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ distincts deux à deux. Montrons qu'il existe toujours une unique homographie $h \in \mathcal{H}$ telle que
$$\begin{cases} h(z_1) = \infty \\ h(z_2) = 0 \\ h(z_3) = 1. \end{cases}$$

On sait que la transformation qu'on cherche est de la forme $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ et qu'elle doit être telle que :

$$\begin{cases} h(z_1) = \infty \\ h(z_2) = 0 \\ h(z_3) = 1. \end{cases}$$

On suppose d'abord qu'aucun des z_1, z_2, z_3 n'est ∞ . Trois petites feintes alors : pour envoyer z_1 sur ∞ , on se débrouille pour que $(z - z_1)$ soit un facteur au dénominateur. De même, pour envoyer z_2 sur 0, on se débrouille pour que $(z - z_2)$ soit un facteur au numérateur. A priori l'homographie $\alpha \frac{z-z_2}{z-z_1}$ (où α est une constante complexe non nulle) fait le travail. Pour que finalement cette homographie envoie z_3 sur 1, il suffit de prendre $\alpha = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$. Ainsi notre homographie cherchée est :

$$h(z) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z - z_1}{z - z_2}.$$

Elle est unique d'après la question 4. On remarque que cette expression convient aussi même si l'un des z_1, z_2, z_3 est ∞ . Plus précisément, on prend :

- $h(z) = \frac{z-z_2}{z_3-z_2}$ si $z_1 = \infty$;
- $h(z) = \frac{z_3-z_1}{z-z_1}$ si $z_2 = \infty$;
- $h(z) = \frac{z-z_2}{z-z_1}$ si $z_3 = \infty$.

À partir de ce qui précède, on peut montrer que l'action du groupe \mathcal{H} sur la sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ est 3-transitive, c'est-à-dire, pour tous $z_1, z_2, z_3, z'_1, z'_2, z'_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$, il existe une

homographie $h \in \mathcal{H}$ telle que $\begin{cases} h(z_1) = z'_1 \\ h(z_2) = z'_2 \\ h(z_3) = z'_3 \end{cases}$. En effet, il existe une unique homographie h

telle que :

$$\begin{cases} h(z_1) = \infty \\ h(z_2) = 0 \\ h(z_3) = 1 \end{cases}$$

et une unique homographie h' telle que :

$$\begin{cases} h'(z'_1) = \infty \\ h'(z'_2) = 0 \\ h'(z'_3) = 1. \end{cases}$$

Alors $\phi = h'^{-1} \circ h$ est l'unique homographie telle que :

$$\begin{cases} \phi(z_1) = z'_1 \\ \phi(z_2) = z'_2 \\ \phi(z_3) = z'_3. \end{cases}$$

L'action du groupe \mathcal{H} sur la sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ est donc 3-transitive.

4. Le birapport

4.1. Définition. On appelle **birapport** de quatre points $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$ pris dans cet ordre, la quantité :

$$\rho(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}.$$

4.2. Proposition. Soit h une homographie qui envoie z_1 sur ∞ , z_2 sur 0 et z_3 sur 1. Alors $h(z_4) = \rho(z_1, z_2, z_3, z_4)$.

Preuve. Il existe une et une seule homographie h telle que $h(z_1) = \infty$, $h(z_2) = 0$ et $h(z_3) = 1$; elle est donnée dans la sous-section 3.2 par $h(z) = \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2} : \frac{z-z_1}{z-z_2}$. On voit donc tout de suite que :

$$\rho(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} = h(z_4).$$

Ceci termine la preuve. ◇

4.3. Proposition. Une homographie $\phi \in \mathcal{H}$ préserve toujours le birapport de quatre points, c'est-à-dire, on a $\rho(\phi(z_1), \phi(z_2), \phi(z_3), \phi(z_4)) = \rho(z_1, z_2, z_3, z_4)$ pour tous $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$.

Preuve. Comme dans la proposition qui précède, il existe une et une seule homographie h telle que $h(z_1) = \infty$, $h(z_2) = 0$ et $h(z_3) = 1$. De même, si ϕ est une homographie quelconque, il existe une unique homographie g telle que :

$$\begin{cases} g(\phi(z_1)) = \infty \\ g(\phi(z_2)) = 0 \\ g(\phi(z_3)) = 1. \end{cases}$$

Elle vérifie aussi $\rho(\phi(z_1), \phi(z_2), \phi(z_3), \phi(z_4)) = g(\phi(z_4))$. On voit donc que $g \circ \phi$ et h coïncident sur les trois points distincts deux à deux z_1, z_2, z_3 , donc elles sont égales. En particulier $g(\phi(z_4)) = h(z_4)$, c'est-à-dire :

$$\rho(\phi(z_1), \phi(z_2), \phi(z_3), \phi(z_4)) = \rho(z_1, z_2, z_3, z_4).$$

qui montre bien que le birapport se conserve par toute homographie. \diamond

5. Étude géométrique d'un exemple

Cela nous permettra de voir comment s'utilisent les nombres complexes en géométrie et en même temps de constater que l'homographie est un peu différente des transformations que nous connaissons habituellement. Nous allons faire cela sous forme d'exercice.

Soit f la transformation qui à M d'affixe z associe le point M' d'affixe :

$$z' = \frac{2z + 1}{z + 1}.$$

1 - Montrer que l'homographie f est un produit de transformations géométriques élémentaires (translations, homothéties, rotations, inversions...) qu'on précisera.

On peut écrire :

$$f(z) = z' = \frac{2z + 2 - 1}{z + 1} = 2 - \frac{1}{z + 1}.$$

On passe donc de z à z' par la suite d'applications qui suivent :

$$z \xrightarrow{f_1} z + 1 \xrightarrow{f_2} \frac{1}{z + 1} \xrightarrow{f_3} \frac{1}{z + 1} \xrightarrow{f_4} -\frac{1}{z + 1} \xrightarrow{f_5} 2 - \frac{1}{z + 1}$$

où f_1 est la translation de vecteur (le nombre complexe) 1, f_2 est l'inversion de pôle l'origine et de puissance 1, f_3 est la symétrie par rapport à l'axe des abscisses, f_4 est la symétrie par rapport à l'origine et f_5 est la translation de vecteur 2.

2 - Soit Ω_- la partie du plan telle que $x^2 + y^2 < 1$. Quelle est son image par la transformation f ?

Pour voir comment se transforme Ω , il est nécessaire de voir comment ça se passe pour le cercle Γ d'équation $x^2 + y^2 = 1$ (c'est le cercle de centre O et de rayon 1 privé bien sûr du point $z = -1$ qui n'a pas d'image dans \mathbb{C}). Par f_1 , Γ devient Γ_1 , cercle de centre $O_1 = (1, 0)$ et de rayon 1 ; l'inversion f_2 le transforme en la droite Γ_2 d'équation $x = \frac{1}{2}$,

que f_3 laisse invariante mais qu'on va noter Γ_3 ; f_4 la ramène sur la droite Γ_4 d'équation $x = -\frac{1}{2}$ et enfin f_5 transforme cette dernière en la droite Δ d'équation $x = \frac{3}{2}$.

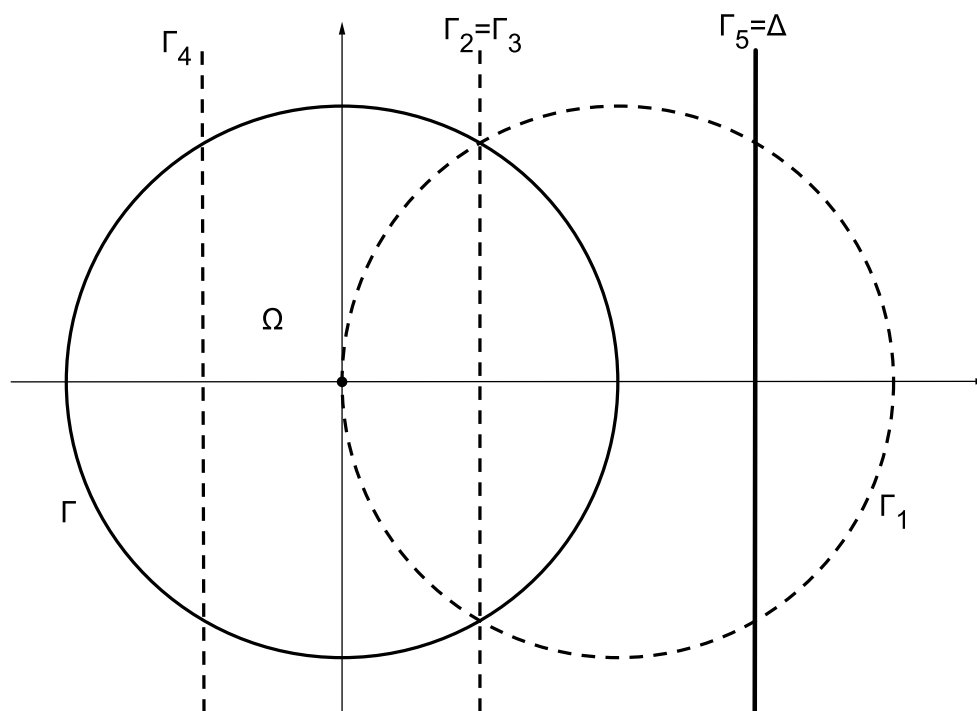
La transformation f est une bijection de l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ sur l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \{2\}$. Elle a pour transformation inverse $f^{-1}(w) = \frac{-w+1}{w-2}$ (définie bien sûr sur $\mathbb{C} \setminus \{2\}$) ; donc :

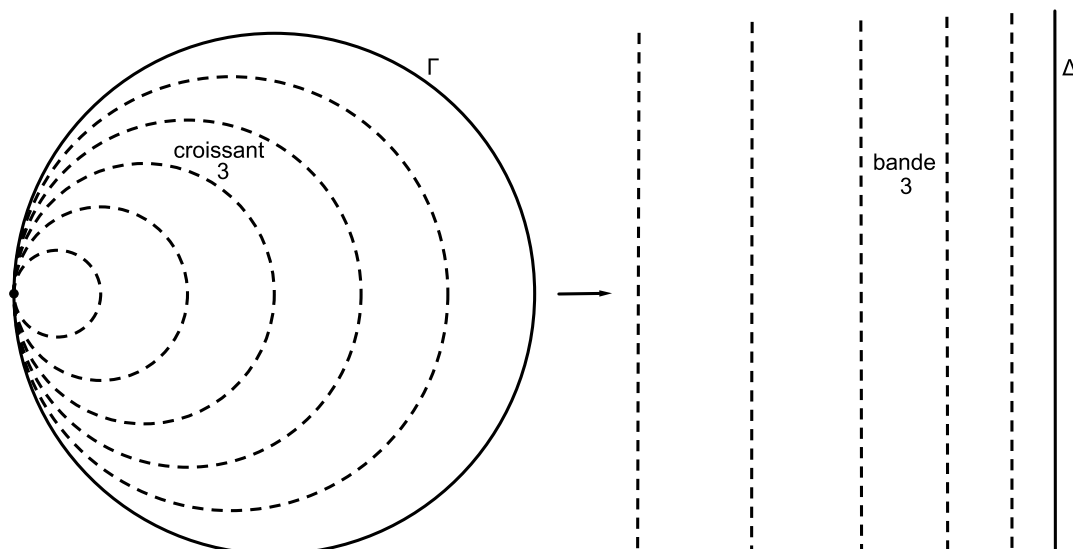
$$f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{2\}$$

est un homéomorphisme. Posons :

- $\Omega = \mathbb{C} \setminus (\{-1\} \cup \Gamma)$ et $\Omega' = \mathbb{C} \setminus (\{2\} \cup \Delta)$,
- $\Omega_- = \{z \in \Omega : |z| < 1\}$ et $\Omega_+ = \{z \in \Omega : |z| > 1\}$,
- $\Omega'_- = \{z = x + iy \in \Omega' : x < \frac{3}{2}\}$ et $\Omega'_+ = \{z = x + iy \in \Omega' : x > \frac{3}{2}\}$.

L'ouvert Ω est non connexe : ses composantes connexes sont Ω_- et Ω_+ ; de même l'ouvert Ω' est non connexe : ses composantes connexes sont Ω'_- et Ω'_+ . La restriction de f à Ω est un homéomorphisme sur Ω' ; f va donc envoyer homéomorphiquement la composante connexe Ω_- de Ω sur l'une des deux composantes connexes de Ω' . Pour savoir laquelle il suffit de voir où va le point $z_0 = 0$; celui-ci a pour image 1, il est donc dans Ω'_- . Le transformé par f de l'ouvert Ω_- est donc l'ouvert Ω'_- . \diamond





Les cercles intérieurs au cercle Γ privés du point $z = -1$ et qui lui sont tangents en ce point forment un *feuilletage* du disque Ω_- . La transformation f les redresse en droites parallèles à Δ et situées à sa gauche. On peut voir aussi que f envoie par exemple le 3^{ème} croissant sur la 3^{ème} bande !

6. Biholomorphismes

Le problème de l'équivalence entre objets mathématiques est central. Nous allons voir de façon très succincte ce qu'il en est pour les ouverts de \mathbb{C} . Nous prendrons les plus simples.

Soient U et V deux ouverts non vides de \mathbb{C} . On dira qu'une application $\phi : U \rightarrow V$ est un *biholomorphisme* si ϕ est bijective, holomorphe et ϕ^{-1} holomorphe. On dira que U et V sont *biholomorphiquement équivalents* s'il existe un biholomorphisme de U sur V . Un biholomorphisme de U sur lui-même est appelé *automorphisme* de U . L'ensemble des automorphismes de U est un groupe noté $\text{Aut}(U)$.

Notons que deux ouverts U et V biholomorphiquement équivalents ont des groupes d'automorphismes isomorphes. En effet, si $h : U \rightarrow V$ est un biholomorphisme, il est immédiat de vérifier que l'application $\phi \in \text{Aut}(U) \mapsto h \circ \phi \circ h^{-1} \in \text{Aut}(V)$ est un isomorphisme de groupes.

Nous allons déterminer ces groupes pour le disque unité ouvert $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ et le demi-plan supérieur $\mathbb{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y < 0\}$. Mais avant cela nous allons donner l'un des théorèmes les plus puissants dans cette direction.

6.1. Théorème d'uniformisation. *Soit U un ouvert simplement connexe de \mathbb{C} différent de \mathbb{C} . Alors U est biholomorphiquement équivalent au disque unité ouvert \mathbb{D} .*

C'est une version un peu plus faible que celle qui donne l'uniformisation d'une surface de Riemann simplement connexe de façon générale. Mais elle a déjà eu un impact énorme sur le développement d'autres branches des mathématiques depuis sa démonstration (qui

remonte à la fin du 19^{ème} siècle). On peut la trouver dans [Car] pour le disque et dans [SG] pour une surface de Riemann simplement connexe quelconque.

6.2. Lemme de Schwarz. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe sur le disque unité ouvert U et telle que $|f| < 1$ et $f(0) = 0$. Alors $|f(z)| \leq |z|$ et $|f'(0)| \leq 1$. Si $|f(z)| = |z|$ pour un certain $z \neq 0$ ou si $|f'(0)| = 1$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = e^{i\theta}z$.

Démonstration. On applique le principe du maximum à la fonction $h(z) = \frac{f(z)}{z}$ pour $z \neq 0$ et $h(0) = f'(0)$. Sur tout cercle γ_r centré en 0 et de rayon $0 < r < 1$, son module est $\leq \frac{1}{r}$ et donc $|h(z)| \leq \frac{1}{r}$ pour $|z| \leq r$. On fait tendre r vers 1 et on obtient $|h(z)| \leq 1$, c'est-à-dire $|f(z)| \leq |z|$ pour tout z . Si l'égalité $|f(z)| = |z|$ est atteinte en un point $z \in U$ ou si $|f'(0)| = 1$, $|h|$ atteint son maximum sur l'ouvert U et donc h est constante ; par suite il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $h(z) = e^{i\theta}$ i.e. $f(z) = e^{i\theta}z$. \diamond

Ce lemme est utilisé de manière substantielle dans la détermination explicite des automorphismes du disque \mathbb{D} . C'est ce que nous allons voir tout de suite.

6.3. Théorème. Tout biholomorphisme du disque unité ouvert \mathbb{D} s'écrit sous la forme $f(z) = e^{i\theta} \frac{z-p}{\bar{p}z-1}$ où θ est un réel et $p \in \mathbb{D}$. De manière équivalente, on peut aussi écrire f sous la forme $\frac{\alpha z + \bar{\beta}}{\beta z + \bar{\alpha}}$ avec $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$.

Démonstration. D'abord, toute transformation $f(z) = e^{i\theta} \frac{z-p}{\bar{p}z-1}$ où θ est un réel et $p \in \mathbb{D}$ est un biholomorphisme de \mathbb{D} . En effet, comme la multiplication par $e^{i\theta}$ est une isométrie euclidienne, ceci va découler du lemme qui suit.

On note $\bar{\mathbb{D}}$ le disque unité fermé $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ dont le bord est le cercle unité $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Soit $p \in \mathbb{D}$ et posons $\omega = \frac{1}{\bar{p}}$; il est clair que $|\omega| > 1$ et donc $\omega \notin \bar{\mathbb{D}}$. Pour tout $z \in \Omega = \mathbb{C} \setminus \{\omega\}$, posons $\varphi(z) = \frac{z-p}{\bar{p}z-1}$.

L'application φ est un automorphisme de Ω et sa restriction au disque unité ouvert \mathbb{D} est un automorphisme de celui-ci.

Démontrons cela. Le fait que φ soit un automorphisme de Ω est immédiat : φ est une bijection de l'ouvert Ω sur lui-même d'inverse $\varphi^{-1}(w) = \frac{w-p}{\bar{p}w-1} = \varphi(w)$.

Pour voir que φ induit un automorphisme de \mathbb{D} , il suffit de montrer que l'image $\varphi(\mathbb{D})$ de \mathbb{D} par φ est contenue dans \mathbb{D} . On peut écrire φ sous la forme :

$$\varphi(z) = \frac{1}{\bar{p}} + \frac{\frac{1-p\bar{p}}{\bar{p}^2}}{z - \frac{1}{\bar{p}}}.$$

Ceci montre alors que φ est la composée de l'inversion de puissance 1 et de pôle ω , de la symétrie d'axe l'axe des abscisses, d'une similitude et d'une translation. Elle transforme donc tout cercle qui ne passe pas par ω en un cercle. Montrons qu'elle laisse le cercle unité Γ globalement invariant. Il suffit à cet effet de montrer que les images de trois points distincts de Γ sont encore sur Γ . (Ce qui suit se justifie en regardant juste les trois dessins.)

On a :

$$\varphi(1) = \frac{1-p}{\bar{p}-1}$$

qui est de module 1 ; de même :

$$\varphi(-1) = \frac{-1-p}{-1-\bar{p}}$$

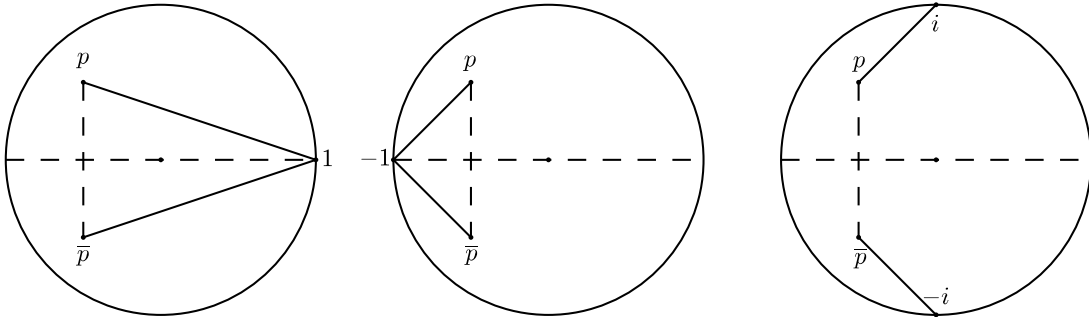
qui est aussi de module 1. Calculons le module de :

$$\varphi(i) = \frac{i-p}{\bar{p}i-1}.$$

On a :

$$\left| \frac{i-p}{\bar{p}i-1} \right| = \frac{|i-p|}{|\bar{p}i-1|} = \frac{|i-p|}{|-i(-i-\bar{p})|} = \frac{|i-p|}{|(-i-\bar{p})|} = 1.$$

Comme φ est un homéomorphisme de Ω sur lui-même laissant Γ globalement invariant, il envoie composante connexe de $\Omega \setminus \Gamma$ (\mathbb{D} en est une) sur composante connexe de $\Omega \setminus \Gamma$. Mais $p \in \mathbb{D}$ et $\varphi(p) = 0$ qui appartient encore à \mathbb{D} ; donc l'image de \mathbb{D} est \mathbb{D} . Ce qui termine la démonstration. \diamond



Soit maintenant f un biholomorphisme de \mathbb{D} . Posons $z_0 = f(0)$, $h(z) = \frac{z-z_0}{(\bar{z}_0)z-1}$ et $g = h \circ f$. Alors g est un biholomorphisme de \mathbb{D} qui vérifie $g(0) = 0$. D'après le lemme de Schwarz, on a $|g(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Mais comme g^{-1} est aussi un biholomorphisme de \mathbb{D} qui vérifie $g^{-1}(0) = 0$, on a $|g^{-1}(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. On en déduit donc $|g(z)| = |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. La fonction $\frac{g(z)}{z}$ est holomorphe et son module $\left| \frac{g(z)}{z} \right|$ est constant égal à 1 ; elle est donc égale à une constante λ de module 1. D'où $f(z) = h^{-1}(g(z)) = h^{-1}(\lambda z) = \lambda \frac{z-\bar{\lambda}z_0}{(\lambda\bar{z}_0)z-1}$. En posant $p = \bar{\lambda}z_0$ et $\lambda = e^{i\theta}$ on peut écrire $f(z) = e^{i\theta} \frac{z-p}{\bar{p}z-1}$. C'est l'expression cherchée. Maintenant on peut remarquer que :

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z-p}{\bar{p}z-1} = \frac{e^{i\theta/2} \cdot z - e^{i\theta/2} \cdot p}{\bar{p}e^{-i\theta/2} \cdot z - e^{-i\theta/2}} = \frac{\alpha z + \bar{\beta}}{\beta z + \bar{\alpha}}$$

avec $\alpha = i \frac{e^{i\theta/2}}{\sqrt{1-p\bar{p}}}$ et $\beta = i \frac{\bar{p}e^{-i\theta/2}}{\sqrt{1-p\bar{p}}}$. Ceci termine la démonstration du théorème. \diamond

6.4. Corollaire. *Tout automorphisme du demi-plan ouvert $\mathbb{H} = \{x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ est de la forme $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ où a, b, c, d sont des réels tels que $ad - bc = 1$.*

Démonstration. On peut montrer assez facilement que la transformation homographique $\phi(z) = \frac{z-i}{z+i}$ est un biholomorphisme de \mathbb{H} sur \mathbb{D} . On a donc une application :

$$\zeta : \text{Aut}(\mathbb{D}) \longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{H})$$

définie par $\zeta(f) = \phi^{-1} \circ f \circ \phi$. On vérifie immédiatement que ζ est un isomorphisme de groupes. Par conséquent, tout biholomorphisme h de \mathbb{H} est du type $h = \phi^{-1} \circ f \circ \phi$ avec $f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\beta z + \bar{\alpha}}$, α et β vérifiant $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$. Un calcul un peu long donne :

$$h(z) = \frac{(\Re(\alpha) + \Re(\beta))z + (\Im(\alpha) + \Im(\beta))}{(\Im(\beta) - \Im(\alpha))z + (\Re(\alpha) - \Re(\beta))}.$$

(Ici $\Re(w)$ et $\Im(w)$ désignent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe w .) On pose $a = \Re(\alpha) + \Re(\beta)$, $b = \Im(\alpha) + \Im(\beta)$, $c = \Im(\beta) - \Im(\alpha)$ et $d = \Re(\alpha) - \Re(\beta)$. Clairement, a, b, c, d sont des réels et le lecteur peut vérifier que $ad - bc = \alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} = 1$. \diamond

CHAPITRE V

SINGULARITÉS ET RÉSIDUS

1. Séries de Laurent

Nous commencerons par donner la définition générale d'une telle série. Ensuite nous verrons dans quelles conditions une fonction analytique en admet une et comment la déterminer.

La proposition qui suit est immédiate à démontrer.

1.1. Proposition. *Considérons la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$ et $\ell = \limsup_{n \rightarrow \infty} |b_n|^{\frac{1}{n}}$. Alors :*

- i) *Si $\ell = 0$ la série converge absolument pour tout z sauf au point $z = z_0$.*
- ii) *Si $0 < \ell < +\infty$ la série converge pour $|z - z_0| > \ell$ et diverge pour $|z - z_0| < \ell$.*
- iii) *Si $\ell = +\infty$ la série diverge pour tout z .*

Si $0 \leq \ell < +\infty$, la série est uniformément convergente sur tout disque fermé contenu dans l'ouvert $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > \ell\}$. Elle définit donc une fonction holomorphe sur l'ouvert Ω .

On appelle *série de Laurent* une série du type $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ qui s'interprète comme la somme des deux séries :

$$(V.1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad \text{et} \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^{-m}}.$$

Elle est convergente si, et seulement si, les deux séries (V.1) le sont. La première, appelée *partie régulière* est une série de Taylor ayant un rayon de convergence R . La deuxième est appelée *partie principale* et converge pour $|z - z_0| > r$. La série de Laurent converge alors uniformément sur tout compact contenu dans la *couronne* :

$$\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$$

lorsque évidemment $r < R$. La somme y définit alors une fonction holomorphe :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Pour $|z - z_0| > R$ ou $|z - z_0| < r$ l'une des deux séries au moins diverge et donc la série de Laurent diverge aussi.

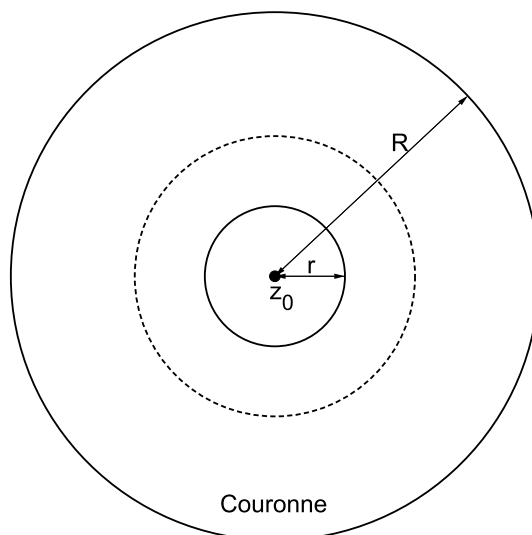
1.2. Proposition. *Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur une couronne (ouverte) $U = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$. Alors f y admet un développement de Laurent :*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n (z - z_0)^n$$

avec :

$$(V.2) \quad f_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

où γ_ρ est le cercle centré en z_0 et de rayon ρ avec $r < \rho < R$.



La démonstration est laissée au lecteur : à peu de choses près, elle est similaire à celle du théorème III.4.1.

1.3. Exemple

On considère la fonction $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$. Elle est définie et holomorphe sur l'ouvert $U = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Cherchons son développement de Laurent au voisinage de chacun des points $z_0 = 0$ et $z_1 = 1$. On a :

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{pour } 0 < |z| < 1$$

et :

$$f(z) = \frac{1}{1+(z-1)} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-z} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \quad \text{pour } 0 < |z-1| < 1.$$

2. Singularités

Soient z_0 un point de \mathbb{C} et f une fonction holomorphe sur un voisinage ouvert de z_0 sauf peut-être en z_0 . On dira alors que z_0 est un *point singulier isolé* de f . Pour r suffisamment petit, f admet un développement de Laurent sur la couronne $0 < |z - z_0| < r$:

$$(V.3) \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n (z - z_0)^n.$$

Il y a trois possibilités :

- Les coefficients f_n sont nuls pour $n < 0$. Dans ce cas on dira que z_0 est une *singularité apparente*.
- Il n'y a qu'un nombre fini de coefficients f_n avec $n < 0$ qui sont non nuls. Dans ce cas on dira que z_0 est un *pôle* de f . Le plus grand $n \geq 1$ tel que $f_{-n} \neq 0$ est un entier naturel m appelé *ordre* du pôle z_0 . Si $m = 1$ on dira que z_0 est un *pôle simple* de f .
- Il y a une infinité de coefficients f_n avec $n < 0$ qui sont non nuls. Dans ce cas on dira que z_0 est une *singularité essentielle*.

2.1. Singularité apparente

Si z_0 est une singularité apparente de f , la série donnée par (V.3) est en fait une série de Taylor ordinaire dont la somme $h(z)$ est holomorphe sur tout le disque $|z - z_0| < r$. On prolonge donc f en z_0 en posant $f(z_0) = h(z_0)$. Donc la fonction f , a priori définie uniquement sur le disque épointé $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$, est en réalité définie sur tout le disque ; c'est en ce sens qu'on dit que la "singularité z_0 est apparente". Un exemple simple est celui de la fonction $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$ définie a priori sur \mathbb{C}^* et qui se prolonge en 0 par $f(0) = 1$.

2.2. Pôle

Comme on l'a dit, si z_0 est un pôle, la série (V.3) ne contient qu'un nombre fini de termes $(z - z_0)^n$ avec exposant négatif. Soit m l'ordre de ce pôle. On a :

$$f(z) = \frac{f_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{f_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} f_n (z - z_0)^n$$

avec $f_{-m} \neq 0$. En multipliant les deux membres par $(z - z_0)^m$ on obtient :

$$(z - z_0)^m f(z) = f_{-m} + f_{-m+1}(z - z_0) + \cdots + f_{-1}(z - z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} f_n (z - z_0)^{n+m}.$$

On voit donc que z_0 est une singularité apparente de la fonction $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$ et que $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = f_{-m}$ et par suite :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f_{-m}}{(z - z_0)^m} = \infty$$

ce qui signifie que $|f(z)|$ tend vers $+\infty$ quand z tend vers z_0 . Les assertions qui suivent ne sont pas difficiles à établir.

- Si f est holomorphe sur un disque $D(z_0, r)$ avec z_0 comme seul zéro de multiplicité m , la fonction $\frac{1}{f}$ est holomorphe sur $D(z_0, r)$ sauf en z_0 qui est un pôle d'ordre m .*
- Si f est holomorphe sur un disque $D(z_0, r)$ sauf en z_0 qui est un pôle isolé d'ordre m , la fonction $\frac{1}{f}$ est holomorphe sur $D(z_0, r)$ avec z_0 comme zéro de multiplicité m .*

Définition. Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est dite **méromorphe** s'il existe un ensemble discret Σ de U tel que f est holomorphe sur $U \setminus \Sigma$ et tout point de Σ est un pôle de f .

Par exemple, si f et g sont deux fonctions holomorphes sur \mathbb{C} le quotient $\frac{f}{g}$ est une fonction méromorphe ; ses pôles sont les zéros de g .

Il n'y a aucune restriction sur les pôles comme le décrit le *Théorème de Mittag-Leffler* qui a marqué un pas décisif dans la théorie des fonctions d'une variable complexe.

Théorème de Mittag-Leffler. *Soit $(z_k)_{k \geq 1}$ une suite discrète dans \mathbb{C} et $(m_k)_{k \geq 1}$ une suite d'entiers naturels. Alors il existe une fonction méromorphe sur \mathbb{C} ayant z_1, \dots, z_k, \dots comme pôles d'ordres respectifs m_1, \dots, m_k, \dots .*

On peut donc prescrire à l'avance les pôles et leurs multiplicités respectives.

2.3. Singularité essentielle

Les fonctions ayant de telles singularités existent bien. Par exemple la fonction définie sur \mathbb{C}^* par $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ a pour développement de Laurent :

$$f(z) = 1 + \frac{1}{1!} \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} + \dots$$

qui montre bien que $z_0 = 0$ est un point singulier essentiel de f .

L'importance de la notion est par exemple illustrée par les deux théorèmes qui suivent qui montrent à quel point l'image par la fonction d'un voisinage arbitraire d'une singularité essentielle peut remplir l'espace \mathbb{C} .

Théorème de Weierstrass. *Soit $f : D(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe sur le disque ouvert $D(z_0, r)$ sauf en z_0 qui est une singularité essentielle. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ (avec $\varepsilon < r$), l'image par f du disque épointé $D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$ est dense dans \mathbb{C} .*

Encore plus fort est le :

Théorème de Picard. *Soit z_0 une singularité essentielle d'une fonction f holomorphe sur un disque ouvert épointé $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ (avec $\varepsilon < r$), l'image par f du disque épointé $D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$ est \mathbb{C} tout entier ou \mathbb{C} privé d'un point.*

À titre d'exercice, on peut vérifier le théorème de Weierstrass sur la fonction $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ en se donnant $w \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$ et en cherchant une suite explicite z_n dans $D(0, \varepsilon)$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = w$.

Si $w = 0$, la suite $z_n = -\frac{1}{n}$ répond à la question. En effet $f(z_n) = e^{-n}$ tend vers 0. Désormais, on supposera $w \neq 0$. On peut donc écrire $w = re^{i\theta}$ avec $r = |w| > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ (argument de w).

• On a $e^{\frac{1}{z}} = e^{\left(\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}\right)} = e^{\left(\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}\right)} = e^{\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)} \cdot e^{\left(-i\frac{y}{x^2+y^2}\right)}$. Pour ne pas trainer de grosses expressions, on pose $\alpha = \frac{x}{x^2+y^2}$ et $\beta = -\frac{y}{x^2+y^2}$. On va chercher notre suite (z_n) dans la courbe $z(t) = t + i\sqrt{\lambda t}$ où λ est un réel strictement positif (qu'on déterminera après) et le paramètre t varie dans \mathbb{R}_+^* . On a alors :

$$\alpha(t) = \frac{t}{t^2 + \lambda t} = \frac{1}{t + \lambda} \quad \text{et} \quad \beta(t) = -\frac{\sqrt{\lambda t}}{t^2 + \lambda t} = -\frac{\sqrt{\lambda}}{t^{\frac{3}{2}} + \lambda\sqrt{t}}.$$

On voit alors que $\alpha(t)$ tend vers $\frac{1}{\lambda}$ lorsque t tend vers 0. Il suffit donc de choisir $\lambda = \frac{1}{\ln(r)}$ pour que cette limite soit $r = |w|$.

• Quant à la fonction $\beta(t)$, elle tend vers $-\infty$ en décroissant strictement lorsque t tend vers 0. Donc l'image de \mathbb{R}_+^* par la fonction β est l'intervalle ouvert $] -\infty, 0[$. Comme l'argument θ de w est défini à une constante additive près du type $2n\pi$ avec $n \in \mathbb{Z}$, on peut en fait supposer que $\theta \in] -\infty, 0[$.

• On va construire notre suite z_n de façon à ce que la suite $w_n = f(z_n)$ soit sur la demi-droite qui part de 0 et qui passe par le point $e^{i\theta}$ et converge vers le point $w = re^{i\theta}$ qu'on s'est donné. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on choisit $t_n \in \mathbb{R}_+^*$ de telle sorte que $\beta(t_n) = \theta - 2\pi n$. Comme $\beta(t_n)$ tend vers $-\infty$ et que β est strictement décroissante, la suite t_n tend nécessairement vers 0.

• On a évidemment $e^{i\beta(t_n)} = e^{i(\theta - 2\pi n)} = e^{i\theta}$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\alpha(t_n)} = r$, on a pour finir :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(z_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\alpha(t_n)} \cdot e^{i\beta(t_n)} = re^{i\theta} = w.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer. ◇

On a ainsi établi que l'image par f de tout disque épointé $D(0, \varepsilon) \setminus \{0\}$ est dense dans tout le plan complexe \mathbb{C} .

3. Résidus

Très importante comme notion ! Nous allons l'introduire ainsi que quelques-unes de ses applications et notamment montrer comment on l'utilise pour le calcul effectif de certaines intégrales de fonctions d'une variable réelle.

Soit f une fonction holomorphe sur une couronne $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ ayant z_0 comme singularité (apparente, pôle ou essentielle). Soient ρ tel que $0 < \rho < r$ et γ_ρ le cercle de centre z_0 et de rayon ρ . Alors f se développe en série de Laurent sur $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$:

$$f(z) = \cdots + \frac{f_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{f_{-1}}{z - z_0} + f_0 + f_1(z - z_0) + \cdots + f_n(z - z_0)^n + \cdots$$

Comme cette série converge uniformément sur le compact γ_ρ (image du chemin γ), on peut intégrer terme à terme sur γ_ρ et on obtient :

$$\int_{\gamma_\rho} f(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \int_{\gamma_\rho} (z - z_0)^n dz.$$

Un calcul simple (qu'on a déjà fait) montre que tous les termes de cette série d'intégrales sont nuls sauf $\int_{\gamma_\rho} \frac{f_{-1} dz}{z - z_0} = 2i\pi f_{-1}$. Donc :

$$\int_{\gamma_\rho} f(z) dz = 2i\pi f_{-1}.$$

3.1. Définition. On appelle **résidu** de f au point z_0 et on note $\text{Rés}(f, z_0)$ le coefficient f_{-1} du développement de Laurent de f au point z_0 .

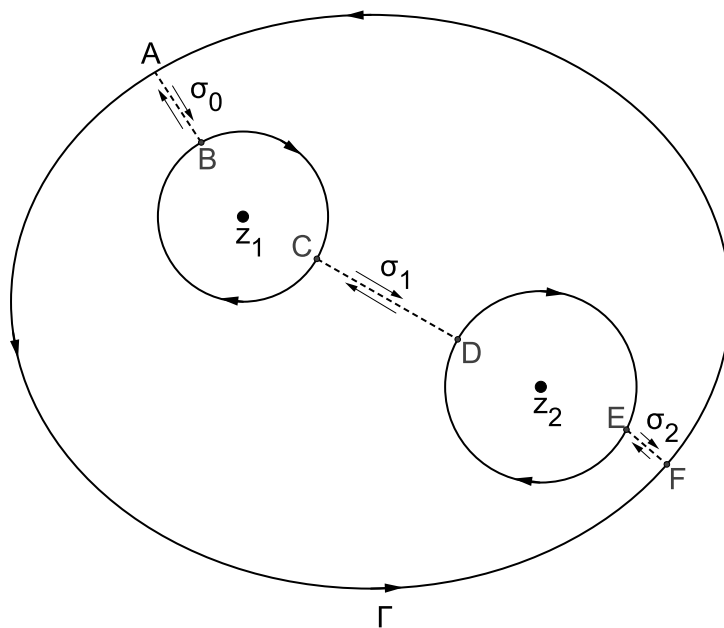
Nous sommes en mesure maintenant de donner le théorème des résidus. C'est ce qui reste comme souvenir à toute personne ayant suivi un cours de variable complexe !

3.2. Théorème des résidus. Soit f une fonction holomorphe sur un voisinage de l'adhérence $\bar{\Omega}$ d'un ouvert borné Ω sauf en un nombre fini de points z_1, \dots, z_k qui sont des pôles. On suppose que Ω est délimité par un chemin fermé Γ simple (sans auto-intersection) et C^1 par morceaux. Alors :

$$(V.4) \quad \int_{\Gamma} f(z) dz = 2i\pi \sum_{j=1}^k \text{Rés}(f, z_j).$$

Démonstration. Soient $r > 0$ et, pour chaque $j = 1, \dots, k$, soit γ_j le cercle de centre z_j et de rayon r ; on choisit r suffisamment petit pour que tous les cercles γ_j soient contenus dans Ω et que deux quelconques d'entre eux ne se coupent pas. Soient σ_0 un chemin simple dans $\bar{\Omega}$ joignant un point de Γ à un point de γ_1 , σ_1 un chemin simple dans Ω joignant un point de γ_1 à un point de $\gamma_2, \dots, \sigma_{k-1}$ un chemin simple dans Ω joignant un point de γ_{k-1} à un point de γ_k et σ_k un chemin simple dans Ω joignant un point de γ_k à un point de Γ . Le dessin qui suit visualise la situation lorsque $k = 2$.

On note K le compact obtenu en ôtant de $\bar{\Omega}$ les intérieurs des disques délimités par les cercles $\gamma_1, \dots, \gamma_k$. On oriente alors les chemins $\Gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_k$ de telle sorte que lorsqu'on se déplace sur chacun d'eux le compact K se retrouve à notre gauche. (On peut sûrement mieux faire en ayant recours à une définition plus formelle et plus "mathématique" mais cette convention nous suffit largement !)



On décompose alors $\Lambda = \Gamma \cup \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k$ en deux chemins fermés simples et C^1 par morceaux Γ_1 et Γ_2 . Expliquons comment on fait dans le cas $k = 2$ en se référant au dessin.

On convient que l'orientation positive sur le chemin σ_0 est de A vers B , sur σ_1 de C vers D et sur σ_2 de E vers F .

Pour obtenir Γ_1 :

- on part du point A ,
- on va vers B en parcourant σ_0 (décrit dans le sens positif),
- de B vers C sur γ_1 ,
- de C vers D sur σ_1 (décrit dans le sens positif),
- de D vers E sur γ_2 ,
- de E vers F sur σ_2 (décrit dans le sens positif) et enfin
- de F vers A sur Γ .

Pour obtenir Γ_2 :

- on part du point A ,
- on va vers F en parcourant Γ ,
- de F vers E sur σ_2^{-1} (σ_2 décrit dans le sens négatif),
- de E vers D sur γ_2 ,
- de D vers C sur σ_1^{-1} (σ_1 décrit dans le sens négatif),
- de C vers B sur γ_1 et enfin
- de B vers A sur σ_0^{-1} (σ_0 décrit dans le sens négatif).

Pour chaque $\ell = 0, 1, \dots, k$ on a $\int_{\sigma_\ell^{-1}} f(z)dz = -\int_{\sigma_\ell} f(z)dz$. D'autre part la fonction f étant holomorphe à l'intérieur de chacun des domaines délimités par Γ_1 et Γ_2 , par le théorème de Cauchy on a :

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma_2} f(z)dz = 0.$$

Par suite :

$$0 = \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz = \int_{\Gamma} f(z)dz - \sum_{j=1}^k \int_{\gamma_j} f(z)dz.$$

Mais l'intégrale $\int_{\gamma_j} f(z)dz$ vaut $2i\pi \text{Rés}(f, z_j)$. On a donc :

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 2i\pi \sum_{j=1}^k \text{Rés}(f, z_j).$$

Ce qui termine la démonstration du théorème. ◇

4. Calcul d'intégrales

Le théorème des résidus admet de multiples applications. L'une des plus connues est celle qui l'utilise pour calculer explicitement certaines intégrales de fonctions d'une variable réelle comme nous l'avons déjà dit. Nous nous limiterons à traiter deux exemples en détail. Mais avant, donnons quelques indications pour calculer le résidu en un pôle.

4.1. Soit z_0 un pôle d'ordre m d'une fonction f . Alors au voisinage de ce point on a le développement de Laurent :

$$f(z) = \frac{f_{-m}}{(z-z_0)^m} + \dots + \frac{f_{-1}}{z-z_0} + f_0 + f_1(z-z_0) + \dots + f_n(z-z_0)^n + \dots$$

et donc :

$$(z - z_0)^m f(z) = f_{-m} + f_{-m+1}(z - z_0) + \dots + f_{-1}(z - z_0)^{m-1} + f_0(z - z_0)^m + f_1(z - z_0)^{m+1} + \dots$$

On dérive les deux membres $(m - 1)$ fois et on obtient :

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z)) = (m - 1)! f_{-1} + \frac{m!}{1!} f_0(z - z_0) + \frac{(m + 1)!}{2!} f_1(z - z_0)^2 + \dots$$

On prend la limite des deux membres lorsque z tend vers z_0 et on obtient :

$$(V.5) \quad \text{Rés}(f, z_0) = f_{-1} = \frac{1}{(m - 1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z)).$$

Lorsque le pôle z_0 est simple *i.e.* $m = 1$, on a au voisinage de z_0 (en dehors de z_0 bien sûr) :

$$f(z) = \frac{f_{-1}}{(z - z_0)} + f_0 + f_1(z - z_0) + \dots$$

D'où :

$$(z - z_0)f(z) = f_{-1} + f_0(z - z_0) + f_2(z - z_0)^2 + \dots$$

Par suite :

$$(V.6) \quad \text{Rés}(f, z_0) = f_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z).$$

Ceci devient encore plus simple si $f(z) = \frac{a(z)}{b(z)}$ avec $b(z_0) = 0$, $a(z_0) \neq 0$ et $b'(z_0) \neq 0$. On trouve (le lecteur fera les calculs) :

$$(V.7) \quad \text{Rés}(f, z_0) = f_{-1} = \frac{a(z_0)}{b'(z_0)}.$$

4.2. Premier exemple

Soit à calculer l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$. Le fait qu'elle existe effectivement est un exercice facile laissé au soin du lecteur !

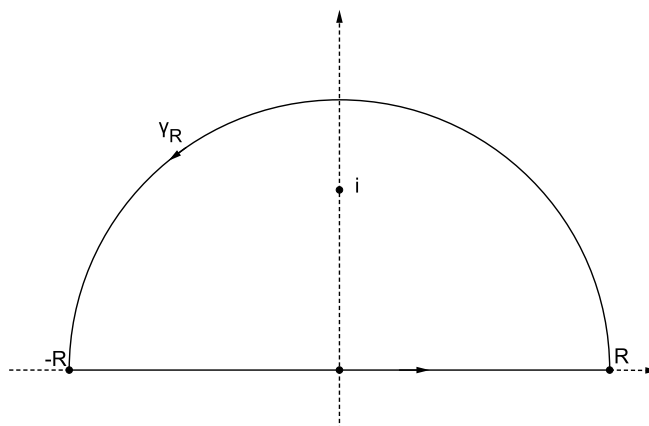
Considérons la fonction $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$. Elle est définie et holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$. Les points $-i$ et i sont des pôles d'ordre 3. (On n'utilisera en fait que le pôle $z_0 = i$.) En utilisant la formule (V.5) on trouve :

$$\begin{aligned} \text{Rés}(f, i) &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^2}{dz^2} ((z - i)^3 f(z)) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{(z + i)^3} \right) \right]_{z=i} \\ &= -\frac{3i}{16}. \end{aligned}$$

Le chemin fermé Γ auquel on va appliquer le théorème des résidus sera le suivant. Soit $R > 1$; on part du point de coordonnées $(-R, 0)$ et on parcourt l'axe réel jusqu'au point

de coordonnées $(R, 0)$ ensuite on décrit le demi-cercle γ_r de rayon R dans le demi-plan supérieur pour revenir au point $(-R, 0)$. L'intérieur du chemin est un ouvert qui contient le pôle i . D'après le théorème des résidus on a :

$$(V.8) \quad \int_{\Gamma} f(z) = \int_{-R}^R f(x)dx + \int_{\gamma_R} f(z)dz = 2i\pi \text{Rés}(f, i) = \frac{3\pi}{8}.$$



Mais sur le cercle γ_R on a :

$$\frac{1}{|z^2 + 1|} = \frac{1}{|z^2 - (-1)|} \leq \frac{1}{||z^2| - 1|} = \frac{1}{R^2 - 1}.$$

D'où :

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z)dz \right| \leq \frac{\pi R}{(R^2 - 1)^3}$$

et donc :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0.$$

D'après (V.8) en prenant la limite pour R tendant vers l'infini, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3} = \frac{3\pi}{8}.$$

4.3. Deuxième exemple

L'intégrale :

$$J = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1}$$

existe bien. Calculons-la en utilisant le théorème des résidus. Comme la fonction à intégrer est paire, son intégrale est égale à la moitié de l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1}.$$

On considère la fonction $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1}$. Elle est définie et holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ et les points $-i$ et i en sont des pôles simples. La fonction f est de la forme $\frac{a(z)}{b(z)}$ avec $a(i) = e^{-1} \neq 0$ et $b'(i) = 2i \neq 0$; en vertu de la formule (V.7), on a :

$$\text{Rés}(f, i) = \frac{a(i)}{b'(i)} = \frac{1}{2ie}.$$

On reprend le chemin Γ de l'exemple qui précède. En appliquant le théorème des résidus on obtient :

$$\int_{\Gamma} f(z) = \int_{-R}^R f(x)dx + \int_{\gamma_R} f(z)dz = 2i\pi\text{Rés}(f, i) = \frac{\pi}{e}$$

c'est-à-dire :

$$(V.9) \quad \int_{-R}^R \frac{\cos x}{x^2+1} dx + \Re \left(\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz \right) = \frac{\pi}{e}.$$

Sur le cercle γ_R on a $|e^{iz}| \leq e^{-y}$ où y est la partie réelle de z . D'où :

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z)dz \right| \leq \frac{\pi R}{R^2-1}$$

qui montre bien que l'intégrale $\int_{\gamma_R} f(z)dz$ tend vers 0 lorsque R tend vers $+\infty$. L'égalité (V.9) nous donne alors :

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} = \frac{\pi}{2e}.$$

UN COMPLÉMENT

Le théorème fondamental de l'algèbre

Tout polynôme $P(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n$ à coefficients complexes de degré $n > 0$ admet une racine dans \mathbb{C} .

Il existe beaucoup de démonstrations de ce théorème. Nous en présentons deux ici : la première est une application du *théorème de Liouville* et la deuxième utilise des outils de topologie algébrique et de la théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe.

Première démonstration

Supposons que le polynôme P ne s'annule nulle part. Alors la fonction $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ est holomorphe partout dans \mathbb{C} .

Pour $R > 0$, la fonction f est bornée sur le disque $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$. Et comme $|P(z)|$ tend vers $+\infty$ lorsque $|z| \rightarrow +\infty$, le module de f tend vers 0 ; donc f est bornée aussi sur la couronne $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq R\}$, par suite f est bornée sur \mathbb{C} tout entier. Elle est donc constante en vertu du théorème de Liouville ; ce qui n'est pas le cas. L'hypothèse " P ne s'annule nulle part" est donc fautive. Ceci démontre le théorème. \diamond

Deuxième démonstration

On écarte le cas $a_0 = 0$ où 0 est une racine évidente ; a_0 sera donc non nul. D'autre part, quitte à diviser tous les coefficients par a_n (qui est non nul car P est de degré n), on peut supposer ce dernier égal à 1.

1. L'inégalité qui suit, évidente à établir, sera utile pour la démonstration. On a :

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \frac{|a_0 + a_1z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1}|}{|z^n|} = 0.$$

Il existe alors $\alpha > 0$ tel que, pour $|z| > \alpha$, $\frac{|a_0 + a_1z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1}|}{|z^n|} < 1$. On peut donc écrire :

$$(*) \quad |z| > \alpha \implies |a_0 + a_1z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1}| < |z^n|.$$

2. Soit U un ouvert de \mathbb{C} . Un *chemin fermé* ou *lacet* dans U est une application continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ telle que $\gamma(0) = \gamma(1)$. Mais c'est aussi une application continue du cercle \mathbb{S}^1 (vu comme le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1) dans l'ouvert U ; c'est cette définition qu'on adoptera $z \in \mathbb{S}^1 \xrightarrow{\gamma} \gamma(z) \in U$.

Rappelons que deux lacets (dans U) $\gamma_0, \gamma_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow U$ sont dits *homotopes* s'il existe une application continue $H : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow U$ (appelée *homotopie* entre γ_0 et γ_1) telle que $H(z, 0) = \gamma_0(z)$ et $H(z, 1) = \gamma_1(z)$.

3. On note σ le monôme $\sigma(z) = z^n$. Pour tout $R \geq 0$, soient $C_R : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ et $\gamma_R : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ les chemins fermés définis respectivement par $C_R(z) = \sigma(Rz)$ et $\gamma_R(z) = P(Rz)$. Pour $R = 0$, C_0 et γ_0 sont les chemins constants $C_0(0) = 0$ et $\gamma_0(0) = a_0$.

On fait l'hypothèse :

(\mathcal{H}) Le polynôme P ne s'annule en aucun point de \mathbb{C} .

4. On considère l'application $H : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}^*$ définie par :

$$H(z, s) = P(sRz) = \gamma_{sR}(z).$$

Alors H est continue et telle que $H(z, 0) = \gamma_0(z) = a_0$ et $H(z, 1) = \gamma_R(z)$; donc γ_R est homotope dans \mathbb{C}^* au lacet constant $\gamma_0(z) = a_0$. Par suite les indices $I(\gamma_R, 0)$ et $I(\gamma_0, 0)$ par rapport à 0 respectivement des lacets γ_R et γ_0 sont égaux. On a donc :

$$(1) \quad I(\gamma_R, 0) = I(\gamma_0, 0) = 0.$$

5. Comme on a $|a_0 + a_1z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1}| < |z^n|$ pour $|z| > \alpha$ (c'est exactement l'implication (*)), on a encore :

$$s |a_0 + a_1z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1}| < |z^n|$$

pour tout $s \in [0, 1]$. Donc le polynôme $P_s(z) = z^n + s(a_0 + a_1z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1})$ ne s'annule jamais. On suppose désormais $R > \alpha$. L'application $G : \mathbb{C} \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}^*$ définie par $G(z, s) = P_s(z)$ est continue et telle que $G(z, 0) = P_0(z) = \sigma(z) = z^n$ et $P_1(z) = P(z)$; par suite l'application $K : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}^*$, définie par l'égalité $K(z, s) = \sigma(Rz) + sQ(Rz)$ où $Q(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1}$, est une homotopie dans \mathbb{C}^* entre le lacet C_R et le lacet γ_R . Ce qui donne :

$$(2) \quad I(\gamma_R, 0) = I(C_R, 0) = n.$$

6. Conclusion

D'une part, pour tout $R \geq 0$, l'indice de γ_R par rapport à 0 est nul : c'est l'égalité (1). D'autre part, pour tout $R > \alpha$, l'indice de γ_R par rapport à 0 vaut $n > 0$: c'est l'égalité (2). Il y a contradiction ! L'hypothèse (\mathcal{H}) est donc fautive *i.e.* le polynôme P admet au moins une racine dans \mathbb{C} . \diamond

EXERCICES RÉSOLUS

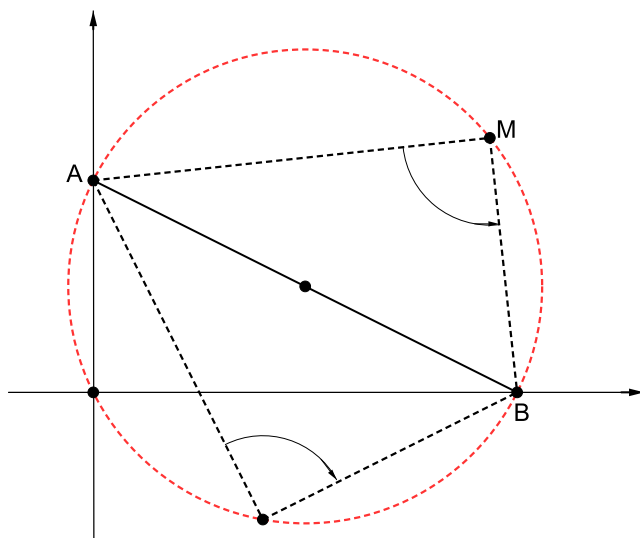
EXERCICES RÉSOLUS

Exercice 1

À tout point M du plan complexe \mathbb{C} d'affixe z on associe le point M' d'affixe $z' = h(z)$ où $h(z) = \frac{z-2}{z-i}$. Où doit varier M pour que le point M' soit constamment sur l'axe imaginaire pur ? (Si on fait un dessin, on voit plus clair !)

Solution

On a $z' = \frac{z-2}{z-i} = \frac{2-z}{i-z}$; donc $\arg(z') = \arg(2-z) - \arg(i-z)$. Dire que z' varie sur l'axe imaginaire pur, c'est équivalent à dire que son argument est congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π . Soient A et B les points ayant respectivement pour affixes i et 2 . La mesure de l'angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ est donc congrue à $\frac{\pi}{2}$ modulo π ; par suite le point M est sur le cercle de diamètre le segment AB .



On peut aussi retrouver le même résultat de la façon suivante. On calcule la partie réelle de z' en fonction des coordonnées réelles (x, y) du point z . On trouve :

$$\Re(z') = \frac{(x-1)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}}{x^2 + (y-1)^2}.$$

Dire que z' est imaginaire pur, c'est dire que $\Re(z') = 0$ donc $(x-1)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}$ i.e. z est sur le cercle de centre $\omega = (1, \frac{1}{2})$ et de rayon $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$ qui est exactement le cercle qu'on a déjà déterminé.

Exercice 2

On considère la fonction holomorphe $J : z \in \mathbb{C}^* \mapsto Z \in \mathbb{C}$ avec $Z = \frac{1}{2} (z + \frac{1}{z})$.

1 - En écrivant $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ (avec $\rho > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$) et $Z = X + iY$, donner les expressions de X et Y en fonction de ρ et θ .

2 - Quelle est l'image du cercle Γ de centre l'origine et de rayon $R > 0$ par J ?

Solution

1 - Si $z = x + iy = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ (avec $\rho = |z|$ et $\theta = \text{argument de } z$), on a $Z = X + iY = \frac{1}{2} \left((\rho + \frac{1}{\rho}) \cos \theta + i(\rho - \frac{1}{\rho}) \sin \theta \right)$. Donc :

$$\begin{cases} X = \frac{1}{2}(\rho + \frac{1}{\rho}) \cos \theta \\ Y = \frac{1}{2}(\rho - \frac{1}{\rho}) \sin \theta \end{cases}$$

2 - Dans cette situation le module ρ est constant égal à R . Si $R = 1$, $Y = 0$ et $X = \cos \theta$ et décrit l'intervalle $[-1, 1]$. Donc l'image du cercle unité par T est l'ensemble :

$$\{X + iY : Y = 0 \text{ et } -1 \leq X \leq 1\}.$$

Supposons $R > 1$ (le lecteur traitera le cas $0 < R < 1$). On pose $a = \frac{1}{2}(R + \frac{1}{R})$ et $b = \frac{1}{2}(R - \frac{1}{R})$; a et b sont des constantes réelles strictement positives et :

$$\begin{cases} X = a \cos \theta \\ Y = b \sin \theta. \end{cases}$$

Ce qui donne $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ et qui montre que l'image du cercle de centre O et de rayon R par l'application T est une ellipse de grand axe $2a = R + \frac{1}{R}$, de petit axe $2b = R - \frac{1}{R}$ et de foyers les points $F = (c, 0)$ et $F' = (-c, 0)$ avec $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1$.

Exercice 3

1 - Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est convergente.

On se propose de calculer I . À cet effet, on considère la fonction h qui à z associe la quantité $h(z) = \frac{e^{iz}}{z}$.

2 - Pour quelles valeurs de z la fonction h est-elle définie et holomorphe ? Calculer l'intégrale de h sur le chemin Γ défini comme suit : on se donne deux nombres réels $R > r > 0$; on décrit l'axe réel du point $(-R, 0)$ au point $(-r, 0)$, le demi-cercle γ_r (situé sur le demi-plan supérieur) de rayon r du point $(-r, 0)$ au point $(r, 0)$, l'axe réel du point $(r, 0)$ au point $(R, 0)$ et enfin le demi-cercle γ_R (situé sur le demi-plan supérieur) de rayon R du point $(R, 0)$ au point $(-R, 0)$.

3 - Montrer que $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} h(z) dz = 0$ et $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} h(z) dz = -i\pi$.

Indication pour la première : *Intégrer par parties comme pour les intégrales des fonctions d'une variable réelle.*

4 - Dédire des questions 2 et 3 la valeur exacte de l'intégrale I .

Solution

1 - La fonction $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ est définie et continue sur \mathbb{R}^* ; sa limite quand $x \rightarrow 0$ vaut 1 ; elle se prolonge donc par continuité en 0 et définit une fonction continue sur \mathbb{R}

tout entier. Par conséquent le problème de l'existence de l'intégrale en question ne se pose qu'à l'infini. On va montrer que cette intégrale converge en utilisant le critère de Cauchy :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que : $x', x'' \geq A \implies \left| \int_{x'}^{x''} \frac{\sin x}{x} dx \right| < \varepsilon$.

Soit donc $\varepsilon > 0$; il s'agit de trouver un réel $A > 0$ vérifiant la propriété qu'on vient de mentionner. On transforme $\int_{x'}^{x''} \frac{\sin x}{x} dx$ en procédant à une intégration par parties. (Comme le problème se pose au voisinage de $+\infty$, les nombres x' et x'' seront supposés strictement positifs.) À cet effet on pose $u(x) = \frac{1}{x}$ et $v'(x) = \sin x$; d'où $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $v(x) = -\cos x$. Ce qui nous donne : $\int_{x'}^{x''} \frac{\sin x}{x} dx = \left[-\frac{\cos x}{x} \right]_{x'}^{x''} - \int_{x'}^{x''} \frac{\cos x}{x^2} dx$. D'où :

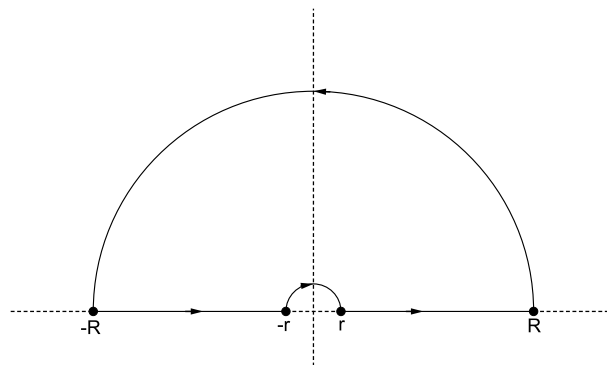
$$\begin{aligned} \left| \int_{x'}^{x''} \frac{\sin x}{x} dx \right| &= \left| \left[-\frac{\cos x}{x} \right]_{x'}^{x''} - \int_{x'}^{x''} \frac{\cos x}{x^2} dx \right| \\ &\leq \left| \left[-\frac{\cos x}{x} \right]_{x'}^{x''} \right| + \left| \int_{x'}^{x''} \frac{\cos x}{x^2} dx \right| \\ &\leq \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} + \int_{x'}^{x''} \frac{1}{x^2} dx \\ &\leq 2 \left(\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} \right) \end{aligned}$$

Si on prend n'importe quel $A > \frac{4}{\varepsilon}$ alors clairement la condition $x', x'' \geq A$ implique $2 \left(\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} \right) < \varepsilon$. Ce nombre A répond à la question. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est donc convergente. \diamond

Comme la fonction continue $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\sin x}{x} \in \mathbb{R}$ est paire, on va calculer plutôt l'intégrale :

$$2I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

2 - La fonction $h(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ est définie et holomorphe pour tout point $z \in \mathbb{C}^*$. Elle est donc holomorphe sur l'intérieur du contour Γ . Par conséquent, d'après le théorème de Cauchy $\int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$.



3 - Pour calculer la première limite on procède par intégration par parties (comme pour les intégrales des fonctions d'une variable réelle). On pose $u'(z) = e^{iz}$ et $v(z) = \frac{1}{z}$; d'où $u(z) = \frac{e^{iz}}{i}$ et $v'(z) = -\frac{1}{z^2}$. Ce qui nous donne :

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = \left[\frac{e^{iz}}{iz} \right]_{-R}^{+R} + \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{iz^2} dz$$

et donc :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| &\leq \left| \frac{e^{iR} + e^{-iR}}{iR} \right| + \left| \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{iz^2} dz \right| \\ &\leq \frac{2}{R} + \left| \int_0^\pi \frac{e^{iR(\cos \theta + i \sin \theta)}}{iR^2 e^{2i\theta}} iR e^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq \frac{2}{R} + \left| \int_0^\pi \frac{e^{iR \cos \theta}}{R e^{i\theta}} e^{-R \sin \theta} d\theta \right|. \end{aligned}$$

Mais $\sin \theta \geq 0$ pour $0 \leq \theta \leq \pi$; donc $e^{-R \sin \theta} \leq 1$. Ceci nous permet de majorer le deuxième terme du membre de droite et d'avoir finalement l'inégalité :

$$\left| \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq \frac{2 + \pi}{R} \quad \text{qui tend vers 0 quand } R \rightarrow +\infty.$$

Donc $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} h(z) dz = 0$.

Pour calculer la deuxième limite, on utilise le développement de Laurent de la fonction h au voisinage de 0 ; on a :

$$h(z) = \frac{1}{z} \left(1 + \frac{iz}{1!} + \dots + \frac{(iz)^n}{n!} + \dots \right)$$

qui montre que $h(z) = \frac{1}{z} + \phi(z)$ où ϕ est une fonction holomorphe sur \mathbb{C} tout entier. On a donc :

$$\int_{\gamma_r} h(z) dz = \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z} + \int_{\gamma_r} \phi(z) dz.$$

Mais, comme ϕ est holomorphe sur \mathbb{C} , elle est bornée (par une constante $M > 0$) sur un compact contenant γ_r ; donc :

$$\left| \int_{\gamma_r} \phi(z) dz \right| \leq M \left| \int_{\gamma_r} dz \right| = M \left| \int_\pi^0 i r e^{i\theta} d\theta \right| = M \pi r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0.$$

D'autre part :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z} = \lim_{r \rightarrow 0} \int_\pi^0 \frac{i r e^{i\theta}}{r e^{i\theta}} d\theta = -i\pi.$$

4 - Lorsque le point z est sur l'axe réel, il se réduit à sa partie réelle ; on le notera donc x . On a (en utilisant le résultat de la question 2) :

$$0 = \int_\Gamma h(z) dz = \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz.$$

On prend les limites lorsque $R \rightarrow +\infty$ et $r \rightarrow 0$. Tenant compte des calculs précédemment établis on obtient :

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_0^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = i\pi.$$

L'identification des parties réelles et imaginaires des deux membres de cette égalité nous donne finalement $2I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$, c'est-à-dire $I = \frac{\pi}{2}$. \diamond

Exercice 4

Soient a, b, c, d quatre nombres complexes tels que $ad - bc = 1$ et $c \neq 0$. Pour tout z dans l'ouvert $U = \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ on pose :

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

1 - Dire pourquoi la fonction $h : z \in U \mapsto h(z) \in \mathbb{C}$ est holomorphe. Quelle est la nature de sa singularité $z_0 = -\frac{d}{c}$? Calculer le résidu de h en z_0 .

2 - Déterminer l'image Ω de U par h . Montrer que $h : U \mapsto \Omega$ est une bijection en déterminant son inverse h^{-1} .

3 - Soit γ le cercle de centre $u \in U$ et de rayon $r > 0$ paramétré par l'application $t \in [0, 1] \mapsto e^{2i\pi t}$ et ne passant pas par z_0 . Calculer l'intégrale :

$$\int_{\gamma} h(z) dz.$$

Solution

1 - La fonction h est une fraction rationnelle ; elle est holomorphe partout où son dénominateur est non nul, c'est-à-dire sur tout l'ouvert U . Un calcul simple nous donne :

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{az + b}{cz + d} \\ &= \frac{\frac{a}{c}(cz + d) + b - \frac{ad}{c}}{cz + d} \\ &= \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc - ad}{c}}{cz + d} \\ &= \frac{a}{c} + \frac{\frac{1}{c^2}}{z + \frac{d}{c}}. \end{aligned}$$

Le point $z_0 = -\frac{d}{c}$ est donc un pôle simple de h et $\text{Rés}(h, z_0) = \frac{1}{c^2}$.

2 - Soit $w \in \mathbb{C}$; peut-on trouver $z \in U$ tel que $h(z) = w$? Si c'est le cas on doit avoir $\frac{az+b}{cz+d} = w$ i.e. $(cw - a)z = -dw + b$. Si $w \neq \frac{a}{c}$ on a $z = \frac{-dw+b}{cw-a}$ et ce point est unique. La fonction h réalise donc une bijection entre U et l'ouvert $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ d'inverse $h^{-1}(w) = \frac{-dw+b}{cw-a}$.

3 - Soient $u \in U$ et $\delta(u) = |u - z_0|$. On sait que $r \neq \delta(u)$. Si $r < \delta(u)$, le point z_0 est extérieur au cercle γ et donc $\int_{\gamma} h(z) dz = 0$. Supposons $r > \delta(u)$ i.e. le point z_0 est intérieur au cercle γ . Donc $\int_{\gamma} h(z) dz = 2i\pi \text{Rés}(h, z_0) = \frac{2i\pi}{c^2}$.

Exercice 5

Soient $z_0 = x_0 + iy_0$ un point de \mathbb{C} , $n \in \mathbb{Z}$ et f la fonction $f(z) = (z - z_0)^n$. Soit a un réel strictement positif. On pose :

$$z_1 = (x_0 - a) + i(y_0 - a), \quad z_2 = (x_0 + a) + i(y_0 - a)$$

$$z_3 = (x_0 + a) + i(y_0 + a), \quad z_4 = (x_0 - a) + i(y_0 + a)$$

et on note γ la courbe bord du carré $z_1 z_2 z_3 z_4$ orientée positivement *i.e.* les sommets sont dans l'ordre z_1, z_2, z_3, z_4 . Calculer de deux manières différentes l'intégrale :

$$\int_{\gamma} f(z) dz.$$

Solution

Pour calculer l'intégrale, on fait un changement de variable en posant $w = z - z_0$. Tout sera alors translaté autour de l'origine : on aura à calculer l'intégrale de w^n sur le bord σ du carré dont les sommets sont $w_1 = a(-1 - i)$, $w_2 = a(1 - i)$, $w_3 = a(1 + i)$ et $w_4 = a(-1 + i)$ parcouru dans le sens $w_1 w_2 w_3 w_4$.

Première méthode

Elle consiste à paramétrer σ et à faire directement le calcul de l'intégrale sur les quatre côtés du carré. On a :

$$\int_{\sigma} w^n dw = \int_{-a}^a (x - ia)^n dx + \int_{-a}^a (a + iy)^n idy + \int_a^{-a} (x + ia)^n dx + \int_a^{-a} (-a + iy)^n idy.$$

Pour $n \neq -1$, on a :

$$\int_{\sigma} w^n dw = \frac{1}{n+1} [(t - ia)^{n+1} + (a + it)^{n+1} - (t + ia)^{n+1} - (-a + it)^{n+1}]_{-a}^a = 0.$$

Si $n = -1$, on a :

$$\int_{\sigma} \frac{dw}{w} = \int_{-a}^a \frac{1}{x - ia} dx + \int_{-a}^a \frac{1}{a + iy} idy + \int_a^{-a} \frac{1}{x + ia} dx + \int_a^{-a} \frac{1}{-a + iy} idy$$

qui donne :

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \frac{dw}{w} &= \int_{-a}^a \left(\frac{1}{t - ia} - \frac{1}{t + ia} \right) dt + \int_{-a}^a \left(\frac{1}{t - ia} - \frac{1}{t + ia} \right) dt \\ &= 4ia \int_{-a}^{+a} \frac{dt}{t^2 + a^2} \\ &= 4i \int_{-a}^{+a} \frac{1}{\left(\frac{t}{a}\right)^2 + 1} \left(\frac{dt}{a}\right) \quad (\text{et en posant } u = \frac{t}{a}) \\ &= 4i \int_{-1}^{+1} \frac{du}{u^2 + 1} \\ &= 4i [\text{Arctg}(u)]_{-1}^{+1} \\ &= 2i\pi. \end{aligned}$$

Deuxième méthode

Sur \mathbb{C} on considère la norme $\|z\| = \|x + iy\| = \max(x, y)$. Le chemin σ peut alors être paramétré par $\sigma(t) = a|e^{2i\pi}|e^{2i\pi}$ (avec $t \in [0, 1]$) de façon différentiable par morceaux (il est conseillé de regarder de près, c'est assez instructif). Ainsi σ est homotope au chemin fermé $\eta : t \in [0, 1] \mapsto e^{2i\pi t}$ par l'application (clairement continue) $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ donnée par $H(t, s) = (1 - s)\sigma(t) + s\eta(t)$. Par suite :

$$\int_{\sigma} w^n dw = \int_{\eta} w^n dw = 2i\pi \int_0^1 e^{2i\pi(n+1)t} dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq -1 \\ 2i\pi & \text{si } n = -1. \end{cases}$$

Exercice 6

Pour tout nombre complexe z , on désigne par $|z|$ son module et $\text{Arg}(z)$ son argument. On note Ω l'ouvert :

$$\Omega = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{4} < \text{Arg}(z - i) < \frac{3\pi}{4} \right\}.$$

(Il est conseillé de dessiner cet ouvert.)

Quelle est l'image Ω' de l'ouvert Ω par l'homographie $h : z \mapsto z' = -\frac{z+1}{z-1}$?

Solution

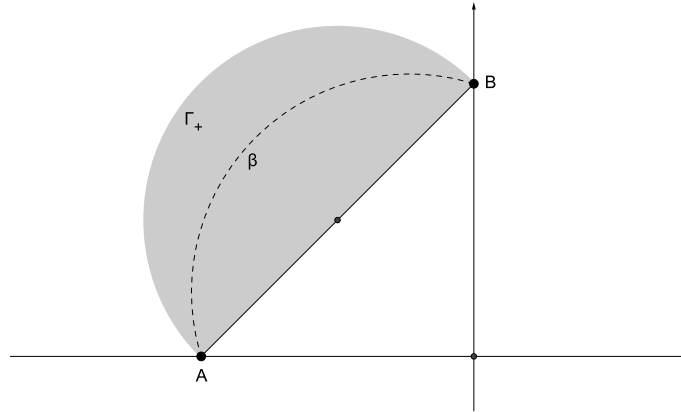
De la relation $z' = -\frac{z+1}{z-1}$ on déduit $z = \frac{z'-1}{z'+1}$. Ce qui donne $z - i = (1 - i) \frac{i - z'}{(-1) - z'}$. Pour $z \neq i$, notons θ l'argument de $(z - i)$. On a $\theta = \text{Arg}(1 - i) + \text{Arg}\left(\frac{i - z'}{(-1) - z'}\right)$, c'est-à-dire :

$$(1) \quad \text{Arg}(i - z') - \text{Arg}((-1) - z') = \theta + \frac{\pi}{4}.$$

Soient A et B les points d'affixes respectives -1 et i ; M' étant le point d'affixe z' . La relation (1) est équivalente à :

$$(2) \quad \left(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B} \right) = \theta + \frac{\pi}{4}.$$

Pour $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\left(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B} \right) = \frac{\pi}{2}$; le point M' varie alors sur le demi-cercle Γ_+ de diamètre $[AB]$ privé des points A et B et du côté de la droite (AB) qui ne contient pas l'origine. De la même manière, pour $\theta = \frac{3\pi}{4}$, on a $\left(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B} \right) = \pi$; donc le point M' varie sur le segment ouvert $]AB[$. Pour une valeur de θ telle que $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$, on a $\frac{\pi}{2} < \left(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B} \right) < \frac{3\pi}{4}$, et donc le point M' varie sur l'arc de cercle β (voir dessin ci-dessous) privé de A et B . On en déduit finalement que le point M' varie sur le demi-disque ouvert délimité par le demi-cercle Γ_+ et le segment $[AB]$; c'est l'image de Ω par l'homographie h .



Exercice 7

Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur \mathbb{C} tout entier. On rappelle que f s'écrit sous forme d'une série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence égal à $+\infty$.

On admet le résultat suivant (qui est une conséquence du théorème de Weierstrass) :
Si le cardinal de l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0\}$ est infini, pour tout $M > 0$, l'image de l'ouvert $\{z \in \mathbb{C} : |z| > M\}$ est une partie dense de \mathbb{C} .

On rappelle aussi qu'on appelle *automorphisme* d'un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ toute bijection $h : U \rightarrow U$ telle que h et son inverse h^{-1} soient holomorphes. Le but de cet exercice est de déterminer le groupe $\text{Aut}(\mathbb{C})$ des automorphismes de \mathbb{C} .

1 - Soit $f \in \text{Aut}(\mathbb{C})$. Montrer que f est une fonction polynôme $a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$. (Indication : *utiliser le fait que $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ et $V = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ sont des ouverts non vides et disjoints.*)

2 - Montrer que $\text{Aut}(\mathbb{C})$ est constitué des transformations de la forme $f(z) = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

3 - Question bonus

- Montrer que $\text{Aut}(\mathbb{C})$ est le produit semi-direct $\mathbb{C} \rtimes \mathbb{C}^*$ où le groupe multiplicatif \mathbb{C}^* agit sur le groupe additif \mathbb{C} par homothéties complexes.
- Montrer que $\text{Aut}(\mathbb{C})$ est résoluble et non nilpotent.

Solution

1 - Un automorphisme f de \mathbb{C} est avant tout une fonction holomorphe sur \mathbb{C} tout entier. Elle se développe donc en série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (de rayon de convergence $R = +\infty$). Si le nombre de termes non nuls de cette série était infini, l'ouvert $V' = f(V)$ serait dense dans \mathbb{C} , en particulier tout point de l'ouvert $U' = f(U)$ serait adhérent à V' ; mais ceci est impossible car U' et V' sont deux ouverts disjoints, tous les deux non vides.

Par conséquent f est un polynôme $f(z) = \sum_{k=0}^k a_k z^k$.

2 - On vient de voir que tout $f \in \text{Aut}(\mathbb{C})$ est un polynôme $f(z) = \sum_{k=0}^k a_k z^k$. Comme l'application f est bijective, et donc a fortiori injective, ce polynôme doit être du premier degré, c'est-à-dire de la forme $f(z) = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

3 - Question bonus

Nous venons de voir que $f \in \text{Aut}(\mathbb{C})$ est constitué des transformations affines du plan complexe \mathbb{C} , c'est-à-dire les applications de la forme $f : z \in \mathbb{C} \mapsto az + b \in \mathbb{C}$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. Si l'élément $f \in \text{Aut}(\mathbb{C})$ est défini par le couple (b, a) et f' par le couple (b', a') alors ff' est défini par le couple $(a'b + b', a'a)$: facile à voir, il suffit de composer les applications f et f' dans l'ordre $f' \circ f$ (faire attention à cela dans la suite des calculs). L'inverse de f est donné par le couple $(-\frac{b}{a}, \frac{1}{a})$.

- Le groupe multiplicatif \mathbb{C}^* agit sur le groupe additif $(\mathbb{C}, +)$ par les homothéties complexes $(a, t) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \mapsto at \in \mathbb{C}$. Cette action permet donc de construire le produit semi-direct $\mathbb{C} \rtimes \mathbb{C}^*$ dans lequel la multiplication est $(b, a) \cdot (b', a') = (a'b + b', a'a)$. On voit donc immédiatement que l'application $\Phi : (b, a) \in \mathbb{C} \rtimes \mathbb{C}^* \mapsto \{z \mapsto az + b\} \in \text{Aut}(\mathbb{C})$ est un homomorphisme bijectif, donc un isomorphisme de $\mathbb{C} \rtimes \mathbb{C}^*$ sur $\text{Aut}(\mathbb{C})$.

- Montrons que $\text{Aut}(\mathbb{C})$ est résoluble. Soient $f = (b, a)$ et $f' = (b', a')$ deux éléments de $\text{Aut}(\mathbb{C})$. On a :

$$(b, a)^{-1} = \left(-\frac{b}{a}, \frac{1}{a}\right) \quad \text{et} \quad (b', a')^{-1} = \left(-\frac{b'}{a'}, \frac{1}{a'}\right)$$

et donc :

$$(b, a)(b', a')(b, a)^{-1}(b', a')^{-1} = \left(\frac{b}{a} - \frac{b'}{a'} + \frac{b' - b}{aa'}, 1\right).$$

Ceci montre que le premier groupe dérivé $G_1 = [\text{Aut}(\mathbb{C}), \text{Aut}(\mathbb{C})]$ de $\text{Aut}(\mathbb{C})$ est contenu dans le sous-groupe $\mathbb{C} \times \{1\}$. En fait, il y a égalité car, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $(\lambda, 1)$ est le commutateur $[(-\lambda, 1), (0, \frac{1}{2})]$. Comme $G_1 = \mathbb{C} \times \{1\}$ est un groupe abélien, $G_2 = [G_1, G_1]$ est réduit à $(0, 1)$; donc $\text{Aut}(\mathbb{C})$ est résoluble.

- Un calcul similaire au précédent permet de montrer que $G^2 = [G_1, \text{Aut}(\mathbb{C})] = G_1$ et par suite :

$$G^3 = [G^2, \text{Aut}(\mathbb{C})] = \dots = [G^n, \text{Aut}(\mathbb{C})] = \dots = G_1.$$

Comme G_1 n'est pas le groupe trivial, $\text{Aut}(\mathbb{C})$ n'est pas nilpotent. ◇

Exercice 8

1 - On considère la fonction d'une variable réelle $f(x) = \ln(1 - x)$. Donner le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction f . Préciser les valeurs de x pour lesquelles ce développement est valable.

Considérons la série entière $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ où x est réel et $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+3)}$.

2 - Calculer le rayon de convergence R de la série S .

3 - On pose $g(x) = x^3 S(x)$. Donner le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction $\frac{g'(x)}{x}$ (g' désigne la dérivée de g).

4 - En déduire l'expression explicite (en termes de fonctions élémentaires bien connues) de la somme de la série S .

Solution

1 - La fonction $-f$ est la primitive qui s'annule en 0 de $h(x) = \frac{1}{1-x}$; celle-ci admet le développement en série entière :

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec 1 pour rayon de convergence ; f aura donc un développement en série entière donné comme suit :

$$f(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Le rayon de convergence est le même *i.e.* égal à 1. ◇

2 - On calcule la limite du rapport $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ quand n tend vers l'infini qui est précisément le rayon de convergence R de la série $S(x)$. On a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)(n+4)}{(n+1)(n+3)} = 1.$$

◇

3 - On a :

$$g(x) = x^3 S(x) = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{(n+1)(n+3)}$$

et donc :

$$g'(x) = \frac{x^2}{1} + \frac{x^3}{2} + \dots + \frac{x^{n+2}}{n+1} + \dots$$

Par suite :

$$\frac{g'(x)}{x} = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots = -\ln(1-x).$$

D'où $x^3 S(x) = - \int_0^x t \ln(1-t) dt$. Pour calculer cette intégrale, on procède par intégration par parties en posant $du = t$ et $v = -\ln(1-t)$. Ce qui donne :

$$x^3 S(x) = - \int_0^x t \ln(1-t) dt = \left[-\frac{t^2}{2} \ln(1-t) + \frac{1}{2} \ln(1-t) + \frac{t}{2} \left(1 + \frac{t}{2} \right) \right]_0^x.$$

On obtient finalement la somme de la série :

$$S(x) = \frac{1}{2x^3} \left((1-x^2) \ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2} \right).$$

Ce qui termine le calcul. ◇

Exercice 9

On considère l'équation différentielle suivante dans laquelle x représente une fonction réelle de la variable t :

$$tx'' + 3x' - 4t^3x = 0.$$

1 - Montrer qu'il existe une solution unique x de cette équation différentielle donnée sous forme d'une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ et vérifiant la condition $x(0) = 1$. Calculer explicitement le rayon de convergence R de cette série.

2 - Donner l'expression de x en termes de fonctions élémentaires bien connues.

Solution

1 - Si une telle solution existe, elle s'écrit $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ où $t \in]-R, +R[$ avec $R > 0$, rayon de convergence de cette série entière. Pour tout réel ρ tel que $0 < \rho < R$, la série converge uniformément sur l'intervalle compact $[-\rho, +\rho]$; on peut donc dériver sous le signe somme. On aura alors :

$$x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} \quad \text{et} \quad x''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}.$$

Ce qui donne :

$$tx''(t) + 3x'(t) - 4t^3x(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 3n a_n t^{n-1} - \sum_{n=4}^{\infty} 4a_{n-4} t^{n-1}$$

c'est-à-dire :

$$tx''(t) + 3x'(t) - 4t^3x(t) = 3a_1 + 8a_2t + 15a_3t^2 + \sum_{n=4}^{\infty} (n(n+2)a_n - 4a_{n-4}) t^{n-1}.$$

Comme $tx''(t) + 3x'(t) - 4t^3x(t) = 0$ pour tout $t \in]-R, +R[$, on doit avoir :

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

et

$$n(n+2)a_n - 4a_{n-4} = 0 \quad \text{pour } n \geq 4.$$

D'autre part, la condition initiale $x(0) = 1$ donne $a_0 = 1$. Finalement, les seuls coefficients non nuls de la série sont ceux du type a_{4k} avec $k \in \mathbb{N}$; ceux-là vérifient la relation :

$$a_{4k} = \frac{4a_{4(k-1)}}{4k(4k+2)} = \frac{a_{4(k-1)}}{2k(2k+1)} \quad \text{pour } k \geq 1.$$

Après calcul et simplification, on obtient :

$$a_{4k} = \frac{a_0}{(2k+1)!} = \frac{1}{(2k+1)!}.$$

D'où :

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{4k}}{(2k+1)!}.$$

Calculons d'abord le rayon de convergence R_0 de la série $\sum_{k=0}^{\infty} b_k u^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{(2k+1)!}$:

$$R_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_k}{b_{k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(2k+3)!}{(2k+1)!} = \lim_{k \rightarrow \infty} (2k+2)(2k+3) = +\infty.$$

On en déduit que le rayon de convergence de la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{4k}}{(2k+1)!}$ est aussi infini. Il y a donc une seule solution x de l'équation différentielle étudiée qui se développe en série entière et qui vérifie $x(0) = 1$.

$$2 - \text{On a finalement } x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{4k}}{(2k+1)!} = \frac{1}{t^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t^2)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\text{sh } t^2}{t^2}.$$

EXERCICES EN VRAC

Exercice 1

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière. On rappelle que le *rayon de convergence* de f est le plus grand $R > 0$ tel que, pour $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge absolument pour $|z| < R$ et diverge pour $|z| > R$. Donner le rayon de convergence de chacune des séries suivantes.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} z^n, & \sum_{n=0}^{\infty} n z^n, & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n, & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} z^n, & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n, & \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{2n+1} \text{ avec } a \in \mathbb{C}, & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^n} z^n. \end{aligned}$$

Exercice 2

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes.

$$e^z = 3, \quad e^z = -2, \quad e^z = i, \quad \sin z = 0, \quad \operatorname{sh} z = 0, \quad e^{\frac{z}{1+z}} = 1 - i.$$

Exercice 3

Le corps \mathbb{C} des nombres complexes est un espace vectoriel de dimension 1 sur lui-même. Mais c'est aussi un espace vectoriel de dimension 2 sur le corps \mathbb{R} des nombres réels ; les nombres complexes 1 et i en forment une base : tout $z \in \mathbb{C}$ s'écrit $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$; ce qui donne donc un isomorphisme de \mathbb{R} -espaces vectoriels $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$.

On munit \mathbb{C} de son produit hermitien :

$$(z, z') \in \mathbb{C}^2 \longmapsto z \overline{z'} \in \mathbb{C}.$$

1 - Donner l'équation du cercle (Γ) de centre $z_0 = 2 + i$ et de rayon 2. Le dessiner dans le plan complexe.

2 - Pour tout nombre complexe z , on désigne par $\Re z$ et $\Im z$ respectivement sa partie réelle et sa partie imaginaire. On note \mathbb{H} le demi-espace $\{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$. Dessiner et colorier (en rouge) la région complexe (Δ) de \mathbb{H} définie comme suit.

$$(\Delta) = \left\{ z \in \mathbb{H} : |\Re z| < \frac{1}{2} \text{ et } |z| > 1 \right\}.$$

3 - Quelle est l'image (Δ') de (Δ) par l'application $\Phi : z \in \mathbb{H} \longmapsto -\frac{1}{z} \in \mathbb{H}$? Dessiner cette région (Δ') et la colorier (en jaune).

Exercice 4

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière. On notera R son rayon de convergence qu'on supposera non nul. Sur le cercle $|z| = R$, on ne sait pas en général ce qui se passe : la

série peut converger en certains points et diverger en d'autres. Dans certaines situations on sait donner des réponses.

Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$ converge pour tout $z \neq 1$ avec $|z| = 1$. (Utiliser le critère de convergence d'Abel.)

Exercice 5

Soit p un nombre entier naturel non nul. Considérons la série entière $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^{np}$.

- 1 - Montrer que son rayon de convergence est égal à 1.
- 2 - En quels points du cercle $|z| = 1$ la série f converge-t-elle ?

Exercice 6

Soient p un entier naturel non nul et z_1, \dots, z_p des points sur le cercle (Γ) d'équation $|z| = 1$. Donner un exemple de série entière ayant 1 comme rayon de convergence, divergente sur l'ensemble $\{z_1, \dots, z_p\}$ et convergente en tout autre point de (Γ) .

Exercice 7

Trouver les transformées des figures suivantes par l'application qui au point $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ associe le point $w = \frac{1}{\bar{z}} \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

- 1 - Le cercle $|z - 1| = 1$.
- 2 - Le cercle $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{4}$.
- 3 - Le cercle $|z| = r$.
- 4 - La droite $\Re z = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
- 5 - La famille de toutes les droites parallèles à la première bissectrice.
- 6 - La famille de toutes les droites passant par un point $z_0 \neq 0$.
- 7 - Le triangle de sommets les points $z_0 = 0$, $z_1 = 1$ et $z_2 = i$.

Exercice 8

Pour chacune des fonctions suivantes, donner les 5 premiers termes de son développement en série entière au voisinage de l'origine.

$$f(z) = e^{\frac{z}{1-z}} \qquad g(z) = \sin\left(\frac{1}{1-z}\right) \qquad h(z) = \frac{z}{e^z - 1}$$

$$k(z) = \log(1 + e^z) \qquad \ell(z) = (\cos z)^{\frac{1}{2}} \qquad m(z) = \frac{e^z}{e^z + 1}$$

Exercice 9

Soient I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dira que f est *analytique* si, pour tout $x_0 \in I$, il existe $r > 0$ tel que l'intervalle ouvert $I_r =]x_0 - r, x_0 + r[$ soit contenu dans I et pour tout $x \in I_r$ on ait un développement en série $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.

1 - Montrer que toute fonction polynôme $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ est analytique sur \mathbb{R} tout entier.

2 - Montrer que toute fonction analytique $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^∞ .

3 - Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pour } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est de classe C^∞ mais qu'elle n'est pas analytique.

Exercice 10

Une courbe différentiable $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$ (I intervalle ouvert de \mathbb{R}) dans \mathbb{C} est dite *régulière* au point $\gamma(t_0)$ si son vecteur dérivé $\gamma'(t_0)$ est non nul.

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 . Soient z_0 un point de U , $\varepsilon > 0$ et $\gamma_1, \gamma_2 :]-\varepsilon, +\varepsilon[\rightarrow U$ deux courbes différentiables, régulières au point z_0 et telles que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_0$. On pose $\sigma_1 = f \circ \gamma_1$ et $\sigma_2 = f \circ \gamma_2$. Alors σ_1 et σ_2 sont des courbes différentiables dans \mathbb{C} .

1 - On suppose f holomorphe au voisinage de z_0 et telle que $f'(z_0) \neq 0$. Montrer alors que les angles orientés $(\overrightarrow{\gamma_1'(t_0)}, \overrightarrow{\gamma_2'(t_0)})$ et $(\overrightarrow{\sigma_1'(t_0)}, \overrightarrow{\sigma_2'(t_0)})$ sont égaux.

Une application holomorphe préserve donc les angles orientés entre courbes. Une application différentiable qui préserve les angles est dite *conforme*.

2 - Montrer que toute application différentiable $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ qui préserve les angles orientés est holomorphe. Donner un exemple où on voit que la seule condition "préserve les angles" (mais pas leur orientation) n'est pas suffisante.

Exercice 11

Soient U un ouvert de \mathbb{C} , $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une courbe de classe C^1 donnée par $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$. On rappelle que l'*intégrale* de f le long de γ est le nombre complexe

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b \{f(\gamma(t)) (x'(t) + iy'(t))\} dt.$$

Soit γ un cercle quelconque de centre z_0 et de rayon $\rho > 0$. Calculer cette intégrale pour les fonctions f suivantes :

(i) - f est un polynôme $a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$;

(ii) - $f(z) = \frac{1}{z}$. (Cette situation nécessite une discussion suivant la position de la courbe γ par rapport à l'origine 0.)

Exercice 12

1 - Montrer que toute fonction polynôme $f(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ est holomorphe sur le plan complexe tout entier.

2 - Dire pourquoi les fonctions $\varphi, \psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définies respectivement par $\varphi(z) = \bar{z} = x - iy$ et $\psi(z) = z\bar{z} = x^2 + y^2$ ne sont pas holomorphes mais qu'elles sont analytiques en x et y .

3 - Soit $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ l'application définie par $\phi(x + iy) = (ax + by) + i(cx + dy)$ où a, b, c , et d sont des constantes réelles. Quelles conditions doivent satisfaire a, b, c , et d pour que ϕ soit holomorphe ?

4 - On note \mathbb{H} le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$ et \mathbb{D} le disque unité $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Montrer que l'application $\rho : z \in \mathbb{H} \mapsto \frac{z-i}{z+i} \in \mathbb{C}$ est une bijection holomorphe de \mathbb{H} sur \mathbb{D} .

5 - Donner explicitement la bijection inverse ρ^{-1} de ρ et montrer qu'elle est aussi holomorphe.

Exercice 13

On note z_0 et z_1 respectivement les points 0 et $1 + i$. Soit γ une courbe d'origine z_0 et d'extrémité z_1 . Calculer la valeur de l'intégrale $\int_{\gamma} (1 + i - 2\bar{z})dz$ lorsque γ est :

- le segment qui joint z_0 et z_1 ;
- la portion de parabole d'équation $y = x^2$ qui joint z_0 et z_1 ;
- la ligne polygonale $z_0 w z_1$ où $w = 1$.

Exercice 14

Soient f la fonction $f(z) = z^2 + |z|^2$ et γ le demi-cercle $\{z = e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\}$. Calculer l'intégrale $\int_{\gamma} f(z)dz$.

Exercice 15

On prend la branche de \sqrt{z} pour laquelle $\sqrt{1} = -1$. Soient g la fonction $g(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$ et γ le demi-cercle $\{z = e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\}$. Calculer l'intégrale $\int_{\gamma} g(z)dz$.

Exercice 16

Soient U un ouvert simplement connexe de \mathbb{C} et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique. Rappelons d'abord les résultats importants qui suivent.

i) Soit $\sigma : [0, 1] \rightarrow U$ une courbe fermée C^1 par morceaux. Alors l'intégrale $\int_{\sigma} f(z)dz$ est nulle.

ii) Soient z_0 et z_1 deux points de U et γ une courbe simple C^1 par morceaux d'origine z_0 et d'extrémité z_1 . Alors l'intégrale $\int_{\gamma} f(z)dz$ est indépendante de γ ; elle sera donc notée $\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz$.

iii) Soit $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ une primitive de f (qui existe toujours car U est simplement connexe). On a la formule de Newton-Leibniz :

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = F(z_1) - F(z_0).$$

En utilisant la formule de Newton-Leibniz, calculer les intégrales suivantes :

$$\int_{1-i}^{2+i} (3z^2 + 2z)dz \quad \text{et} \quad \int_0^i z \cos z dz.$$

Exercice 17

Soit U un ouvert connexe de \mathbb{C} . On dira que U est une *couronne* (centrée en z_0) s'il existe des réels r_1 et r_2 tels que $0 < r_1 < r_2$ et $U = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$.

1 - Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Montrer que f est analytique sur U i.e. pour tout $z_0 \in U$, il existe $\rho > 0$ tel que, pour tout $z \in D(z_0, \rho)$ (disque ouvert de centre z_0 et de rayon ρ), on ait :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z - z_0)^n$$

où les f_n sont des nombres complexes qu'on déterminera.

2 - Supposons maintenant que U est une couronne $\{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$. Montrer que, pour tout point $z \in U$, $f(z)$ s'écrit :

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_n(z - z_0)^n$$

où les f_n sont des nombres complexes indépendants de z et qu'on déterminera.

Exercice 18

Soient a et c deux réels strictement positifs tels que $a > c$ et F et F' deux points du plan complexe ayant pour affixes respectifs c et $-c$. On appelle *ellipse* de foyers F et F' et de paramètre a l'ensemble (\mathcal{E}) des points M du plan tels que $MF + MF' = 2a$.

1 - Soit $b \in]0, +\infty[$ tel que $a^2 = b^2 + c^2$. Montrer que (\mathcal{E}) est une courbe fermée ayant pour équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2 - Montrer que (\mathcal{E}) est l'image de $[0, 2\pi]$ par l'application $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ qui à t associe le point d'affixe $\gamma(t) = a \cos t + ib \sin t$.

3 - Soit (Γ) le cercle unité, image de $[0, 2\pi]$ par l'application $\sigma : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{it} \in \mathbb{C}$. Calculer $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$ et $\int_{\sigma} \frac{dz}{z}$ et en déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a \cos t)^2 + (b \sin t)^2}.$$

Exercice 19

Soient $a \in \mathbb{C}$ et $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{a\}$ un chemin fermé. On rappelle que l'*indice* de γ par rapport au point a est le nombre entier :

$$I(\gamma, a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - a}.$$

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue telle que $e^{f(t)} = \gamma(t) - a$; on a alors :

$$I(\gamma, a) = \frac{f(1) - f(0)}{2i\pi}.$$

Soient $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ deux chemins fermés dans \mathbb{C}^* . Pour tout $t \in [0, 1]$, on pose $\gamma(t) = \gamma_1(t)\gamma_2(t)$; on définit ainsi un chemin fermé $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ qu'on appelle *produit* de γ_1 et γ_2 .

1 - Soient $R > 0$ et f une application continue sur le disque fermé $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ et γ sa restriction au cercle $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$. Soit a un point qui n'est pas sur l'image de γ et tel que $I(\gamma, a) \neq 0$. Montrer que f prend au moins une fois la valeur a sur le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$

2 - Montrer que $I(\gamma, 0) = I(\gamma_1, 0) + I(\gamma_2, 0)$.

3 - Soient $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ et $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ deux chemins tels que $|\gamma_1(t)| < |\gamma(t)|$ pour tout $t \in [0, 1]$. Montrer que le chemin $\gamma + \gamma_1$ ne prend jamais la valeur 0 et qu'on a $I(\gamma + \gamma_1, 0) = I(\gamma, 0)$.

Exercice 20

Soit k un nombre réel non nul. On note \mathcal{J} l'inversion dans le plan complexe de pôle l'origine O et de puissance k : à tout point M distinct de O , \mathcal{J} associe le point M' de la droite (OM) tel que $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = k$.

1 - On note z et z' les affixes respectivement de M et M' . Donner l'expression de z' en fonction de z .

2 - Soit Δ une droite affine dans \mathbb{C} . Quelle est l'image Δ' de Δ par \mathcal{J} ?

3 - Soit Γ un cercle dans \mathbb{C} . Quelle est l'image Γ' de Γ par \mathcal{J} ?

4 - Soit $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{C}$ (où ε est un réel strictement positif) une courbe différentiable ayant une tangente Δ au point $M_0 = \gamma(0)$. On note γ' l'image de γ par \mathcal{J} et M'_0 celle de M_0 . Montrer que la courbe γ' admet une tangente Δ' en M'_0 et que Δ et Δ' sont symétriques par rapport à la médiatrice du segment $[M_0M'_0]$.

5 - Montrer que \mathcal{J} est une transformation *conforme* c'est-à-dire elle préserve les angles (entre courbes différentiables). En déduire qu'il en est de même pour toute homographie.

Exercice 21

1 - Trouver les zéros des fonctions qui suivent et leurs multiplicités respectives.

$$f(z) = 1 + \cos z, \quad g(z) = 1 - e^z, \quad h(z) = \frac{z^8}{z - \sin z} \quad \text{et} \quad k(z) = (z^2 + 1)\operatorname{sh} z.$$

2 - Déterminer le caractère des points singuliers des fonctions suivantes.

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z}, \quad g(z) = \frac{\sin z}{z^3 + z^2 - z - 1}$$

et :

$$h(z) = \frac{1 - \cos z}{z^7}, \quad k(z) = (z - 1)e^{\frac{1}{z-1}}.$$

Exercice 22

Pour chacune des fonctions suivantes, préciser ses points singuliers ainsi que leur nature. Déterminer les résidus de ces fonctions en ces points.

$$f(z) = \frac{\sin z^2}{z^3 - \frac{\pi}{4}z^2}, \quad g(z) = \frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}, \quad h(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$$

$$k(z) = \frac{\sin 3z - 3 \sin z}{(\sin z - z) \sin z}, \quad \ell(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}, \quad m(z) = z^3 \sin \frac{1}{z^2}.$$

Exercice 23

Calculer, en utilisant le théorème des résidus, la valeur de chacune des intégrales suivantes.

a) $\int_{\gamma} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz$ où γ est le cercle de centre 0 et de rayon 4.

b) $\int_{\gamma} \operatorname{tg}(z) dz$ où γ est le cercle de centre 0 et de rayon 2.

c) $\int_{\gamma} \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2 + 1} dz$ où γ est le cercle de centre i et de rayon $\frac{3}{2}$.

d) En faisant intervenir le résidu à l'infini, calculer la valeur de l'intégrale $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^4 + 1}$ où γ est le cercle de centre l'origine et de rayon 2.

Exercice 24

En utilisant le théorème des résidus, calculer les valeurs des intégrales :

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^2} dx, \quad a > 0$$

et :

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin(ax)}{x^2 + k^2} dx, \quad a > 0 \text{ et } k > 0.$$

Exercice 25

1 - Montrer que l'intégrale $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2 - En utilisant la question qui précède, calculer les intégrales suivantes dites *intégrales de Fresnel* :

$$I_1 = \int_0^{\infty} \cos x^2 dx \quad \text{et} \quad I_2 = \int_0^{\infty} \sin x^2 dx.$$

Exercice 26

Soit a un nombre réel tel que $0 < a < 1$. Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx.$$

Exercice 27

La formule qui suit est intéressante dans les calculs de sommes de séries :

Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$ où z_1, \dots, z_k sont des complexes qui n'appartiennent pas à \mathbb{Z} . Supposons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $|z^2 f(z)| \leq C$ pour $|z|$ assez grand. Alors :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} f(n) = -\pi \sum_{j=1}^k \text{Rés} (f(z) \cotg(\pi z), z_j).$$

Soit a un nombre réel non nul. Calculer la somme de la série :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}.$$

Exercice 28

Soient r et R deux nombres réels tels que $0 < r < R$ et D la demi-couronne fermée du plan complexe $\{z \in \mathbb{C} : r \leq |z| \leq R \text{ et } \Im z \geq 0\}$. On note Γ le bord de D orienté en passant successivement par les points $r, R, -R$ et $-r$ et Γ' et Γ'' les parties de Γ contenues dans les cercles centrés à l'origine et de rayons respectifs r et R . Soit $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$f(z) = \frac{3e^{iz} - e^{3iz}}{z^3}.$$

- 1 - Calculer l'intégrale de f le long de Γ .
- 2 - Montrer que l'intégrale de f le long de Γ'' tend vers 0 quand R tend vers l'infini.
- 3 - Quel est le résidu de f à l'origine ? En déduire la limite de l'intégrale de f le long de Γ' lorsque r tend vers 0.
- 4 - En utilisant ce qui précède, calculer l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{3 \sin x - \sin(3x)}{x^3} dx.$$

Exercice 29

Pour tout $w \in \mathbb{C}$, $\Re w$ désignera sa partie réelle ; on note $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ le disque unité ouvert de \mathbb{C} et $\overline{\Delta}$ son adhérence. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U contenant $\overline{\Delta}$. On définit les fonctions $A, M : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)| \quad \text{et} \quad A(r) = \sup_{|z|=r} \Re f(z).$$

- 1 - Montrer, en utilisant le principe du maximum, que la fonction M est croissante et qu'elle est strictement croissante si f n'est pas constante.

2 - Montrer que, pour tout $r \in [0, 1]$, on a :

$$A(r) = \log \left(\sup_{|z|=r} |e^{f(z)}| \right).$$

En déduire que la fonction A est croissante et qu'elle est strictement croissante si f n'est pas constante.

3 - On suppose que f n'est pas constante et que $f(0) = 0$. Montrer que la fonction définie par $g(z) = \frac{f(z)}{2A(1)-f(z)}$ est holomorphe sur Δ et qu'elle vérifie $|g(z)| < 1$ pour tout $z \in \Delta$. En déduire, en utilisant le lemme de Schwarz que, pour tout $r \in [0, 1[$, on a :

$$M(r) \leq \frac{2r}{1-r} A(1).$$

Exercice 30

On note \mathbb{H} le demi-plan supérieur $\{z = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ et \mathbb{D} le disque unité ouvert $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. À tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ on associe $z' \in \mathbb{C}$ tel que $z' = h(z) = \frac{z-i}{z+i}$.

1 - Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{H}$, $z' \in \mathbb{D}$.

2 - Montrer que h est un biholomorphisme de \mathbb{H} sur \mathbb{D} .

3 - On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. Calculer x et y en fonction de x' et y' .

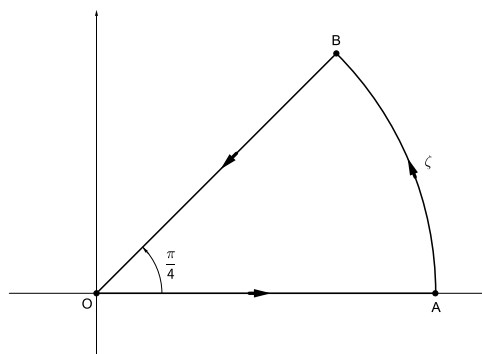
4 - Soient Δ la droite d'équation $y = \beta$ avec $\beta \in \mathbb{R}_+$ et Γ le cercle de centre $z_0 = i$ et de rayon $\rho \in]0, 1[$. Quelles sont les images Δ' et Γ' respectivement de Δ et Γ par la transformation h ?

Exercice 31

Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(z) = e^{iz^2}$. On note A le point de coordonnées $(R, 0)$ avec $R \in \mathbb{R}_+$ et γ_R le cercle de centre l'origine et de rayon R .

1 - Calculer l'intégrale de f sur le chemin fermé Γ constitué du segment \overline{OA} , l'arc AB (morceau du cercle γ_R) et le segment BO (cf. dessin qui suit).

2 - On rappelle que $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. En décomposant le calcul de l'intégrale $\int_\Gamma f(z) dz$ sur les trois morceaux constituant le contour Γ et en faisant tendre R vers $+\infty$, montrer que les intégrales $\int_0^\infty \cos(x^2) dx$ et $\int_0^\infty \sin(x^2) dx$ convergent et donner leurs valeurs respectives.



SURFACES RIEMANNIENNES

CHAPITRE I

SURFACES DIFFÉRENTIABLES

L'espace euclidien \mathbb{R}^2 a une particularité parmi certains espaces topologiques : il possède des coordonnées globales (x_1, x_2) . Celles-ci permettent d'y faire de l'analyse. Mais d'autres n'ayant aucune structure linéaire se comportent toutefois localement comme \mathbb{R}^2 ; on les appelle *surfaces différentiables*. L'objet de ce chapitre est d'en donner la définition, de décrire certaines de leurs propriétés et les divers objets qui leur sont rattachés.

1. Définitions et exemples

Dans ce paragraphe M sera un espace topologique paracompact *i.e.* M est séparé et tel que tout recouvrement ouvert $\{U_i\}$ admet un recouvrement ouvert $\{V_j\}$ plus *fin* (tout V_j est contenu dans un U_i) et *localement fini* (tout compact ne coupe qu'un nombre fini d'ouverts V_j).

1.1. Définition. *On dira que M est une **surface topologique** si tout point $x \in M$ possède un voisinage ouvert U homéomorphe à \mathbb{R}^2 i.e. il existe une application bijective $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow U$ telle que φ et son inverse φ^{-1} soient continues.*

Pour connaître un point x de U , il suffit donc de connaître les coordonnées (x_1, x_2) dans \mathbb{R}^2 de son image réciproque $\varphi^{-1}(x)$. Pour cette raison, on dira que U est un *ouvert de coordonnées locales* de M au voisinage de x . La paire (U, φ) est appelée *carte locale* et $(x_1, x_2) = \varphi^{-1}(x)$ seront les *coordonnées* de x . Si (U, φ) et (V, ψ) sont deux cartes locales telles que l'intersection $U \cap V$ soit non vide, alors un point $x \in U \cap V$ sera repéré par ses coordonnées (x_1, x_2) dans U et ses coordonnées (x'_1, x'_2) dans V . Comme le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \varphi^{-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\varphi} & U \cap V \\ \downarrow & & \parallel \\ \psi^{-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\psi} & U \cap V \end{array}$$

est commutatif, on doit avoir :

$$(I.1) \quad (x'_1, x'_2) = \psi^{-1} \circ \varphi(x_1, x_2).$$

L'application $\psi^{-1} \circ \varphi$ est appelée *changement de coordonnées* de la carte (U, φ) à la carte (V, ψ) . Souvent, on a besoin d'une certaine régularité de cette application ; ce qui nous amène à définir la notion de *surface différentiable*. Dorénavant M sera une surface topologique.

1.2. Définition. *Deux cartes locales (U, φ) et (V, ψ) sont dites **compatibles** si l'une des conditions suivantes est remplie :*

- i) $U \cap V = \emptyset$,
- ii) $U \cap V \neq \emptyset$ et $\psi^{-1} \circ \varphi$ est un difféomorphisme de classe C^∞ ; ceci a un sens car cette application est définie sur un ouvert de \mathbb{R}^2 et est à valeurs dans \mathbb{R}^2 .

Un ensemble de cartes locales $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ sur M est appelé *atlas* si $(U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement de M et si deux cartes quelconques (U_i, φ_i) et (U_j, φ_j) sont compatibles.

Deux atlas $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ et $(V_j, \psi_j)_{j \in J}$ sont dits *équivalents* si leur réunion est un atlas *i.e.* pour tout $i \in I$ et tout $j \in J$, les cartes (U_i, φ_i) et (V_j, ψ_j) sont compatibles.

1.3. Définition. Une classe d'équivalence d'atlas est appelée **structure différentiable** sur M . On dira que M est une surface différentiable.

(Pour simplifier, dans toute la suite on dira simplement "surface" au lieu de "surface différentiable".)

Tout ouvert non vide d'une surface est une surface.

Une surface M est dite *orientable* si elle peut être définie à l'aide d'un atlas (U_i, φ_i) pour lequel les difféomorphismes (I.1) préservent l'orientation de \mathbb{R}^2 : pour $x \in U_i \cap U_j$, le déterminant de l'application linéaire $d(\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i)(\varphi_i^{-1}(x))$ est strictement positif.

Une surface M est dite *connexe, compacte...* si l'espace topologique sous-jacent M est connexe, compact...

Dans toute la suite de cette section on ne considérera que les surfaces connexes.

1.4. Exemples

Souvent nous ne spécifierons que la manière d'obtenir les cartes. Le lecteur peut vérifier lui-même leur compatibilité. On peut obtenir des exemples de différentes manières. Mais il est clair que le premier est l'espace \mathbb{R}^2 lui-même puisqu'il constitue le *modèle local*.

i) Surfaces de \mathbb{R}^3

Une application différentiable $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ est dite de *rang constant* si le rang de l'application linéaire $d_x f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ (différentielle de f au point x) ne dépend pas de x , donc égal à 0 ou 1. On dira que f est une *submersion* si pour tout $x \in M$, $d_x f$ est surjective, donc de rang 1. Pour tout $c \in f(\mathbb{R}^3)$, posons :

$$M = \{x \in \mathbb{R}^3 : f(x) = c\}.$$

Supposons que f est une submersion. On montre alors, par le *théorème des fonctions implicites*, que M est une surface. On dira que f est une *fonction définissant M* .

On appelle *surface* de \mathbb{R}^3 toute partie fermée M telle que, pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x et une application différentiable $U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ définissant $M \cap U$.

ii) La sphère \mathbb{S}^2

C'est la partie fermée de \mathbb{R}^3 : $\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$. C'est évidemment une surface de \mathbb{R}^3 définie par une submersion ; mais on peut voir aussi sa structure de surface en exhibant explicitement un atlas. Considérons le recouvrement ouvert suivant $U_1 = \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ et $U_2 = \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$ où N et S sont respectivement le *pôle nord* et le *pôle sud* de la sphère. Alors l'application $\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow U_1 \subset \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\varphi_1(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_1}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{2x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{-1 + x_1^2 + x_2^2}{1 + x_1^2 + x_2^2} \right)$$

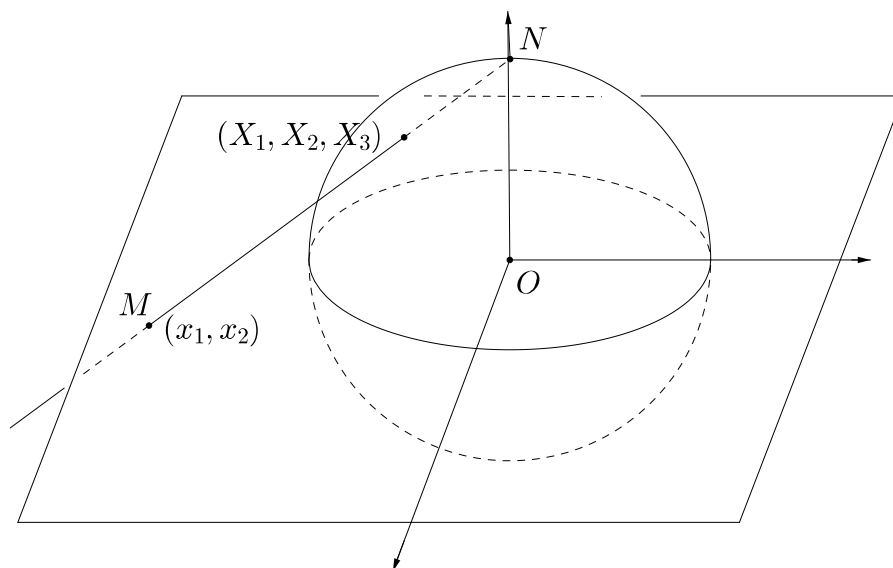


Fig. I.1

est un homéomorphisme de \mathbb{R}^2 sur U_1 . L'application inverse est donnée par :

$$\varphi_1^{-1}(X_1, X_2, X_3) = \left(\frac{X_1}{1 - X_3}, \frac{X_2}{1 - X_3} \right)$$

De même l'application $\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow U_2$ donnée par :

$$\varphi_2(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_1}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{2x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{1 - x_1^2 - x_2^2}{1 + x_1^2 + x_2^2} \right)$$

est aussi un homéomorphisme ; l'inverse $\varphi_2^{-1} : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a pour expression :

$$\varphi_2^{-1}(X_1, X_2, X_3) = \left(\frac{X_1}{1 + X_3}, \frac{X_2}{1 + X_3} \right).$$

L'application de changement de cartes :

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} = \varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$$

s'écrit :

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right)$$

qui est clairement différentiable ainsi que son inverse. Nous avons donc exhibé de façon explicite un atlas de la sphère \mathbb{S}^2 . Les applications φ_1^{-1} et φ_2^{-1} sont appelées *projections stéréographiques* de pôles respectifs N et S .

2. Applications différentiables

2.1. Définition. On dira qu'une application $f : M \rightarrow N$ entre deux surfaces est **différentiable** au point $x \in M$ si, pour toute carte locale (U, φ) de M contenant x , toute

carte locale (V, ψ) de N contenant $f(x)$ et tout voisinage ouvert W de x contenu dans U et tel que $f(W) \subset V$, l'application :

$$(I.2) \quad \psi^{-1} \circ f \circ \varphi : \varphi^{-1}(W) \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \psi^{-1}(V) \subset \mathbb{R}^2$$

est différentiable. On dira que f est **différentiable**, si elle est différentiable en tout point de M .

En particulier, on dira qu'une fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ est *différentiable* si, pour toute carte locale (U, φ) , la fonction :

$$f \circ \varphi : \varphi^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow U \longrightarrow \mathbb{R}$$

est différentiable. La dérivée partielle de $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ sera donc par définition :

$$(I.3) \quad \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial x_k}(\varphi^{-1}(x)).$$

Si l'application f est différentiable, bijective et f^{-1} différentiable, on dira que f est un *difféomorphisme* de M sur N .

On notera $C^\infty(M, N)$ l'ensemble des applications différentiables de M dans N et simplement $C^\infty(M)$ lorsque $N = \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) ; ce dernier est une algèbre pour la multiplication des fonctions. L'ensemble des difféomorphismes d'une surface est un groupe (pour la composition des applications) noté $\text{Diff}(M)$.

2.2. Partition de l'unité.

C'est l'un des instruments les plus puissants en Analyse ; il permet de recoller des objets définis localement en objets globaux.

Soient M une surface et $\rho : M \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction. On appelle *support* de ρ et on note $\text{supp}(\rho)$ l'adhérence de l'ensemble $\{x \in M : \rho(x) \neq 0\}$.

Soit $\mathcal{U} = (U_i)_i$ un recouvrement ouvert de M . On dira que \mathcal{U} est *localement fini* si tout point $x \in M$ possède un voisinage qui ne rencontre qu'un nombre fini d'ouverts de la famille \mathcal{U} . Sur une surface (paracompacte comme cela a été supposé avant) un tel recouvrement existe toujours ; on peut même le choisir dénombrable.

Soit $\mathcal{U} = (U_i)_i$ un recouvrement localement fini sur M . On appelle *partition de l'unité subordonnée* à \mathcal{U} une famille de fonctions réelles différentiables positives $(\rho_i)_i$ telles que :

- pour tout $i \in I$, $\text{supp}(\rho_i)$ est contenu dans U_i ,
- $\sum_{i \in I} \rho_i = 1$.

Proposition. *Tout recouvrement localement fini $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ admet une partition de l'unité différentiable $(\rho_i)_{i \in I}$.*

3. Espaces tangents

Soient M une surface et $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ un atlas définissant M . On a vu qu'une fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable si, pour tout $i \in I$, la fonction :

$$f \circ \varphi_i : \varphi_i^{-1}(U_i) \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow U_i \longrightarrow \mathbb{R}$$

est différentiable et que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ est donnée par :

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial(f \circ \varphi_i)}{\partial x_k}(\varphi_i^{-1}(x)).$$

Pour tout $k = 1, 2$, on obtient donc un opérateur $\frac{\partial}{\partial x_k}$ qui à toute fonction différentiable f sur U_i associe la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_k}$. En chaque point $x \in U_i$, les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \frac{\partial}{\partial x_2}(x)$ sont linéairement indépendants. Si (U_j, φ_j) est une autre carte locale de système de coordonnées (x'_1, x'_2) un point $x \in U_i \cap U_j$ est repéré par ses coordonnées (x_1, x_2) dans U_i et ses coordonnées (x'_1, x'_2) dans U_j et on a :

$$(x'_1, x'_2) = \varphi_{ij}(x_1, x_2)$$

avec $\varphi_{ij} = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$. Il est alors facile de montrer que, pour tout $k = 1, 2$, on a :

$$(I.4) \quad \frac{\partial}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial x'_1}{\partial x_k}(x) \frac{\partial}{\partial x'_1}(x) + \frac{\partial x'_2}{\partial x_k}(x) \frac{\partial}{\partial x'_2}(x).$$

En tout point $x \in M$, les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \frac{\partial}{\partial x_2}(x)$ engendrent donc sur \mathbb{R} un espace vectoriel de dimension 2 indépendant de la carte choisie (U_i, φ_i) pour le définir.

3.1. Définition. On appelle **espace tangent** à M en x , l'espace vectoriel $T_x M$ engendré par les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \frac{\partial}{\partial x_2}(x)$ à l'aide d'une carte quelconque (U_i, φ_i) .

Pour les surfaces M de \mathbb{R}^3 , on peut percevoir de manière très concrète la notion d'espace tangent. Si M est une surface de \mathbb{R}^3 définie localement sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^3$ par une équation du type $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ où $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ est C^∞ , alors l'espace tangent à M au point $a = (a_1, a_2, a_3)$ est le noyau de la forme affine sur \mathbb{R}^3 :

$$(I.5) \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \frac{\partial F}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(a)(x_2 - a_2) + \frac{\partial F}{\partial x_3}(a)(x_3 - a_3).$$

Par exemple la sphère \mathbb{S}^2 de \mathbb{R}^3 est définie par l'équation $F(x_1, x_2, x_3) = 1 - \sum_{k=1}^3 x_k^2 = 0$ et a pour espace tangent au point $a = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ le plan affine de \mathbb{R}^3 d'équation :

$$x_1 + x_2 + x_3 = \sqrt{3}.$$

Pour tout $x \in M$, $T_x M$ est un espace vectoriel réel mais il dépend du point par lequel il "passe". On définit l'ensemble TM comme suit :

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M.$$

Un élément de TM est la donnée d'un couple (x, u_x) où x est un point de M et u_x un vecteur de $T_x M$. On a une projection canonique $\pi : TM \rightarrow M$ définie par $\pi(x, u_x) = x$.

3.2. Définition. On appelle **champ de vecteurs** sur M toute application $X : M \rightarrow TM$ telle que, sur toute carte locale (U, φ) , X s'écrit $X(x) = f_1(x) \frac{\partial}{\partial x_1}(x) + f_2(x) \frac{\partial}{\partial x_2}(x)$ où $f_1, f_2 : U \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions C^∞ .

L'ensemble $\mathfrak{X}(M)$ des champs de vecteurs sur M est un module sur l'anneau $C^\infty(M)$ des fonctions de classe C^∞ . On peut y définir une structure multiplicative de la façon suivante : soient X et Y deux champs de vecteurs sur M qu'on peut écrire sur la carte locale (U, φ) :

$$X(x) = f_1(x) \frac{\partial}{\partial x_1}(x) + f_2(x) \frac{\partial}{\partial x_2}(x) \quad \text{et} \quad Y(x) = g_1(x) \frac{\partial}{\partial x_1}(x) + g_2(x) \frac{\partial}{\partial x_2}(x).$$

Un calcul facile montre que pour toute fonction $h : M \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^∞ , on a :

$$X(Y(h)) - Y(X(h)) = \sum_{k,\ell} \left(f_k \frac{\partial g_\ell}{\partial x_k} \frac{\partial h}{\partial x_\ell} - g_\ell \frac{\partial f_k}{\partial x_\ell} \frac{\partial h}{\partial x_k} \right).$$

On définit ainsi un nouveau champ (local) de vecteurs $XY - YX$; on montre que ceci ne dépend pas de la carte choisie ; on obtient alors un champ de vecteurs global $XY - YX$ qu'on note $[X, Y]$ et qu'on appelle *crochet* de X et Y ; $[X, Y]$ est le commutateur de X et Y vus comme opérateurs (*différentiels d'ordre 1*) sur $C^\infty(M)$. On vérifie facilement l'identité suivante dite *identité de Jacobi* :

$$(I.6) \quad [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

On dira que $(\mathfrak{X}(M), [,])$ est l'*algèbre de Lie* des champs de vecteurs sur M .

3.3. Application tangente

Soit h une application différentiable d'une surface M dans une autre surface N . On supposera que M et N sont définies par les atlas respectifs $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ et $(V_j, \psi_j)_{j \in J}$ et, pour ne pas alourdir les notations, on fera comme si les ouverts de coordonnées U_i et V_j étaient en fait l'espace euclidien \mathbb{R}^2 . Pour tout $x \in M$ de coordonnées (x_1, x_2) , l'application h définit une application linéaire :

$$(I.7) \quad d_x h : T_x M \longrightarrow T_{h(x)} N$$

qui à tout opérateur $\frac{\partial}{\partial x_k}(x)$, $k = 1, 2$, associe l'opérateur $d_x h \left(\frac{\partial}{\partial x_k}(x) \right)$ donné sur une fonction $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$(I.8) \quad d_x h \left(\frac{\partial}{\partial x_k}(x) \right) (f) = \frac{\partial y_1}{\partial x_k}(x) \frac{\partial f}{\partial y_1}(h(x)) + \frac{\partial y_2}{\partial x_k}(x) \frac{\partial f}{\partial y_2}(h(x))$$

où (y_1, y_2) sont les coordonnées du point $h(x)$ pour tout $x \in M$. On peut vérifier que la définition de l'application $d_x h$ ne dépend pas du système de coordonnées locales. On l'appelle *application tangente* à h au point $x \in M$.

4. Actions de groupes

Nous présentons de manière brève la notion d'action d'un groupe. Elle sert, entre autres, à construire des exemples divers de surfaces.

Soit M une surface munie d'une relation d'équivalence \mathcal{R} . Pour tout $x \in M$, on notera \mathcal{O}_x sa classe d'équivalence. Si U est une partie de M , $\text{Sat}(U)$ sera son *saturé i.e.*

$\text{Sat}(A) = \bigcup_{x \in A} \mathcal{O}_x$. On dira que \mathcal{R} est *ouverte* si, pour tout ouvert U de M , $\text{Sat}(U)$ est un ouvert de M . Soient \mathcal{R} une telle relation d'équivalence, $B = M/\mathcal{R}$ le quotient et notons $\pi : M \rightarrow B$ la projection canonique. On munit B de la *topologie quotient* : V est un ouvert de B si, et seulement si, $\pi^{-1}(V)$ est un ouvert de M . Cette topologie sur B rend la projection π continue.

Soient Γ un groupe dénombrable discret (cela signifie qu'il est muni de la topologie discrète *i.e.* tout singleton $\{\gamma\}$ est un ouvert) et M une surface. On notera $\text{Diff}(M)$ le groupe des difféomorphismes de M .

4.1. Définition. Une **action** de Γ sur M est une application continue $\Phi : \Gamma \times M \rightarrow M$ telle que :

- i) $\Phi(e, x) = x$ pour tout $x \in M$, e étant l'élément neutre de Γ ;
- ii) $\Phi(\gamma\gamma', x) = \Phi(\gamma, \Phi(\gamma', x))$ pour tous $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ et tout point $x \in M$;
- iii) pour tout $\gamma \in \Gamma$, l'application partielle $\Phi(\gamma, \cdot) : x \in M \rightarrow \Phi(\gamma, x) \in M$ est un élément de $\text{Diff}(M)$.

La donnée d'une action Φ de Γ sur M permet de définir une *représentation* de Γ dans le groupe $\text{Diff}(M)$ *i.e.* un morphisme de groupes $\rho : \gamma \in \Gamma \mapsto \Phi(\gamma, \cdot) \in \text{Diff}(M)$. Tout élément $\gamma \in \Gamma$ sera confondu avec $\rho(\gamma)$ et pour tout point $x \in M$, $\rho(\gamma)(x) = \Phi(\gamma, x)$ sera noté simplement γx . L'ensemble $\mathcal{O}_x = \{\gamma x : \gamma \in \Gamma\}$ est appelé *orbite* de x .

- i) On dira que $x \in M$ est un *point fixe* de Φ si $\gamma x = x$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. L'ensemble $\text{Fix}(\Phi)$ des points fixes de Φ est un fermé de M .
- ii) Pour tout $x \in M$, posons $\Gamma_x = \{\gamma \in \Gamma : \gamma x = x\}$; alors Γ_x est un sous-groupe de Γ appelé *groupe d'isotropie* de x .
- iii) On dira que l'action Φ est *libre* si, pour tout $x \in M$, $\Gamma_x = \{e\}$.
- iv) Une partie M_0 de M est dite *invariante* par Φ si, pour tout $x \in M_0$, l'orbite \mathcal{O}_x est entièrement contenue dans M_0 . On dira que Φ est *transitive* s'il existe x tel que l'orbite \mathcal{O}_x soit égale à M . (Ceci sera donc vrai pour tout $x \in M$.)

Toute action Φ de Γ sur M définit une *relation d'équivalence* \mathcal{R} :

$$(I.9) \quad x \mathcal{R} y \iff \text{il existe } \gamma \in \Gamma \text{ tel que } y = \gamma x.$$

Cette relation d'équivalence est ouverte car, pour tout ouvert U de M , son saturé est :

$$\text{Sat}(U) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma U$$

qui est un ouvert car, pour tout γ , γU est ouvert puisque γ est un difféomorphisme. On munit $B_\Phi = M/\Phi = M/\mathcal{R}$ de la topologie quotient. On dira que l'action $\Phi : \Gamma \times M \rightarrow M$ est :

- v) *totalelement discontinue* si tout point $x \in M$ admet un voisinage ouvert U tel que, pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ distincts, on ait $\gamma_1 U \cap \gamma_2 U = \emptyset$;
- vi) *séparante* si tous points $x, y \in M$ non équivalents admettent des voisinages ouverts respectifs U et V tels que, pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, on ait $\gamma_1 U \cap \gamma_2 V = \emptyset$;

vii) *propre* si, pour tout compact $K \subset M$, l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma : \gamma K \cap K \neq \emptyset\}$ est fini.

Si Γ est fini et agit librement, alors il agit de façon séparante et totalement discontinue (démonstration laissée au lecteur).

On dira que deux actions Φ_1 et Φ_2 définies respectivement sur les variétés M_1 et M_2 sont *conjuguées*, s'il existe un difféomorphisme $h : M_1 \rightarrow M_2$ tel que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, le diagramme suivant commute :

$$(I.10) \quad \begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{\Phi_1(\gamma, \cdot)} & M_1 \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ M_2 & \xrightarrow{\Phi_2(\gamma, \cdot)} & M_2. \end{array}$$

Dans toute la suite de cette section, Γ sera un groupe topologique, dénombrable et discret. Dans ce cas, si Γ agit librement et proprement, il agit de façon séparante et totalement discontinue.

4.2. Proposition. *Soient M une surface et Φ une action libre et propre de Γ sur M . Alors le quotient $B_\Phi = M/\Phi$ est une surface et la projection canonique $\pi : M \rightarrow X$ est un difféomorphisme local i.e. tout point $x \in M$ admet un voisinage ouvert U tel que la restriction $\pi : U \rightarrow \pi(U)$ soit un difféomorphisme. Si Ψ est une action conjuguée à Φ , les surfaces B_Φ et B_Ψ sont difféomorphes.*

Il est souvent utile de savoir s'il existe une partie d'une surface M (géométriquement intéressante) qui contient le moins possible d'éléments dans chaque orbite. Ceci nous amène à la définition qui suit.

4.3. Définition. *Soit Φ une action propre et discontinue de Γ sur une surface M . On appelle **domaine fondamental** de cette action toute partie fermée Δ de M telle que :*

- i) $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\Delta) = M$,
- ii) $\text{int}(\Delta) \cap \text{int}(\gamma\Delta) = \emptyset$ pour tout $\gamma \neq \text{identité}$.

L'ensemble $\partial\Delta = \Delta \setminus \text{int}(\Delta)$ est le *bord* du domaine fondamental ; il est de mesure nulle (pour la mesure canonique de M : celle donnée par la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^2 à l'aide des cartes locales). La surface quotient $X = M/\Gamma$ est obtenue à partir de Δ en identifiant les points de $\partial\Delta$ qui sont Γ -équivalents.

Proposition. *Toute action propre et discontinue de Γ sur une surface M admet un domaine fondamental. Ce domaine est compact si, et seulement si, $X = M/\Gamma$ l'est.*

4.4. Quelques exemples

i) Soient $M = \mathbb{R}^2$ et $\Gamma = \mathbb{Z}^2$, $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ un vecteur de \mathbb{R}^2 dont les composantes sont toutes non nulles. On définit une action $\Phi : \Gamma \times M \rightarrow M$ par $\Phi(q, x) = x + \tau q$ où $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $q = (q_1, q_2) \in \mathbb{Z}^2$ et $q\tau = (q_1\tau_1, q_2\tau_2)$. Alors Φ est une action libre et propre ; le quotient M/Γ est une surface. La structure différentiable sur M/Γ ne dépend pas du τ choisi. Cette variété est appelée *tore* et est notée \mathbb{T}^2 ; elle est obtenue en identifiant, deux à deux, les côtés opposés d'un parallélogramme (qui est le domaine fondamental de l'action) en respectant l'orientation (de ces côtés) (cf. Fig. I.2).

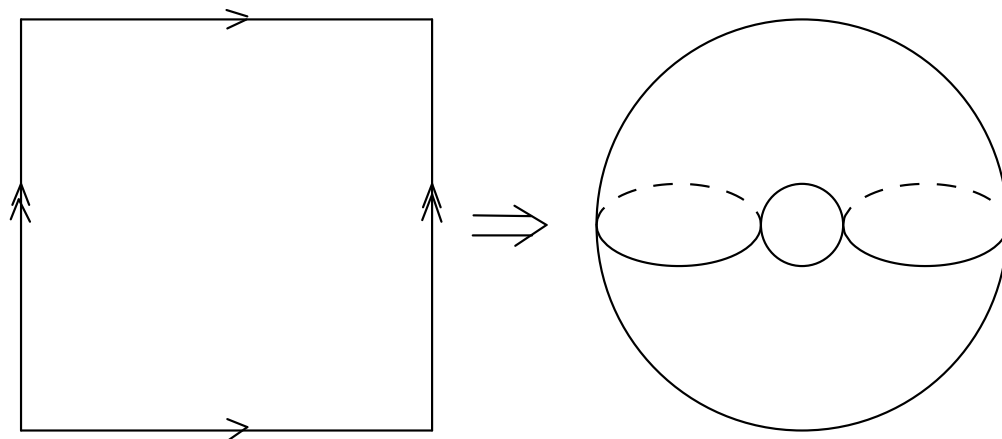


Fig. I.2

ii) Soient M la sphère \mathbb{S}^2 , ensemble des vecteurs de l'espace \mathbb{R}^3 vérifiant la relation $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ et Γ le groupe multiplicatif $\{1, -1\}$ (qu'on peut aussi identifier au groupe additif $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) ; Γ agit sur \mathbb{S}^2 de la façon suivante :

$$\Phi : (\gamma, x) \in \Gamma \times \mathbb{S}^2 \mapsto \gamma x \in \mathbb{S}^2.$$

L'action Φ est libre et le quotient \mathbb{S}^2/Γ est une surface non orientable ; c'est l'espace projectif $P^2(\mathbb{R})$.

CHAPITRE II

SURFACES RIEMANNIENNES

Dans ce chapitre nous introduisons la notion de *métrie riemannienne* sur une surface et nous en donnons quelques exemples.

1. Métriques riemanniennes

Soit M une surface définie par un atlas $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$. Pour tout $x \in M$, $T_x M$ est un espace vectoriel réel de dimension 2. Soient $T_x^* M$ le dual de $T_x M$ et $T^* M = \bigcup_{x \in M} T_x^* M$. Sur une carte locale (U, φ) de coordonnées (x_1, x_2) , $\frac{\partial}{\partial x_1}(x)$ et $\frac{\partial}{\partial x_2}(x)$ sont des vecteurs tangents à M au point x ; notons dx_1 et dx_2 les éléments de $T_x^* M$ définis par :

$$dx_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x) \right) = 1, \quad dx_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_2}(x) \right) = 0, \quad dx_2 \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x) \right) = 0, \quad dx_2 \left(\frac{\partial}{\partial x_2}(x) \right) = 1.$$

Une 1-forme différentielle sur M est une application $\omega : M \rightarrow T^* M$ qui à tout x associe une forme linéaire ω_x sur $T_x M$ de telle sorte que, sur toute carte (U, φ) de coordonnées locales (x_1, x_2) , ω s'écrive :

$$\omega(x) = \omega_1(x)dx_1 + \omega_2(x)dx_2$$

où ω_1 et ω_2 sont des fonctions C^∞ sur U .

Soit $S^2 T_x M$ l'espace vectoriel réel des formes bilinéaires symétriques sur $T_x M$ i.e. les applications $\varphi : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

- i) les applications partielles $\varphi(u, \cdot) : v \rightarrow \varphi(u, v)$ et $\varphi(\cdot, v) : u \rightarrow \varphi(u, v)$ soient linéaires ;
- ii) pour tous $u, v \in T_x M$, $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$.

Tout endomorphisme $\gamma_x : T_x M \rightarrow T_x M$ induit un endomorphisme de $S^2 T_x M$ noté γ_x^* défini par $\gamma_x^*(\varphi)(u, v) = \varphi(\gamma_x(u), \gamma_x(v))$ pour $\varphi \in S^2 T_x M$ et $u, v \in T_x M$. Posons :

$$\mathcal{S}^2 = \bigcup_{x \in M} S^2 T_x M$$

L'ensemble \mathcal{S}^2 est constitué des couples $(x, g(x))$ où $x \in M$ et $g(x)$ une forme bilinéaire symétrique.

Par exemple, deux 1-formes α et β sur M permettent de définir une 2-forme symétrique sur M notée $\alpha \otimes \beta$ par $(\alpha \otimes \beta)(u, v) = \alpha(x)(u)\beta(x)(v)$ pour $u, v \in T_x M$. On dira que $\alpha \otimes \beta$ est le produit tensoriel de α et β .

1.1. Définition. Une *métrie riemannienne* sur M est une application $g : M \rightarrow \mathcal{S}^2$ où, pour tout $x \in M$, $g(x)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive et telle que, sur toute carte (U, φ) de coordonnées locales (x_1, x_2) , g s'écrive :

$$g(x) = g_{11}(x)dx_1 \otimes dx_1 + g_{12}(x)dx_1 \otimes dx_2 + g_{21}(x)dx_2 \otimes dx_1 + g_{22}(x)dx_2 \otimes dx_2$$

avec $g_{12} = g_{21}$ et les $g_{k\ell}$ sont des fonctions C^∞ sur U .

Cela signifie que, pour tout $x \in M$, $g(x)$ est un produit scalaire sur $T_x M$ et que la famille $(g(x))_{x \in M}$ varie de manière C^∞ en x . Les fonctions $g_{k\ell}$ sont définies par les formules :

$$g_{k\ell}(x) = g(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_k}(x), \frac{\partial}{\partial x_\ell}(x) \right) \quad \text{avec} \quad k, \ell = 1, 2.$$

1.2. Construction de métriques

Nous allons donner une construction explicite des métriques riemanniennes en utilisant la structure différentiable de M décrite à l'aide d'un atlas $\mathcal{U} = (U_i, \varphi_i)_{i \in I}$; ceci montrera en particulier que de tels objets existent toujours. On supposera que le recouvrement (U_i) est *localement fini* (i.e. tout point de M admet un voisinage compact qui ne rencontre qu'un nombre fini d'ouverts U_i).

Soit (U, φ) un élément de l'atlas \mathcal{U} . Pour la structure différentiable usuelle sur \mathbb{R}^2 , l'homéomorphisme $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow U$ est un difféomorphisme de classe C^∞ . Pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, l'application $d_x \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_{\varphi(x)} U$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^2 ; pour tous $u, v \in T_{\varphi(x)} U$ on pose :

$$g(x)(u, v) = \langle \varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(v) \rangle.$$

Soit (x_1, x_2) un système de coordonnées sur U . Alors en chaque point $x \in U$, g a pour expression :

$$(II.1) \quad g(x) = \sum_{k, \ell=1}^2 g_{k\ell}(x) dx_k \otimes dx_\ell$$

qui n'est rien d'autre que celle donnée dans la définition 1.1.

Notons g_i la métrique riemannienne sur U_i que l'on vient de construire. Soit $(\rho_i)_{i \in I}$ une partition de l'unité C^∞ subordonnée au recouvrement $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$. Pour tout $x \in M$ on pose :

$$g(x) = \sum_{i \in I} \rho_i(x) g_i(x).$$

Il est facile de vérifier que g ainsi définie est une métrique riemannienne sur M . Une surface M munie d'une métrique riemannienne g est appelée *surface riemannienne* ; elle sera notée (M, g) .

Soient (M, g) et (N, h) deux surfaces riemanniennes et $\varphi : M \rightarrow N$ une application de classe C^∞ .

1.3. Définition. On dira que φ est une **isométrie locale** si, pour tout point $x \in M$ et tous vecteurs u et v tangents à M en x , on a :

$$h(y)(d_x \varphi(u), d_x \varphi(v)) = g(x)(u, v)$$

où $y = \varphi(x)$. Ceci signifie que l'application linéaire $d_x \varphi : T_x M \rightarrow T_y N$ est une isométrie. Si en plus φ est bijective, on dira que φ est une **isométrie** de (M, g) sur (N, h) .

L'ensemble des isométries de la surface riemannienne (M, g) forment un groupe pour la composition des applications ; on le note $\text{Isom}(M, g)$.

1.4. Longueur d'une courbe

On appelle *courbe différentiable* dans une surface M toute application γ continue d'un intervalle ouvert I de \mathbb{R} dans M ; on dira que γ est C^1 *par morceaux* s'il existe une partition dénombrable de I en intervalles I_n tels que la restriction de γ à l'intérieur de chacun des I_n soit une courbe de classe C^1 . On appelle *champ de vecteurs le long d'une courbe* $\gamma : I \rightarrow M$ toute application différentiable qui à tout $t \in I$ associe un vecteur tangent $X(t) \in T_{\gamma(t)}M$. Par exemple, si γ est différentiable, l'image $d_t\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ du champ canonique $\frac{\partial}{\partial t}$ sur I par la dérivée de γ est un champ de vecteurs le long de γ .

Supposons M munie d'une métrique riemannienne $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ et soit $\gamma : I \rightarrow M$ une courbe C^1 par morceaux. On appelle *longueur* du segment $\gamma([t_0, t_1])$ le nombre positif :

$$(II.2) \quad \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left\langle \frac{d\gamma}{dt}(t), \frac{d\gamma}{dt}(t) \right\rangle} dt$$

où l'intégrale est, bien entendu, calculée en dehors des points de discontinuité de $\frac{d\gamma}{dt}(t)$.

2. Exemples de surfaces riemanniennes

Nous allons en donner celles dites usuelles car elles sont naturelles et apparaissent souvent en tête des exemples.

2.1. Métrique usuelle sur \mathbb{R}^2

Sur \mathbb{R}^2 on a une base de champs de vecteurs globaux $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)$. On définit une métrique riemannienne sur \mathbb{R}^2 par :

$$(II.3) \quad g(x) = dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2.$$

Le groupe des isométries $\text{Isom}(\mathbb{R}^2, g)$ de cette surface riemannienne n'est rien d'autre que celui des isométries affines de \mathbb{R}^2 muni du produit scalaire $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1y_1 + x_2y_2$. C'est le produit semi-direct $\mathbb{R}^2 \rtimes O(2)$ où \mathbb{R}^2 est vu comme le groupe des translations et $O(2)$ est engendré par les rotations de centre l'origine et la réflexion d'axe une droite vectorielle.

2.2. Graphe d'une fonction

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une application C^∞ . Alors son graphe $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in U \times \mathbb{R} : x_3 = f(x_1, x_2)\}$ est une surface plongée dans \mathbb{R}^3 à l'aide de l'application C^∞ :

$$F : (x_1, x_2) \in U \rightarrow (x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \in \mathbb{R}^3.$$

Pour tout $x \in U$, les vecteurs $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}$ forment une base de l'espace tangent T_xU . Leurs images par la différentielle d_xF sont les vecteurs de $T_{F(x)}M \subset \mathbb{R}^3$:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(x) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix}$$

Sur \mathbb{R}^3 on considère le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$; on le restreint à chaque espace tangent $T_{F(x)}M$ et on obtient ainsi une métrique riemannienne g sur M . Pour tout $k = 1, 2$ posons $p_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}$. Alors :

$$\langle e_k, e_\ell \rangle = \begin{cases} 1 + p_k^2 & \text{si } k = \ell \\ p_k p_\ell & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'où l'expression de la métrique dans le système de coordonnées (x_1, x_2) :

$$(II.4) \quad g = (1 + p_1^2)dx_1 \otimes dx_1 + (1 + p_2^2)dx_2 \otimes dx_2 + 2p_1 p_2 dx_1 \otimes dx_2.$$

2.3. La sphère

On note \mathbb{S}^2 la sphère unité de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 . Si on ôte le pôle nord $= (0, 0, 1)$ et le pôle sud $= (0, 0, -1)$ l'ouvert M qui reste a pour représentation paramétrique (où $\theta \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in]0, \pi[$) :

$$\begin{cases} x_1 = \cos \theta \sin \varphi \\ x_2 = \sin \theta \sin \varphi \\ x_3 = \cos \varphi \end{cases}$$

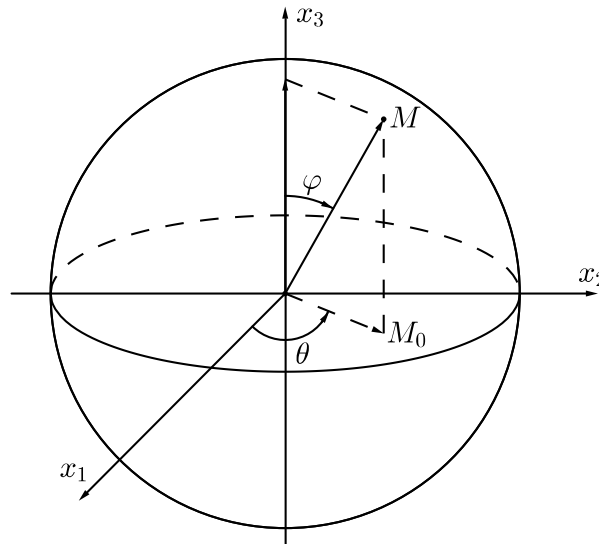


Fig. II.1

L'application $F : (\theta, \varphi) \in \mathbb{R} \times]0, \pi[\rightarrow (x_1, x_2, x_3) \in M$ n'est pas injective mais sa différentielle l'est en tout point (θ, φ) . Elle est donnée par la matrice :

$$\begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi \\ 0 & -\sin \varphi \end{pmatrix}$$

L'espace tangent à M au point $F(\theta, \varphi)$ est donc engendré par les vecteurs :

$$e_1 = \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix}$$

Les différents produits scalaires $\langle e_k, e_\ell \rangle$, pris dans \mathbb{R}^3 , donnent la métrique riemannienne sur M :

$$(II.5) \quad g = \sin^2 \varphi d\theta \otimes d\theta + d\varphi \otimes d\varphi.$$

Le groupe $\text{Isom}(\mathbb{S}^2)$ s'identifie au groupe $O(3)$ des isométries linéaires de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 ou groupe des matrices orthogonales 3×3 .

2.4. Le demi-plan \mathbb{H}^2

On note \mathbb{H}^2 le demi-espace $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$ sur lequel on définit la métrique riemannienne :

$$(II.6) \quad g = \frac{dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2}{x_2^2}$$

Par la suite, nous donnerons de manière explicite le groupe d'isométries de cette surface riemannienne ainsi que d'autres propriétés en remarquant que :

$$\mathbb{H}^2 = \{z = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C} : x_2 > 0\}$$

et que la métrique en question s'écrit aussi sous la forme :

$$(II.7) \quad h = -\frac{4dz \otimes d\bar{z}}{(z - \bar{z})^2}$$

où $dz = dx_1 + idx_2$ et $d\bar{z} = dx_1 - idx_2$. (L'utilisation de la coordonnée complexe se prête mieux au calcul que celle des coordonnées réelles.)

CHAPITRE III

COURBURE

Dans ce chapitre nous définissons la notion de *courbure* que nous accompagnons par quelques exemples de calculs explicites.

1. Connexions

Soit M une surface de \mathbb{R}^3 . Un champ de vecteurs sur M le long d'une courbe différentiable $\gamma : I \rightarrow M$ est une application différentiable

$$X : t \in M \rightarrow (X_1(t), X_2(t), X_3(t)) \in T_{\gamma(t)}M.$$

On pourrait penser que dériver X (en imposant à la dérivée de rester tangente à M) reviendrait à dériver simplement les composantes ; il n'en est rien : on peut trouver des fonctions X_1, X_2, X_3 telles que le vecteur $(X'_1(t), X'_2(t), X'_3(t))$ ne soit plus tangent à M . On est alors amené à chercher des *lois* permettant de dériver des objets tels que champ de vecteurs. Cela se fait à l'aide d'une *connexion* (*affine* ou *riemannienne*) qui est une notion fondamentale en géométrie différentielle.

1.1. Connexions affines

Soit M une surface. On note TM son fibré tangent et $\mathfrak{X}(M)$ le $C^\infty(M)$ -module des champs de vecteurs sur M . On appelle *connexion affine* sur M toute application :

$$\nabla : (X, Y) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$$

$C^\infty(M)$ -linéaire par rapport au premier facteur, additive par rapport au second et telle que $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$ pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ et toute fonction $f \in C^\infty(M)$.

Mettons-nous dans un ouvert de coordonnées locales (U, x_1, x_2) . Alors on a une base de champs de vecteurs sur U :

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Pour connaître la connexion ∇ , il suffit de connaître les différentes quantités $\nabla_{X_i} X_j$ avec $i, j = 1, 2$; mais celles-ci s'écrivent :

$$(III.1) \quad \nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k X_k$$

où Γ_{ij}^k sont des fonctions C^∞ sur U . La connaissance (localement) de ∇ revient donc à celle des fonctions Γ_{ij}^k , $i, j, k = 1, 2$ appelées *symboles de Christoffel* de la connexion ∇ .

On suppose M munie d'une connexion affine ∇ . Soient $\gamma : I \rightarrow M$ une courbe différentiable et X un champ de vecteurs le long de γ . Alors :

*Il existe une unique loi qui associe à X un champ de vecteurs le long de γ noté $\frac{DX}{dt}$ appelé **dérivée covariante** de X le long de γ et vérifiant les propriétés suivantes :*

- i) $\frac{D}{dt}(X + Y) = \frac{DX}{dt} + \frac{DY}{dt}$,
 ii) $\frac{D}{dt}(fX) = f\frac{DX}{dt} + \frac{df}{dt}X$,
 iii) si X est la restriction à l'image de γ d'un champ \tilde{X} sur M alors $\frac{DX}{dt} = \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}}\tilde{X}$.

Écriture locale explicite

On suppose que l'ouvert (U, x_1, x_2) de coordonnées locales est tel que $U \cap \gamma(I) \neq \emptyset$. On peut écrire :

$$\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t)), \quad X = \sum_{j=1}^2 f_j X_j \text{ avec } f_j \in C^\infty(U).$$

Alors, en utilisant les propriétés énoncées de la dérivée covariante, on établit :

$$\frac{DX}{dt} = \sum_{j=1}^2 \frac{df_j}{dt} X_j + \sum_{i,j=1}^2 \frac{dx_i}{dt} f_j \nabla_{X_i} X_j$$

ou encore :

$$(III.2) \quad \frac{DX}{dt} = \sum_{k=1}^2 \left\{ \frac{df_k}{dt} + \sum_{i,j=1}^2 f_j \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^k \right\} X_k.$$

Soit X un champ de vecteurs le long d'une courbe γ . On dira que X est *parallèle* si sa dérivée covariante $\frac{DX}{dt}$ est identiquement nulle.

Soit $\gamma : I \rightarrow M$ une courbe, $t_0 \in I$ et X_0 un vecteur de $T_{\gamma(t_0)}M$. Alors on peut construire un champ unique X parallèle le long de toute la courbe γ et prenant la valeur X_0 au point t_0 . Un tel champ est appelé *transport parallèle* de X_0 le long de γ . Si on l'écrit sous la forme $X = \sum_{j=1}^2 f_j X_j$, ses composantes f_j sont les solutions du système différentiel :

$$\frac{DX}{dt} = \frac{df_k}{dt} + \sum_{i,j=1}^2 f_j \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^k = 0 \quad k = 1, 2$$

qui sont uniques en raison de la condition initiale $(f_1(t_0), f_2(t_0)) = X_0$.

Une connexion affine ∇ sur M est dite *symétrique* si elle vérifie pour tous champs $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ la relation :

$$(III.3) \quad \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

Localement pour $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ on a $\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0$ et donc pour tous $i, j, k = 1, 2$:

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k.$$

1.2. Connexions riemanniennes

Soit (M, g) ($g = \langle \cdot, \cdot \rangle$) une surface riemannienne munie d'une connexion affine ∇ . On dira que ∇ est *compatible* avec g si, pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, on a :

$$(III.4) \quad X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle.$$

En particulier si X, Y sont des champs de vecteurs définis le long d'une courbe γ on a :

$$\frac{d}{dt} \langle X, Y \rangle = \left\langle \frac{DX}{dt}, Y \right\rangle + \left\langle X, \frac{DY}{dt} \right\rangle.$$

On arrive à un théorème fondamental qui assure l'existence d'une connexion affine symétrique compatible avec une métrique g .

Théorème de Levi-Civita. *Soit M une surface munie d'une métrique riemannienne g qu'on notera aussi \langle , \rangle . Alors, il existe sur M une unique connexion affine ∇ symétrique et compatible avec g . Elle est appelée **connexion de Levi-Civita** de la surface riemannienne (M, g) .*

Un calcul simple montre que ∇ est définie de façon unique par l'identité :

$$\langle \nabla_Y X, Z \rangle = \frac{1}{2} \{ X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle \}$$

Faisant $X = X_j, Y = X_i$ et $Z = X_k$ et $\langle X_i, X_j \rangle = g_{ij}$ on obtient :

$$\sum_{\ell=1}^2 g_{\ell k} \Gamma_{ij}^{\ell} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right).$$

D'où l'on déduit :

$$(III.5) \quad \Gamma_{ij}^{\ell} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 g^{\ell k} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right)$$

où (g^{ij}) est l'inverse de la matrice (g_{ij}) .

1.3. Géodésiques

Soit $g = \langle , \rangle$ une métrique riemannienne sur M . Une courbe $\gamma : I \rightarrow M$ est dite *géodésique* si $\frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = 0$ identiquement. Cela se traduit par le système d'équations différentielles :

$$(III.6) \quad \frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = 0 \quad k = 1, 2$$

où les $x_i(t)$ sont les composantes de γ dans le système de coordonnées (U, x_1, x_2) .

Si γ est une géodésique, la restriction de γ à tout intervalle fermé $[t_0, t_1]$ est appelée *segment de géodésique* de $\gamma(t_0)$ à $\gamma(t_1)$. On a :

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right), \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 0.$$

La norme $\alpha = \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\|$ du vecteur $\frac{d\gamma}{dt}$ est donc constante. On en déduit alors que :

$$s(t) = \text{longueur}([\gamma(t_0), \gamma(t)]) = \int_{t_0}^t \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| dt = \alpha(t - t_0).$$

Si $\alpha = 1$ la géodésique est dite *normalisée*. En remplaçant t par s on *paramètre* γ par la *longueur de l'arc*. Quand on peut faire cela sur tout l'intervalle $] -\infty, +\infty[$ on dira que γ est *complète*. On dira alors que la surface riemannienne (M, g) est *complète* si toute géodésique est complète.

Les géodésiques sont les courbes qui minimisent localement la distance entre les points de la variété.

2. Courbure

Une *métrique riemannienne* sur une surface permet d'y introduire un invariant fondamental appelé *courbure*. Celle-ci a pour fonction de distinguer à quel point un morceau de cette surface peut être "loin" d'un disque plan. On peut illustrer cela en constatant qu'il est impossible de coller de *façon isométrique* la pelure d'une orange sur le plan d'une table ! C'est cet invariant que nous nous proposons de définir dans ce paragraphe.

Dans toute la suite, M sera une surface munie d'une métrique riemannienne g et de sa connexion de Levi-Civita ∇ associée.

2.1. Tenseur de courbure

On appelle *courbure* de (M, g) l'application qui à tout $(X, Y) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$ associe l'application $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ définie par :

$$(III.7) \quad R(X, Y)Z = \nabla_{[X, Y]}Z - (\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z).$$

Pour tous $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$, posons :

$$(III.8) \quad (X, Y, Z, T) = \langle R(X, Y)Z, T \rangle.$$

La courbure R de (M, g) vérifie les propriétés qui suivent dont la démonstration consiste en de simples calculs.

- i) L'application $(X, Y) \rightarrow R(X, Y)$ est $C^\infty(M)$ -bilinéaire.
- ii) Pour tous $(X, Y) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$, l'application $Z \rightarrow R(X, Y)Z$ est $C^\infty(M)$ -linéaire.
- iii) $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$ (*identité de Bianchi*).
- iv) $(X, Y, Z, T) = -(Y, X, Z, T)$ et $(X, Y, Z, T) = -(X, Y, T, Z)$.
- v) $(X, Y, Z, T) = (Z, T, X, Y)$.

Écriture locale

Comme toujours on pose $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ avec $i = 1, 2$. Le champ $R(X_i, X_j)X_k$ s'écrit dans la base (X_1, X_2) :

$$(III.9) \quad R(X_i, X_j)X_k = \sum_{\ell=1}^2 R_{ijk}^\ell X_\ell$$

où les R_{ijk}^ℓ , $i, j, k, \ell = 1, 2$ sont des fonctions C^∞ sur l'ouvert de coordonnées locales (U, x_1, x_2) . Elles s'expriment en fonction des symboles de Christoffel Γ_{ij}^k . Il suffit de voir que :

$$R(X_i, X_j)X_k = \nabla_{X_j} \nabla_{X_i} X_k - \nabla_{X_i} \nabla_{X_j} X_k$$

qui donne :

$$(III.10) \quad R_{ijk}^s = \sum_{\ell=1}^2 \Gamma_{ik}^\ell \Gamma_{j\ell}^s - \sum_{\ell=1}^2 \Gamma_{jk}^\ell \Gamma_{i\ell}^s + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^s - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{jk}^s.$$

De même :

$$(III.11) \quad (X_i, X_j, X_k, X_s) = R_{ijk_s} = \langle R(X_i, X_j)X_k, X_s \rangle = \sum_{l=1}^2 R_{ijk_l} g_{ls}.$$

Les fonctions R_{ijk_s} vérifient les relations suivantes découlant immédiatement de celles du “crochet” $(, , ,)$:

$$(III.12) \quad \begin{cases} R_{ijk_s} + R_{jkis} + R_{kij_s} = 0 \\ R_{ijk_s} = -R_{jik_s} \\ R_{ijk_s} = -R_{ijs_k} \\ R_{ijk_s} = R_{ksij} \end{cases}$$

2.2. La courbure sectionnelle

On considère toujours une surface M munie d’une métrique riemannienne $g = \langle , \rangle$ et de la connexion de Levi-Civita associée.

Lemme. Soient $x \in M$ et (X, Y) une base de $T_x M$. Alors la quantité :

$$(III.13) \quad \kappa(X, Y) = \frac{(X, Y, X, Y)}{\|X\|^2 \|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2}$$

ne dépend pas de la base (X, Y) .

La démonstration est facile bien qu’elle soit un peu calculatoire. Le nombre $\kappa(X, Y)$ (où (X, Y) est une base quelconque de $T_x M$) sera noté $\kappa(x)$ et appelé *courbure sectionnelle* de (M, g) au point x . C’est une fonction C^∞ sur la surface M . On dira que (M, g) est à *courbure constante* si cette fonction est constante.

3. Exemples de calcul

3.1. La surface euclidienne \mathbb{R}^2

Les champs $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, 2$ sont définis globalement, commutent et forment une base de l’espace tangent en chaque point $x \in \mathbb{R}^2$. On munit \mathbb{R}^2 de la métrique ;

$$g = dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2$$

qui a pour matrice associée la matrice identité *i.e.* :

$$g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On vérifie facilement que $\nabla_{X_i} X_j = 0$ pour tous $i, j = 1, 2$. Comme, par définition, les symboles de Christoffel sont donnés par :

$$(III.13) \quad \Gamma_{ij}^\ell = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 g^{\ell k} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right)$$

ils sont identiquement nuls. Par suite la *courbure sectionnelle est identiquement nulle*.

Les géodésiques de \mathbb{R}^2 sont les courbes $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$ qui vérifient le système différentiel :

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2}(t) = 0$$

et sont les droites affines $\gamma(t) = (a_1 t + b_1, a_2 t + b_2)$. Elles sont donc complètes.

3.2. La sphère \mathbb{S}^2

La sphère \mathbb{S}^2 étant plongée dans \mathbb{R}^3 elle hérite d'une métrique riemannienne dont l'écriture en coordonnées sphériques est :

$$g = \sin^2 \varphi d\theta \otimes d\theta + d\varphi \otimes d\varphi.$$

La matrice de g s'écrit donc :

$$g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} \sin^2 \varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad g^{-1} = (g^{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin^2 \varphi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour adapter les calculs aux formules dont on dispose on posera $x_1 = \theta$ et $x_2 = \varphi$. Les champs $\frac{\partial}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial}{\partial x_2}$ seront respectivement $\frac{\partial}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial}{\partial \varphi}$. On a bien entendu $[X_1, X_2] = 0$. La formule (III.13) donne :

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{22}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \\ \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 \\ \Gamma_{21}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \varphi \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculons maintenant la quantité $(X_1, X_2, X_1, X_2) = \langle R(X_1, X_2)X_1, X_2 \rangle$. On a :

$$\nabla_{X_2} \nabla_{X_1} X_1 = \nabla_{X_2} (\Gamma_{11}^1 X_1 + \Gamma_{11}^2 X_2) = \nabla_{X_2} (-\cos \varphi \sin \varphi X_2) = -\cos(2\varphi) X_2$$

et :

$$\nabla_{X_1} \nabla_{X_2} X_1 = \nabla_{X_1} (\Gamma_{21}^1 X_1 + \Gamma_{21}^2 X_2) = \nabla_{X_1} \left(\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} X_1 \right) = -(\cos \varphi)^2 X_2.$$

Finalement on obtient $R(X_1, X_2)X_1 = \nabla_{X_2} \nabla_{X_1} X_1 - \nabla_{X_1} \nabla_{X_2} X_1 = \sin^2 \varphi X_2$ et donc $(X_1, X_2, X_1, X_2) = \sin^2 \varphi$. La formule donnant la courbure sectionnelle par rapport à la base (X_1, X_2) est :

$$\kappa(X_1, X_2) = \frac{(X_1, X_2, X_1, X_2)}{\|X_1\|^2 \|X_2\|^2 - \langle X_1, X_2 \rangle^2}$$

Comme $\|X_1\|^2 = \sin^2 \varphi$, $\|X_2\| = 1$ et X_1 et X_2 orthogonaux on obtient $\kappa(X_1, X_2) = 1$.

La sphère \mathbb{S}^2 munie de sa métrique standard (celle induite par la métrique euclidienne de \mathbb{R}^3) est une *surface riemannienne compacte orientable simplement connexe de courbure sectionnelle constante égale à 1*.

3.3. Le demi-espace \mathbb{H}^2

On rappelle que \mathbb{H}^2 est le demi-espace $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$ muni de la métrique riemannienne :

$$g = \frac{dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2}{x_2^2}$$

dont la matrice associée est $g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_2^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_2^2} \end{pmatrix}$. On calcule les symboles de Christoffel de la même manière que précédemment :

$$(\Gamma_{ij}^1) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{x_2} \\ -\frac{1}{x_2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (\Gamma_{ij}^2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{x_2} \end{pmatrix}$$

Ceci nous donne :

$$\begin{aligned} \nabla_{X_2} \nabla_{X_1} X_1 &= \nabla_{X_2} (\Gamma_{11}^1 X_1 + \Gamma_{11}^2 X_2) \\ &= \nabla_{X_2} \left(\frac{1}{x_2} X_2 \right) \\ &= \frac{1}{x_2} \nabla_{X_2} X_2 - \frac{1}{x_2^2} X_2 \\ &= \frac{1}{x_2} (\Gamma_{22}^1 X_1 + \Gamma_{22}^2 X_2) - \frac{1}{x_2^2} X_2 \\ &= -\frac{2}{x_2^2} X_2 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \nabla_{X_1} \nabla_{X_2} X_1 &= \nabla_{X_1} (\Gamma_{21}^1 X_1 + \Gamma_{21}^2 X_2) \\ &= \nabla_{X_1} \left(-\frac{1}{x_2} X_1 \right) \\ &= -\frac{1}{x_2^2} X_2 \end{aligned}$$

D'où :

$$R(X_1, X_2)X_1 = \nabla_{X_2} \nabla_{X_1} X_1 - \nabla_{X_1} \nabla_{X_2} X_1 = -\frac{1}{x_2^2} X_2$$

et par suite :

$$\langle X_1, X_2, X_1, X_2 \rangle = \langle R(X_1, X_2)X_1, X_2 \rangle = \left\langle -\frac{1}{x_2^2} X_2, X_2 \right\rangle = -\frac{1}{x_2^2} \langle X_2, X_2 \rangle = -\frac{1}{x_2^4}$$

La courbure sectionnelle est finalement :

$$\kappa(X_1, X_2) = \frac{\langle X_1, X_2, X_1, X_2 \rangle}{\|X_1\|^2 \|X_2\|^2 - \langle X_1, X_2 \rangle^2} = -1$$

car $\|X_1\|^2 \|X_2\|^2 = \left(\frac{1}{x_2^2}\right) \left(\frac{1}{x_2^2}\right)$ et $\langle X_1, X_2 \rangle = 0$ (les vecteurs X_1 et X_2 étant orthogonaux).

Le demi-plan $\left(\mathbb{H}^2, \frac{dx_1^2 + dx_2^2}{x_2^2}\right)$ est une *surface riemannienne orientable et simplement connexe de courbure sectionnelle constante égale à -1* .

Les surfaces \mathbb{R}^2 , \mathbb{S}^2 et \mathbb{H}^2 seront supposées munies respectivement des métriques que l'on vient de considérer.

3.4. Un théorème de classification. *Soit (M, g) une surface riemannienne complète simplement connexe de courbure sectionnelle κ constante. Alors si :*

- (1) $\kappa = 0$, M est isométrique à \mathbb{R}^2 (cas parabolique) ;
- (2) $\kappa = 1$, M est isométrique à \mathbb{S}^2 (cas elliptique) ;
- (3) $\kappa = -1$, M est isométrique à \mathbb{H}^2 (cas hyperbolique).

CHAPITRE IV

GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE

Ce chapitre est consacré exclusivement au demi-plan hyperbolique \mathbb{H}^2 . Nous y étudions son groupe d'isométries et ses géodésiques ainsi qu'un exemple de ses sous-groupes discrets Γ opérant proprement et librement sur \mathbb{H}^2 . Les quotients \mathbb{H}^2/Γ sont ainsi des surfaces riemanniennes à courbure constante égale à -1 ; on les appelle *surfaces hyperboliques*.

1. Groupe d'isométries de \mathbb{H}^2

On reprend les notations du chapitre III : \mathbb{H}^2 est le demi-plan $\{x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$. Selon le besoin, on utilisera les coordonnées réelles (x, y) ou la coordonnée complexe $z = x + iy$.

1.1. Définition. Soient (M, g) et (N, h) deux surfaces riemanniennes. Une application $\gamma : M \rightarrow N$ est dite **conforme** s'il existe une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ telle que, pour tout point $z \in M$ (d'image $w = \gamma(z) \in N$) et tous vecteurs $u, v \in T_z M$, on ait :

$$(IV.1) \quad h(d_z \gamma(u), d_z \gamma(v)) = f(z)g(u, v).$$

(La fonction f est appelée **facteur de conformité** de γ .) C'est aussi équivalent à dire que γ préserve les angles orientés : l'angle (u, v) dans $T_z M$ est égal à l'angle $(d_z(u), d_z(v))$ dans $T_w N$.

Une isométrie locale directe γ est une application conforme ; son facteur de conformité est la fonction identiquement égale à 1. Si $\gamma : M \rightarrow N$ est bijective et conforme, on dira que γ est une *équivalence conforme* entre M et N ; une équivalence conforme de (M, g) sur elle-même est appelée *transformation conforme* de (M, g) . L'ensemble des transformations conformes de (M, g) est un groupe qu'on note $\text{Conf}(M, g)$ et qu'on appelle *groupe conforme* de la surface riemannienne (M, g) . Bien sûr, $\text{Isom}^+(M, g)$ (groupe des isométries directes) est un sous-groupe de $\text{Conf}(M, g)$.

1.2. Quelques rappels

On se situe dans le plan \mathbb{R}^2 qu'on identifie au plan complexe par $(x, y) \mapsto z = x + iy$. Le produit scalaire usuel $((x, y), (x', y')) = xx' + yy'$ sur \mathbb{R}^2 n'est rien d'autre que la partie réelle du produit hermitien $(z, w) = z\bar{w}$ sur \mathbb{C} . L'orientation sur \mathbb{R}^2 est celle donnée par sa base canonique $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$.

• Une application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ non nulle qui conserve les angles (orientés ou pas) est une similitude, c'est-à-dire :

- le produit d'une rotation et d'une homothétie de même centre si la transformation φ préserve les angles orientés ;
- le produit d'une réflexion, d'une rotation et d'une homothétie de même centre si φ ne préserve pas les angles orientés.

Preuve. Quitte à remplacer φ par $\varphi \circ s$ où s est la réflexion d'axe celui des abscisses, on peut supposer que φ préserve l'orientation.

Soit r la rotation qui amène le vecteur $\varphi(e_1)$ sur $\tau_1 e_1$ avec $\tau_1 > 0$. Posons $\psi = r \circ \varphi$. Comme ψ préserve les angles orientés et qu'elle fixe la direction et le sens de e_1 , l'image de

e_2 par ψ est un vecteur du type $\tau_2 e_2$. Ce qui nous donne $\psi(e_1 + e_2) = \tau_1 e_1 + \tau_2 e_2$. Comme, encore une fois ψ préserve les angles orientés et fixe la direction et le sens de e_1 , $\psi(e_1 + e_2)$ est de la forme $\tau(e_1 + e_2)$, ce qui impose $\tau_1 = \tau_2 = \tau$. Donc $r \circ \varphi$ est l'homothétie centrée à l'origine et de rapport τ ; par suite, φ est la similitude directe centrée à l'origine et de rapport τ et d'angle $\theta = (e_1, \varphi(e_1))$. \diamond

En coordonnées complexes, une similitude $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ s'écrit $\varphi(z) = \lambda z$ si elle conserve l'orientation et $\varphi(z) = \lambda \bar{z}$ sinon (avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$).

• Soient U et V deux ouverts de \mathbb{C} . Une application $f : U \rightarrow V$ est conforme si, et seulement si, f est holomorphe et vérifie $f'(z) \neq 0$ pour tout $z \in U$.

Preuve. L'implication (f conforme $\implies f$ holomorphe et $f'(z) \neq 0$) résulte de ce qu'on vient de voir précédemment. L'implication réciproque est une conséquence du fait que les conditions de Cauchy-Riemann disent exactement que la différentielle $\varphi = d_z f$ de f est une similitude. Nous laissons le soin au lecteur de mettre tout cela en forme. \diamond

Nous allons exploiter tout le matériel que nous avons introduit à la section 6 du chapitre IV de la Partie "Variable complexe" pour déterminer explicitement le groupe des isométries du demi-plan hyperbolique \mathbb{H}^2 .

1.3. Théorème. Toute isométrie du demi-plan ouvert $\mathbb{H}^2 = \{x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ est de la forme $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ou $f(z) = \frac{-a\bar{z}+b}{-c\bar{z}+d}$ avec a, b, c, d réels tels que $ad - bc = 1$.

Démonstration. Une isométrie qui préserve l'orientation est une transformation conforme. Elle est donc de la forme $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ où a, b, c, d sont des réels tels que $ad - bc = 1$. Si elle ne préserve pas l'orientation, elle est du type $f(z) = \frac{-a\bar{z}+b}{-c\bar{z}+d}$ où a, b, c, d sont aussi des réels tels que $ad - bc = 1$.

Reste à montrer qu'une transformation de la forme $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ou $f(z) = \frac{-a\bar{z}+b}{-c\bar{z}+d}$ avec a, b, c, d réels tels que $ad - bc = 1$ est une isométrie de \mathbb{H}^2 . On traitera seulement la première forme ; le cas de la seconde s'en déduit immédiatement.

Comme on l'a déjà fait remarquer, la métrique hyperbolique peut aussi s'écrire en la coordonnée complexe z sous la forme :

$$\langle , \rangle_z = -\frac{4dz \otimes d\bar{z}}{(z - \bar{z})^2}.$$

Dire que f est une isométrie, c'est dire qu'elle préserve cette métrique. Ceci signifie de façon concrète que, pour tout $z \in \mathbb{H}^2$, on a :

$$\langle , \rangle_{f(z)} = -\frac{4d(f(z)) \otimes \overline{df(z)}}{(f(z) - \overline{f(z)})^2} = -\frac{4dz \otimes d\bar{z}}{(z - \bar{z})^2} = \langle , \rangle_z.$$

(i) La métrique \langle , \rangle_z est invariante par toute translation $z \mapsto z + b$ (avec b réel) car :

$$-\frac{4d(z+b) \otimes d(\overline{z+b})}{((z+b) - \overline{(z+b)})^2} = -\frac{4dz \otimes d\bar{z}}{(z - \bar{z})^2} = \langle , \rangle_z.$$

(ii) Elle est invariante par l'application $z \mapsto -\frac{1}{z}$ car :

$$-\frac{4d(-\frac{1}{z}) \otimes d(\overline{-\frac{1}{z}})}{(-\frac{1}{z} - \overline{-\frac{1}{z}})^2} = -4 \frac{(\frac{1}{z^2}) dz \otimes (\frac{1}{\bar{z}^2}) d\bar{z}}{\frac{(z-\bar{z})^2}{(z\bar{z})^2}} = -\frac{4dz \otimes d\bar{z}}{(z - \bar{z})^2} = \langle , \rangle_z.$$

(iii) Et finalement, il est immédiat de voir qu'elle est aussi invariante par toute homothétie $z \mapsto az$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Considérons la transformation $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Si $c = 0$, $ad = 1$ et par suite $\frac{a}{d} > 0$; donc f est de la forme $f(z) = \alpha z + \beta$ avec $\alpha = \frac{a}{d} > 0$; f est donc une isométrie en vertu des points (i) et (iii). Si $c \neq 0$, on peut écrire f sous la forme :

$$f(z) = \frac{a}{c} - \frac{1}{c^2 z + cd}.$$

Par suite f laisse invariante la métrique \langle , \rangle en vertu des points (i), (ii) et (iii). La transformation f est finalement une isométrie de \mathbb{H}^2 . \diamond

2. Géodésiques

On rappelle qu'une courbe $\gamma : I \rightarrow M$ (I est un intervalle ouvert de \mathbb{R}) C^1 par morceaux tracée sur une surface riemannienne (M, g) est une géodésique si elle minimise localement la distance entre les points : le plus court chemin pour aller du point $\gamma(t_0)$ au point $\gamma(t)$ ($t_0, t \in I$ proches) est $\gamma([t_0, t])$. Nous allons décrire explicitement les géodésiques du demi-plan hyperbolique \mathbb{H}^2 . Mais avant commençons par une :

2.1. Remarque. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ une géodésique. Alors son image $f \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ par toute isométrie f de \mathbb{H}^2 est une géodésique.

Cette remarque est valable dans toute surface riemannienne (M, g) . Plus même : tout ce qui est défini à partir de la métrique (connexion riemannienne, courbure, géodésique...) se "conserve" par le groupe $\text{Isom}(M, g)$ des isométries de (M, g) .

2.2. Proposition. Soient p_0 et p_1 deux points du demi-plan \mathbb{H}^2 ayant même abscisse x_0 et d'ordonnées respectives y_0 et y_1 . Alors la portion de la droite $(p_0 p_1)$ contenue dans \mathbb{H}^2 est une géodésique complète.

Démonstration. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ une courbe de classe C^1 telle que $\gamma(0) = p_0$ et $\gamma(1) = p_1$ s'écrivant $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$. On a :

$$\begin{aligned} \text{longueur}(\gamma([0, 1])) &= \int_0^1 \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt \\ &\geq \int_0^1 \frac{|y'(t)|}{y(t)} dt \\ &\geq \left| \int_0^1 \frac{y'(t)}{y(t)} dt \right| \\ &= |\text{Log}(y_1) - \text{Log}(y_0)|. \end{aligned}$$

La quantité $|\text{Log}(y_1) - \text{Log}(y_0)|$ n'est rien d'autre que la longueur hyperbolique du segment $[p_0 p_1]$. Si la courbe γ est une géodésique, l'égalité :

$$\text{longueur}(\gamma([0, 1])) = |\text{Log}(y_1) - \text{Log}(y_0)|$$

doit avoir lieu, sinon la courbe $\tau(t) = x_0 + iy(t)$ avec $t \in [0, 1]$ (qui joint aussi p_0 à p_1) sera aussi de plus courte longueur. Toute demi-droite ouverte contenue dans \mathbb{H}^2 commençant en un point sur l'axe réel et perpendiculaire à celui-ci est une géodésique complète : en effet, elle est paramétrée sur tout l'intervalle $] -\infty, +\infty[$ par $\gamma(t) = x_0 + ie^t$. \diamond

2.3. Proposition. Soient p_0 et p_1 deux points de \mathbb{H}^2 ayant des abscisses respectives x_0 et x_1 avec $x_0 \neq x_1$. Alors le demi-cercle contenu dans \mathbb{H}^2 , centré sur l'axe réel et passant par les points p_0 et p_1 est une géodésique complète.

Démonstration. Comme les points p_0 et p_1 n'ont pas la même abscisse, la médiatrice du segment $[p_0p_1]$ coupe l'axe réel en un point ω . Le demi-cercle \mathcal{C} de centre ω et passant par p_0 (et donc aussi par p_1) coupe l'axe réel en deux points Ω et H (cf. Fig. IV.1). Notons ρ le rayon de \mathcal{C} (on a $0 < \rho = \omega\Omega = \omega H = \omega p_0 = \omega p_1$) et posons $\kappa = 4\rho^2$. L'inversion \mathcal{I} de pôle Ω et de puissance κ s'écrit :

$$\mathcal{I}(z) = \frac{\kappa}{\bar{z} - a} + a = \frac{(-0)\bar{z} + \sqrt{\kappa}}{-\left(-\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)\bar{z} + \left(-\frac{a}{\sqrt{\kappa}}\right)} + a$$

(où a est l'abscisse de Ω , qui est aussi son affixe). Cette inversion envoie le demi-cercle \mathcal{C} sur la demi-droite Δ_+ (contenue dans \mathbb{H}^2) issue du point H et orthogonale à l'axe réel. Si $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ est une courbe géodésique telle que $\gamma(0) = p_0$ et $\gamma(1) = p_1$, sa transformée $\mathcal{I} \circ \gamma$ par l'isométrie \mathcal{I} est aussi une géodésique, donc sera contenue dans Δ_+ ; par suite γ est forcément contenue dans \mathcal{C} . On en conclut que la géodésique complète passant par p_0 et p_1 est l'image inverse par \mathcal{I} de la demi-droite Δ_+ , c'est-à-dire le demi-cercle \mathcal{C} . \diamond

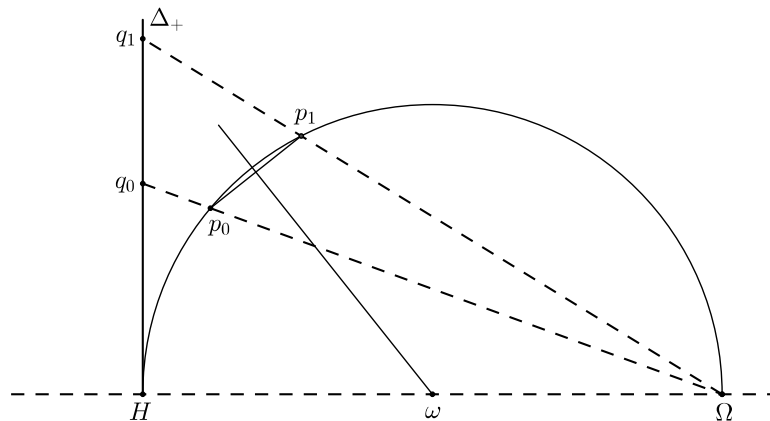


Fig. IV.1

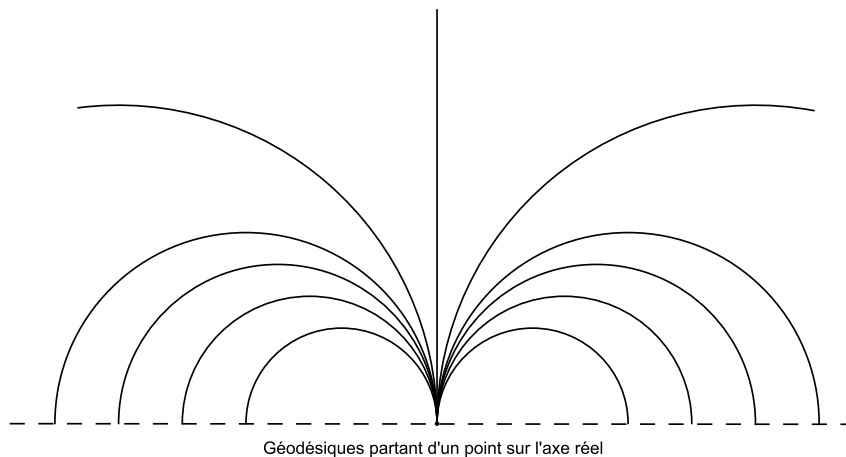


Fig. IV.2

3. Surfaces hyperboliques

L'objet de cette section est d'en donner la définition et un exemple de surface compacte obtenue comme quotient de \mathbb{H}^2 par l'action d'un groupe d'isométries.

3.1. $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ et son action sur \mathbb{H}^2

On note $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ le groupe des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels et de déterminant égal à 1. C'est une partie de \mathbb{R}^4 donnée par l'injection naturelle :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4;$$

elle hérite donc d'une structure d'espace topologique. Comme l'application :

$$(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \longrightarrow ad - bc \in \mathbb{R}$$

est continue, $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ est un fermé de \mathbb{R}^4 , donc un espace localement compact. En plus les applications naturelles :

$$(M, N) \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow MN \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$$

et :

$$M \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow M^{-1} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$$

sont indéfiniment différentiables (et même analytiques réelles). On dira que $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ est un *groupe de Lie*.

On rappelle qu'une *transformation homographique* de \mathbb{H}^2 s'écrit $\gamma : z \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d}$ où $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ et tels que $ad - bc \neq 0$; elle est définie bien entendu pour $z \neq -\frac{d}{c}$. Une telle transformation est donc associée à la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Un calcul facile montre que si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathrm{Im}(\gamma(z)) = \frac{\mathrm{Im}z}{|cz+d|^2}$$

et donc γ préserve \mathbb{H} et est définie partout sur \mathbb{H} . On vérifie qu'au produit de deux matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ correspond la composition $\gamma\gamma'$. Comme les matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$ définissent la même transformation, la condition $ad - bc \neq 0$ (qui assure la bijectivité de γ) peut être remplacée par $ad - bc = 1$. Ainsi le groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ agit sur \mathbb{H} . Cette action est *holomorphe* et *isométrique i.e.* la transformation γ associée à une matrice de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ est biholomorphe et est une isométrie. Notons $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ le groupe des transformations biholomorphes de \mathbb{H} . On a donc un morphisme de groupes :

$$\rho : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \gamma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$$

où γ est la transformation $z \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d}$. Le noyau de ρ est constitué des matrices I et $-I$ et induit donc un homomorphisme injectif :

$$\rho : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) / \{I, -I\} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{H}).$$

Nous travaillerons toujours sur $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ que nous confondrons (modulo le sous-groupe $\{I, -I\}$) avec $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ et dont on notera un élément indifféremment γ ou $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

3.2. Proposition. *L'action de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ sur \mathbb{H} est transitive i.e. pour tous $z, z' \in \mathbb{H}$ il existe un élément $\phi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ tel que $z = \phi(z')$. En d'autres termes cette action n'a qu'une seule orbite.*

Démonstration. Écrivons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. Un calcul immédiat permet de vérifier que les éléments :

$$\gamma = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{y}} & -\frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \sqrt{y} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \gamma' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{y'}} & -\frac{x'}{\sqrt{y'}} \\ 0 & \sqrt{y'} \end{pmatrix}$$

transforment z et z' en le point i : $\gamma(z) = i$ et $\gamma'(z') = i$. Par suite, l'élément $\phi = \gamma^{-1} \circ \gamma'$ transforme z' en z . \diamond

Nous allons terminer par la notion de surface hyperbolique. Elle sera donnée de façon très sommaire car faire les choses en détail nécessite un peu plus de matériel.

Un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ est une partie Γ de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ qui est à la fois discrète (son intersection avec tout compact est finie) et un sous-groupe.

3.3. Théorème. *Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. On considère son action naturelle sur \mathbb{H}^2 , celle induite par $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ en tant que groupe d'isométries du demi-plan hyperbolique. Alors :*

- i) *Le groupe Γ agit proprement sur \mathbb{H}^2 , c'est-à-dire, pour tout compact K du demi-plan \mathbb{H}^2 , l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma : \gamma(K) \cap K \neq \emptyset\}$ est fini.*
- ii) *Si en plus Γ agit librement i.e. le groupe d'isotropie Γ_x de tout point x est trivial, le quotient $M = \mathbb{H}^2/\Gamma$ est une surface orientable. La métrique hyperbolique sur \mathbb{H}^2 induit sur M une métrique riemannienne dont la courbure sectionnelle est égale à -1 .*

Pour la démonstration, voir [Fr].

Les surfaces de la forme $M = \mathbb{H}^2/\Gamma$ sont appelées *surfaces hyperboliques*. On démontre (loin d'être trivial) que toute surface riemannienne orientable à courbure constante égale à -1 est de ce type. Pour en construire, il faut donc trouver des sous-groupes discrets de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ qui agissent librement sur \mathbb{H}^2 . Nous allons nous restreindre au cas des surfaces compactes. On a le :

3.4. Théorème de Poincaré. *Soit Δ_g un polygone ayant $4g$ côtés (des segments de géodésiques) $a_1, a'_1, b_1, b'_1, \dots, a_g, a'_g, b_g, b'_g$. On suppose que tous les sommets de Δ_g sont dans \mathbb{H}^2 , pour tout $\ell \in \{1, \dots, g\}$, les côtés a_ℓ et b_ℓ sont isométriques respectivement aux côtés a'_ℓ et b'_ℓ et qu'une orientation est donnée sur chacun des côtés de telle sorte qu'un parcours sans recul sur le bord soit dans le sens $a_1 b_1 a'_1{}^{-1} b'_1{}^{-1} \dots a_g b_g a'_g{}^{-1} b'_g{}^{-1}$ (on peut voir cela sur la Fig. IV.3 qui illustre le cas $g = 2$). Alors :*

- i) *Pour tout $\ell \in \{1, \dots, g\}$, il existe des isométries γ_ℓ et σ_ℓ de \mathbb{H}^2 préservant l'orientation et telles que $\gamma_\ell(a_\ell) = a'_\ell$ et $\sigma_\ell(b_\ell) = b'_\ell$.*
- ii) *Les isométries $\gamma_1, \sigma_1, \dots, \gamma_g, \sigma_g$ engendrent un sous-groupe discret Γ_g de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ agissant librement et proprement sur \mathbb{H}^2 et ayant Δ_g comme domaine fondamental. Le groupe Γ_g a pour présentation :*

$$\Gamma_g = \left\langle \gamma_1, \sigma_1, \dots, \gamma_g, \sigma_g \mid \gamma_1 \sigma_1 \gamma_1^{-1} \sigma_1^{-1} \dots \gamma_g \sigma_g \gamma_g^{-1} \sigma_g^{-1} \right\rangle.$$

iii) *Le quotient $M_g = \mathbb{H}^2 / \Gamma_g$ est une surface hyperbolique compacte orientable de genre g (voir Fig. IV.4 pour les cas $g = 2$).*

Pour la démonstration, voir [Ve].

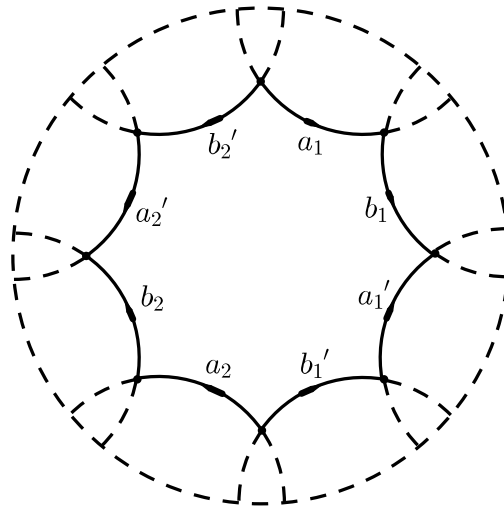


Fig. IV.3

C'est ce qui donne la surface ci-dessous.

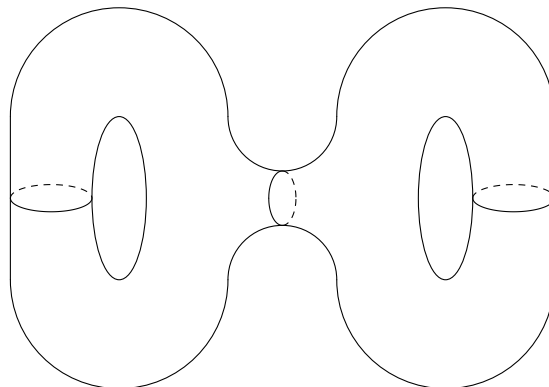


Fig. IV.4

EXERCICES

Exercice 1

Soit $n \geq 0$ un entier. Sur $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ on considère la relation d'équivalence $x \sim y$ si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $y = \lambda x$. Le quotient $P^n(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$ est l'espace projectif réel de dimension n . C'est l'ensemble des droites vectorielles (privées de l'origine) de l'espace \mathbb{R}^{n+1} . Un point x de $P^n(\mathbb{R})$ est représenté par un vecteur non nul de \mathbb{R}^{n+1} ; les coordonnées (x_1, \dots, x_{n+1}) de ce vecteur donnent donc x ; mais, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $(\lambda x_1, \dots, \lambda x_{n+1})$ donnent aussi x ! Ces coordonnées ne sont donc définies qu'à un facteur multiplicatif près ; on les note $[x_1, \dots, x_{n+1}]$ et on les appelle *coordonnées homogènes* de x . On note π la projection canonique $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow P^n(\mathbb{R})$. On munit $P^n(\mathbb{R})$ de la *topologie quotient*, c'est-à-dire la topologie \mathcal{T} la plus fine parmi toutes celles qui rendent continue la projection π .

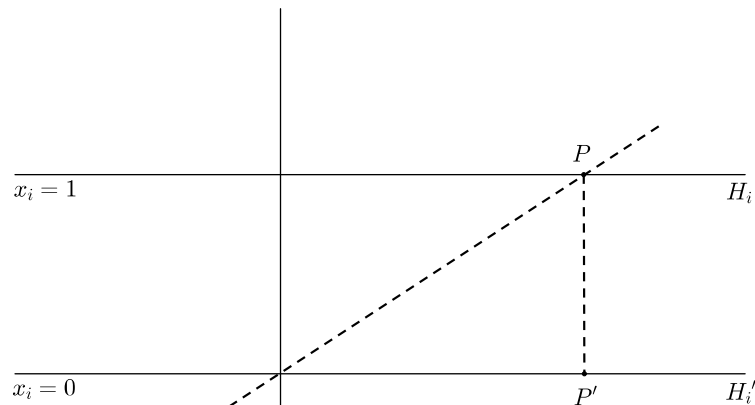
On prend $n = 3$. Pour $i = 1, 2, 3$, on pose $\tilde{U}_i = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_i \neq 0\}$ et $U_i = \pi(\tilde{U}_i)$.

1 - Dire pourquoi les U_i forment un recouvrement ouvert de $P^2(\mathbb{R})$ pour \mathcal{T} .

On considère les applications $\varphi_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow U_i$ définies par :

$$\begin{cases} \varphi_1(u, v) = [1, u, v] \\ \varphi_2(u, v) = [u, 1, v] \\ \varphi_3(u, v) = [u, v, 1]. \end{cases}$$

2 - Montrer que le recouvrement ouvert $\{U_i\}$ et les applications φ_i forment un atlas définissant une structure de surface différentiable sur $P^2(\mathbb{R})$. (*Un examen attentif du dessin ci-dessous permet de voir quel choix de représentants il faut faire pour avoir les φ_i^{-1} .*)



H_i et H'_i sont les plans d'équations respectives $x_i = 1$ et $x_i = 0$

Exercice 2

On identifie \mathbb{R}^2 à \mathbb{C} par l'isomorphisme (d'espaces vectoriels réels) :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} x + iy = z \in \mathbb{C}.$$

Soient $\lambda, \alpha \in]0, 1[$ et $a = \lambda e^{2i\pi\alpha}$. On note r la rotation d'angle $2\pi\alpha$ et h l'homothétie complexe $h(z) = az$.

1 - La représentation $\mathbb{Z} \longrightarrow \text{Diff}(\mathbb{C}^*)$ (groupe des difféomorphismes de \mathbb{C}^*) qui envoie le générateur 1 sur la rotation r définit une action Φ de \mathbb{Z} sur \mathbb{C}^* . Pour quelles valeurs de α l'action Φ est-elle fidèle ? libre ? propre ?

2 - La représentation $\mathbb{Z} \longrightarrow \text{Diff}(\mathbb{C}^*)$ qui envoie cette fois-ci le générateur 1 sur l'homothétie h définit une autre action Ψ de \mathbb{Z} sur \mathbb{C}^* .

- i) Montrer que l'action Ψ est libre et propre et en donner un domaine fondamental.
- ii) Quelle est la surface quotient $M = \mathbb{C}^*/\Psi$?

Exercice 3

Soient M et N deux surfaces différentiables et Γ un groupe dénombrable (discret). On se donne deux actions de Γ :

$$\Phi : \Gamma \times M \longrightarrow M \quad \text{et} \quad \Psi : \Gamma \times N \longrightarrow N.$$

On dira que Φ et Ψ sont *conjuguées* s'il existe un difféomorphisme $h : M \longrightarrow N$ tel que, pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $x \in M$ on ait :

$$h(\Phi(\gamma, x)) = \Psi(\gamma, h(x)).$$

Au niveau des représentations $\rho : \Gamma \longrightarrow \text{Diff}(M)$ et $\sigma : \Gamma \longrightarrow \text{Diff}(N)$, ceci signifie que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a :

$$\sigma(\gamma) = h \circ \rho(\gamma) \circ h^{-1}.$$

1 - On suppose que les actions Φ et Ψ sont libres et propres et conjuguées par un difféomorphisme $h : M \longrightarrow N$.

Montrer que h induit un difféomorphisme \bar{h} entre les surfaces M/Φ et N/Ψ (obtenues en prenant les quotients de M et N respectivement par les actions Φ et Ψ).

2 - On définit une action Φ du groupe cyclique $\Gamma = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ sur la sphère unité (de \mathbb{R}^3 muni de la norme euclidienne usuelle) $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$ par :

$$\Phi(\gamma, x) = \begin{cases} x & \text{si } \gamma = \bar{0} \\ -x & \text{si } \gamma = \bar{1} \end{cases}$$

Montrer que cette action est libre et que la surface quotient \mathbb{S}^2/Φ est difféomorphe au plan projectif $P^2(\mathbb{R})$.

Dans toute la suite \mathbb{R}^3 sera muni du produit scalaire $\langle (x, y, z), (x', y', z') \rangle = xx' + yy' + zz'$ pour lequel la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormée.

Exercice 4

Soit M l'ensemble des points (x, y, z) de l'espace \mathbb{R}^3 qui vérifient la relation $x^2 - y^2 - z = 0$.

1 - Montrer qu'une représentation paramétrique régulière $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow M$ de M est donnée par :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(u + v) \\ y = \frac{1}{2}(u - v) \\ z = uv \end{cases}$$

et en déduire ainsi que M est une surface différentiable.

2 - Donner la métrique riemannienne sur M induite par le produit scalaire de \mathbb{R}^3 .

3 - La surface M est-elle compacte ?

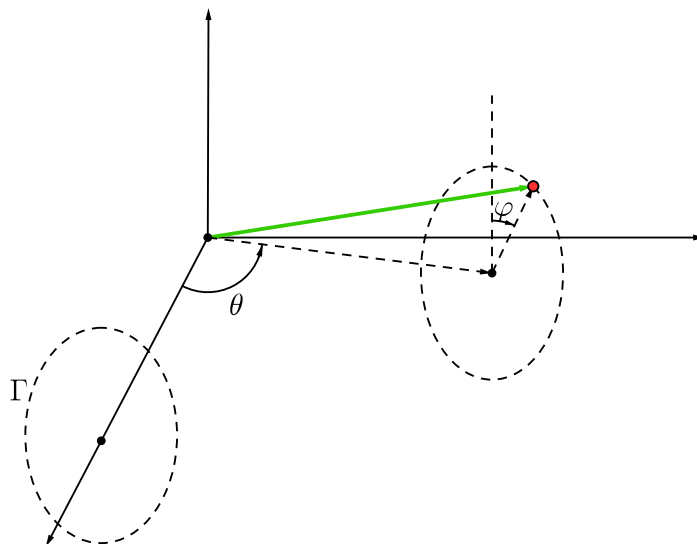
Exercice 5

Soit M une partie de \mathbb{R}^3 . On appelle *arc* dans M une application continue $\sigma : [0, 1] \rightarrow M$. Les points $\sigma(0)$ et $\sigma(1)$ sont respectivement l'*origine* et l'*extrémité* de σ . On dira que M est *connexe par arcs* si, pour tous points a et b de M , il existe un arc σ dans M ayant a pour origine et b pour extrémité.

Montrer que la sphère $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ est connexe par arcs en donnant explicitement un arc joignant deux points donnés de \mathbb{S}^2 .

Exercice 6

Soient r et R deux nombres réels tels que $R > r > 0$. Dans le plan (x, z) , on note Γ le cercle de centre $(R, 0, 0)$ et de rayon r . On fait tourner le plan (x, z) autour de la droite vectorielle de direction \vec{k} . Le cercle Γ engendre alors un tore T .



1 - Montrer que, sur le complémentaire U d'un cercle méridien et d'un cercle parallèle (qu'on précisera), T admet comme représentation paramétrique régulière, l'application :

$$\Psi : (\theta, \varphi) \in]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[\mapsto (x, y, z) \in U$$

donnée par :

$$\begin{cases} x = (R + r \sin \varphi) \cos \theta \\ y = (R + r \sin \varphi) \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases}$$

2 - Donner la métrique riemannienne g sur U induite par le produit scalaire de \mathbb{R}^3 .

3 - Calculer la courbure sectionnelle de la surface riemannienne (U, g) .

Exercice 7

Soient a , b et c trois nombres réels strictement positifs. On considère l'*ellipsoïde* \mathcal{E} d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

1 - Dire pourquoi \mathcal{E} est une surface régulière (énoncer de façon précise le théorème qui permet de justifier cela).

2 - Soient L le demi-plan fermé de \mathbb{R}^3 défini par $y = 0$ et $x \geq 0$, V l'ouvert $\mathbb{R}^3 \setminus L$ (i.e. \mathbb{R}^3 privé de L) et $S = \mathcal{E} \cap V$. Donner une représentation régulière $\Phi : U \rightarrow S$ (où U est un ouvert de \mathbb{R}^2).

3 - Montrer que la surface \mathcal{E} est diffeomorphe à la sphère unité \mathbb{S}^2 de \mathbb{R}^3 .

Exercice 8

On note M l'image de l'ouvert $U = \mathbb{R} \times]0, +\infty[\subset \mathbb{R}^2$ par l'application $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\begin{cases} x(u, v) = e^{-v} \cos u \\ y(u, v) = e^{-v} \sin u \\ z(u, v) = v. \end{cases}$$

1 - Montrer que M est une surface régulière de \mathbb{R}^3 .

2 - Donner la métrique riemannienne g sur M induite par le produit scalaire de \mathbb{R}^3 .

3 - Calculer la courbure sectionnelle de la surface riemannienne (M, g) .

4 - Donner, en chaque point $p \in M$, des équations cartésiennes de la normale à M .

5 - Montrer que M est diffeomorphe à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Exercice 9

On pose $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 z^2 = 1\}$ et $N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^4 + z^6 = 1\}$. On munit ces ensembles de la topologie induite par celle de \mathbb{R}^3 .

1 - Dire pourquoi M et N sont des surfaces régulières.

2 - Les surfaces M et N sont-elles compactes ?

Exercice 10

Soient F le point $(0, 0, 1)$ de \mathbb{R}^3 et \mathcal{H} le plan d'équation $z = -1$. On pose :

$$M = \{p \in \mathbb{R}^3 : \text{distance de } p \text{ à } F = \text{distance de } p \text{ à } \mathcal{H}\}.$$

1 - Montrer que la partie M est définie par une équation de la forme $z = f(x, y)$ qu'on explicitera.

2 - Montrer que M est une surface régulière de \mathbb{R}^3 . En donner une paramétrisation globale.

3 - Donner la métrique riemannienne g sur M induite par le produit scalaire de \mathbb{R}^3 .

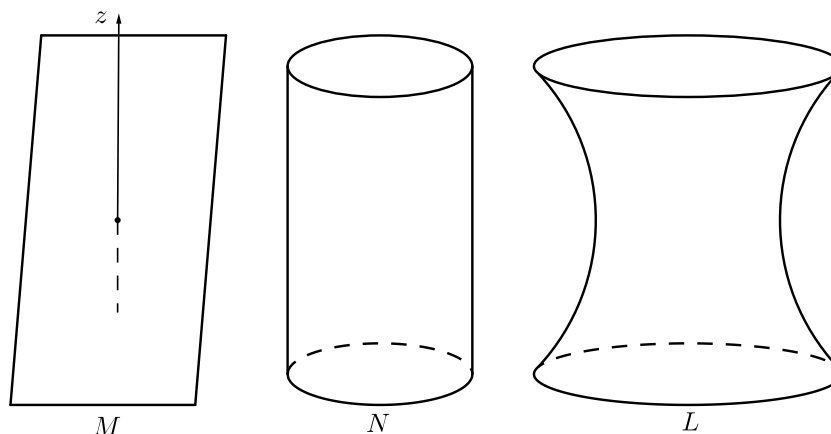
Exercice 11

On considère les surfaces M , N et L de l'espace \mathbb{R}^3 données comme suit :

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0 \text{ et } x^2 + y^2 \neq 0\}$$

$$N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$$

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}.$$



1- Montrer que les trois surfaces M , N et L sont deux à deux difféomorphes en exhibant de façon explicite des difféomorphismes (il suffit de faire cela entre M et N et puis entre N et L).

2 - Donner la métrique riemannienne h induite par \mathbb{R}^3 sur N et calculer la courbure sectionnelle de la surface riemannienne (N, h) .

Exercice 12

On munit le demi-plan $\mathbb{H}^2 = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ de la métrique riemannienne hyperbolique $g = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$.

Soient a un réel strictement positif différent de 1 et $\gamma : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ le difféomorphisme donné par $\gamma(z) = az$. On définit une action Ψ de $\Gamma = \mathbb{Z}$ à l'aide de la représentation ρ de \mathbb{Z} dans $\text{Diff}(\mathbb{H}^2)$ (groupe des difféomorphismes de \mathbb{H}^2) qui envoie 1 sur γ .

1 - Montrer que l'action Ψ est libre et propre. Dessiner l'orbite du point $z_0 = 1 + i$.

2 - Donner un domaine fondamental de Ψ .

3 - Montrer que la surface quotient $M = \mathbb{H}^2/\Psi$ est difféomorphe au cylindre ouvert $\mathcal{C} = \Gamma \times]0, \pi[$ où Γ est un cercle.

4 - Quelle métrique riemannienne h faut-il mettre sur \mathcal{C} pour que les deux surfaces riemanniennes (M, g) et (\mathcal{C}, h) soient isométriques ?

Exercice 13

On munit le demi-plan $\mathbb{H}^2 = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ de la métrique riemannienne hyperbolique $g = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = -4 \frac{dz \otimes d\bar{z}}{(z - \bar{z})^2}$. Le groupe $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ des matrices carrées réelles

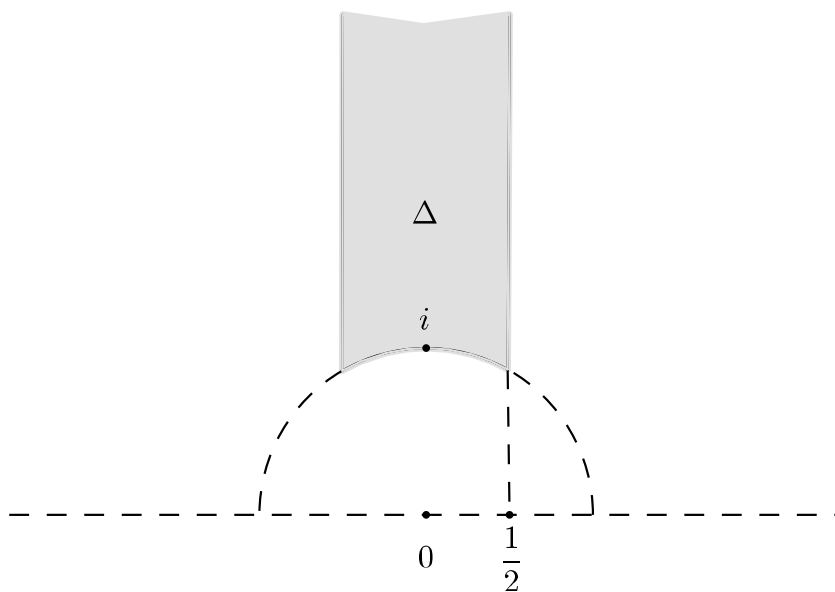
d'ordre 2 et de déterminant 1 agit sur \mathbb{H}^2 par la représentation $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow{\rho} \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \right\}$.

Cette action est par isométries.

On note $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ le sous-groupe de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ dont les éléments sont les matrices à coefficients dans \mathbb{Z} . On admet que $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ est discret dans $\text{SL}(2, \mathbb{R})$.

Soit Γ l'image de $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ par le morphisme $\rho : \text{SL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^2, g)$. On admet que Γ agit proprement sur \mathbb{H}^2 , que $\Delta = \{z = x + iy \in \mathbb{H}^2 : |x| \leq \frac{1}{2} \text{ et } |z| \geq 1\}$ (voir le dessin ci-dessous) en est un domaine fondamental et qu'il est engendré par les isométries $S(z) = -\frac{1}{z}$ et $T(z) = z + 1$.

- 1 - Montrer que l'action de Γ sur \mathbb{H}^2 n'est pas libre. (Voir le stabilisateur du point i .)
- 2 - Dessiner le quotient $\mathcal{O} = \mathbb{H}^2/\Gamma$. À quelle surface connue est-il homéomorphe ?



APPENDICE

Cet appendice rassemble les réponses, que j'ai données sous forme écrite, à quelques-unes des questions que m'ont posées des étudiants sur ceci ou cela en théorie des groupes. Il pourrait être utile dans la lecture de certains passages des deux parties principales. C'est la raison pour laquelle je l'ai rajouté à ce texte.

NOTIONS UTILES EN THÉORIE DES GROUPES

1. La notion de section

1.1. En général

Soient X et B deux ensembles (non vides bien sûr) et $\pi : X \rightarrow B$ une application surjective. Pour tout $b \in B$: $X_b = \pi^{-1}(b) = \{x \in X : \pi(x) = b\}$ est une partie non vide de X appelée *fibres* de π au-dessus de b . Si $b \neq b'$, les deux fibres X_b et $X_{b'}$ sont disjointes. La famille $\{X_b\}_{b \in B}$ (indexée par B) est donc une partition de X .

Dans chaque fibre X_b , on peut choisir un et un seul élément $\sigma(b)$. Ceci est évident si l'ensemble B est fini ; c'est aussi clair si B est dénombrable. Pour B non dénombrable, l'axiome du choix nous permet de faire cela. On définit ainsi une application :

$$(1) \quad \sigma : b \in B \mapsto \sigma(b) \in X \quad \text{avec} \quad \sigma(b) \in X_b.$$

On a donc $\pi \circ \sigma = \text{id}$ de B . Une vérification immédiate montre que σ est **injective**. On dira que σ est une *section* de π . Cette section σ permet de “remonter” l'ensemble B dans X et l'y plonger de telle sorte que la restriction de π à $\Sigma = \sigma(B)$ soit une bijection sur B .

Du point de vue ensembliste, une surjection $\pi : X \rightarrow B$ admet donc toujours une section $\sigma : B \rightarrow X$. Si les ensembles X et B ont une structure supplémentaire et que π préserve cette structure, il est alors souhaitable que σ la préserve aussi. Expliquons cela sur des exemples :

- Si X et B sont des espaces métriques (ou généralement des espaces topologiques) et π est continue, il serait bien que σ soit aussi continue.
- Si X et B sont des groupes et π est un homomorphisme, il serait bien que σ soit aussi un homomorphisme.
- Si X et B sont des espaces vectoriels et π est linéaire, il serait bien que σ soit aussi linéaire.
- Si X et B sont des espaces normés et π est linéaire continue, il serait bien que σ soit aussi linéaire et continue.

On peut multiplier les exemples mais déjà ceux-là expliquent suffisamment les choses. Il n'est malheureusement pas toujours possible d'avoir de telles sections ; nous allons voir cela sur quelques exemples : un sur lequel ça marche et deux autres sur lesquels ça ne marche pas.

1.2. Exemples

– Supposons que X et B soient des espaces vectoriels sur le corps K (\mathbb{R} ou \mathbb{C}) et π linéaire. Alors π admet toujours une section linéaire $\sigma : B \rightarrow X$. En effet, soit $\{b_i\}_{i \in I}$ une base de B ; pour chaque $i \in I$, soit x_i un vecteur de X tel que $\pi(x_i) = b_i$. Comme n'importe quel vecteur b de B s'écrit $b = \lambda_{i_1} b_{i_1} + \dots + \lambda_{i_n} b_{i_n}$ (avec $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n} \in \mathbb{K}$), on définit $\sigma(b)$ en posant :

$$(2) \quad \sigma(b) = \lambda_{i_1} x_{i_1} + \dots + \lambda_{i_n} x_{i_n}.$$

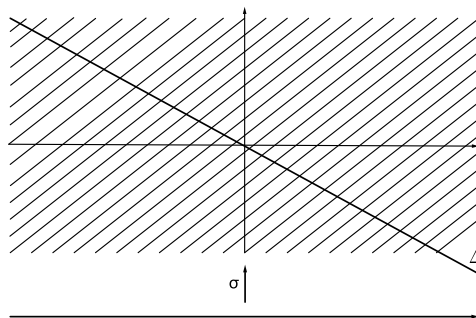
L'application $\sigma : B \rightarrow X$ ainsi définie est bien une section linéaire de π . Si X et B sont en plus normés et π est continue, alors une section continue $\sigma : B \rightarrow X$ n'existe pas

toujours si la dimension de B est infinie (la construction d'un exemple à cet effet est un peu plus laborieuse). Mais si $\dim(B) < +\infty$, une telle section existe toujours. Regardons l'exemple simple qui suit.

– Supposons $X = \mathbb{R}^2$, $B = \mathbb{R}$ (chacun de ces espaces est muni de l'une de ses normes usuelles) et π définie par $\pi(x, y) = x - y$ (π est linéaire continu). Alors les fibres X_b de π sont les droites affines $x - y = c$ avec c une constante (variant dans \mathbb{R}). Toute application linéaire :

$$(3) \quad \sigma_\mu : x \in \mathbb{R} \mapsto (x, \mu x) \in \mathbb{R}^2$$

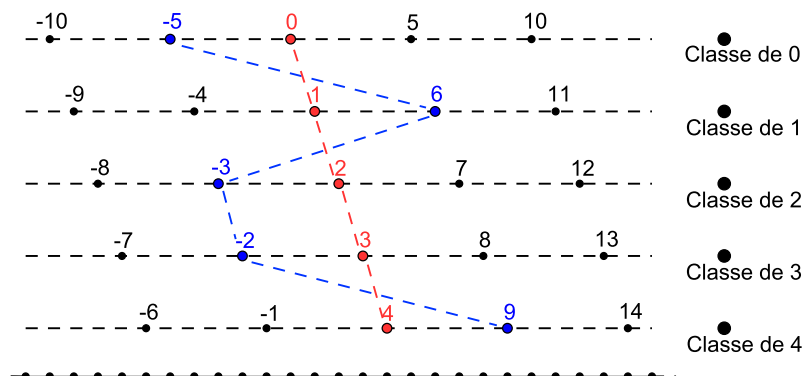
où μ est un réel tel que $\mu \neq 1$, est alors une section linéaire continue de π .



Les droites parallèles sont les fibres de l'application linéaire π . La droite Δ est l'image de la section $\sigma_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Elle coupe chacune des fibres en un et un seul point : elle les "sectionne", d'où son appellation.

– Supposons $X = \mathbb{Z}$; soit H le sous-groupe $n\mathbb{Z}$ des multiples de n où n est un entier strictement supérieur à 1. Alors H est un sous-groupe distingué de $X = \mathbb{Z}$ et le quotient $B = X/H$ n'est rien d'autre que le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ des classes modulo n de \mathbb{Z} . La projection canonique $\pi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un morphisme surjectif de groupes. L'application π admet des sections au sens ensembliste (cf. dessin qui suit pour $n = 5$) mais aucune d'elles ne saurait être un morphisme de groupes. En effet, si $\sigma : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ est un "homomorphisme

section" de π , l'image de $\bar{1}$ est un entier non nul k de \mathbb{Z} ; comme $\overbrace{\bar{1} + \dots + \bar{1}}^{n \text{ fois}} = \bar{n} = \bar{0}$, l'entier $\overbrace{k + \dots + k}^{n \text{ fois}} = nk$ doit être nul, ce qui est absurde !



2. Extensions de groupes

On se donne deux groupes quelconques H et Γ . *Peut-on en construire d'autres à partir de ces deux-là ?* La réponse est oui et nous allons donner un procédé de construction. Pour éviter des confusions éventuelles, on note $+$ la loi sur H , 0 sera l'élément neutre de H et 1 celui de Γ .

2.1. Définition. On appelle **extension** de Γ par H (ou de H par Γ) toute suite exacte courte de groupes et de morphismes :

$$(4) \quad 0 \longrightarrow H \xrightarrow{j} G \xrightarrow{\pi} \Gamma \longrightarrow 1.$$

Cela signifie que j est injectif, π est surjectif et le noyau de π est égal à l'image de j .

Bien sûr le groupe G est plus gros que H puisqu'il le contient mais aussi plus gros que Γ puisqu'il se surjecte dessus. (Dans la littérature mathématique, on parle souvent d'extension de Γ par H même si c'est plutôt H qu'on étend !)

2.2. Produit direct ou extension triviale

On pose $G = H \times \Gamma$; sur cet ensemble on définit la loi de composition interne :

$$(5) \quad (h, \gamma) \cdot (h', \gamma') = (h + h', \gamma\gamma').$$

Il est facile de voir qu'on obtient ainsi un groupe dans lequel l'élément neutre est $(0, 1)$ et l'inverse de (h, γ) est $(-h, \gamma^{-1})$. Tout élément de la forme $(h, 1)$ commute avec tout élément de la forme $(0, \gamma)$. On dira que $G = H \times \Gamma$ est le *produit direct* des deux groupes H et Γ .

On définit les morphismes $j : H \longrightarrow G$ et $\pi : G \longrightarrow \Gamma$ par $j(h) = (h, 1)$ et $\pi(h, \gamma) = \gamma$. On vérifie immédiatement que la suite :

$$0 \longrightarrow H \xrightarrow{j} G \xrightarrow{\pi} \Gamma \longrightarrow 1$$

est exacte. On dira que G est une *extension triviale* de Γ par H .

2.3. Produit semi-direct

On rappelle qu'un *automorphisme* de H n'est rien d'autre qu'un isomorphisme de groupes $H \longrightarrow H$. L'ensemble des automorphismes de H muni de la composition des applications est un groupe qu'on note $\text{Aut}(H)$.

Une *représentation* de Γ dans H est un morphisme de groupes $\rho : \Gamma \longrightarrow \text{Aut}(H)$. Il permet de définir une action du groupe Γ sur H :

$$(\gamma, h) \in \Gamma \times H \longmapsto \rho(\gamma)(h) \in H.$$

Ainsi, un élément quelconque γ de Γ est vu, à l'aide de ρ , comme un automorphisme de H . Pour simplifier, et quand il n'y a pas de confusion sur la représentation ρ , l'élément $\rho(\gamma)(h)$ (transformé de h par l'automorphisme $\rho(\gamma)$) sera noté $\gamma \cdot h$. On munit $H \times \Gamma$ de la loi de composition interne :

$$(6) \quad (h', \gamma') \cdot (h, \gamma) = (\gamma' \cdot h + h', \gamma'\gamma).$$

qui fait de $H \times \Gamma$ un groupe. Son élément neutre est $(0, 1)$ et l'inverse de (h, γ) est $(-(\gamma^{-1} \cdot h), \gamma^{-1})$. Le groupe G ainsi construit se note $H \rtimes_{\rho} \Gamma$ et s'appelle produit *semi-direct* de H par Γ relativement à ρ . Il est évident que si ρ est le morphisme trivial, c'est-à-dire si $\rho(\gamma) = \text{identité de } H$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, $H \rtimes_{\rho} \Gamma$ est le produit direct $H \times \Gamma$.

Là aussi on définit les morphismes $j : H \longrightarrow G$ et $\pi : G \longrightarrow \Gamma$ par $j(h) = (h, 1)$ et $\pi(h, \gamma) = \gamma$ et on vérifie immédiatement que la suite :

$$(7) \quad 0 \longrightarrow H \xrightarrow{j} H \times_{\rho} \Gamma \xrightarrow{\pi} \Gamma \longrightarrow 1$$

est exacte. On a donc une extension de Γ par H . Mais c'est une extension qui possède une propriété en plus : le morphisme π admet l'application :

$$\sigma : \gamma \in \Gamma \longmapsto (0, \gamma) \in G$$

comme section. On peut dire en quelque sorte que H et l'image de Γ par la section σ sont deux facteurs qui permettent de fabriquer le groupe G . Ceci est illustré par le :

2.4. Théorème. Soient H et Γ deux sous-groupes d'un groupe G tels que :

- H est distingué dans G ;
- $H \cap \Gamma = \{1\}$;
- l'application $\phi : (h, \gamma) \in H \times \Gamma \longmapsto h\gamma \in G$ est bijective.

Soit ρ le morphisme de Γ dans $\text{Aut}(G)$ qui à γ associe l'automorphisme intérieur φ_{γ} (i.e. $\varphi_{\gamma}(g) = \gamma^{-1}g\gamma$). Alors l'application $\phi : (h, \gamma) \in H \times_{\rho} \Gamma \longmapsto h\gamma \in G$ est un isomorphisme de groupes. On dira que G est le produit semi-direct **interne** de ses deux sous-groupes H et Γ .

3. Divers

Une extension $0 \longrightarrow H \xrightarrow{j} G \xrightarrow{\pi} \Gamma \longrightarrow 1$ est dite *scindée* si le morphisme π admet une section $\sigma : \Gamma \longrightarrow G$ (bien sûr, σ doit être un morphisme de groupes) ; sinon, on dira qu'elle est *non scindée*.

3.1. Nous avons vu que si G est le produit semi-direct d'un groupe H par un groupe Γ , alors l'extension : $0 \longrightarrow H \xrightarrow{j} H \times_{\rho} \Gamma \xrightarrow{\pi} \Gamma \longrightarrow 1$ est scindée. Réciproquement, soit $0 \longrightarrow H \xrightarrow{j} G \xrightarrow{\pi} \Gamma \longrightarrow 1$ une extension scindée par une section $\sigma : \Gamma \longrightarrow G$. Notons $\tilde{\Gamma}$ le sous-groupe de G image de Γ par σ ($\sigma : \Gamma \longrightarrow \tilde{\Gamma}$ est un isomorphisme). Alors :

- H est distingué dans G puisque noyau du morphisme π .
- $H \cap \tilde{\Gamma} = \{e\}$. En effet, soit g un élément de $H \cap \tilde{\Gamma}$ qui est de la forme $g = \sigma(\gamma)$; donc $\gamma = \pi(g) = \pi(\sigma(\gamma)) = 1$ puisque $g \in H = \ker(\pi)$; comme σ est un morphisme $g = \sigma(\gamma) = \sigma(1) = e$.
- L'application $\phi : (h, \tilde{\gamma}) \in H \times \tilde{\Gamma} \longmapsto h\tilde{\gamma} \in G$ est une bijection. Montrons qu'elle est injective. À cet effet soient $(h_1, \tilde{\gamma}_1)$ et $(h_2, \tilde{\gamma}_2)$ deux éléments de $H \times \tilde{\Gamma}$ tels que $h_1\tilde{\gamma}_1 = h_2\tilde{\gamma}_2$; alors $\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2^{-1} = h_1^{-1}h_2$, ce qui montre que $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_2$ sont équivalents modulo H , donc égaux puisque $\tilde{\Gamma}$ ne contient qu'un et un seul élément de chaque classe d'équivalence. L'égalité $\tilde{\gamma}_1 = \tilde{\gamma}_2$ implique automatiquement $h_1 = h_2$. Montrons maintenant que ϕ est surjective. Soit $g \in G$ et posons $\gamma = \pi(g)$. De façon évidente, g et $\tilde{\gamma} = \sigma(\gamma)$ sont équivalents modulo H ; il existe donc $h \in H$ tel que $g\tilde{\gamma}^{-1} = h$, d'où $g = h\tilde{\gamma} = \phi(h, \tilde{\gamma})$.

Pour finir, H étant distingué dans G , $\tilde{\Gamma}$ agit dessus par automorphismes intérieurs (par conjugaison si on préfère). D'après le théorème 2.4. G est le produit semi-direct interne de H et $\tilde{\Gamma}$.

3.2. Soient G un groupe et A une partie de G . On appelle *centralisateur* de A l'ensemble $\mathcal{C}(A)$ de tous les éléments de G qui commutent à tout élément de A :

$$\mathcal{C}(A) = \{g \in G : ga = ag \text{ pour tout } a \in A\}.$$

On vérifie immédiatement que, si A est symétrique ($a \in A \implies a^{-1} \in A$), $\mathcal{C}(A)$ est un sous-groupe de G . Le centralisateur $\mathcal{C}(G)$ de tout le groupe G est appelé *centre* de G ; il y est distingué.

Soit $0 \longrightarrow H \xrightarrow{j} G \xrightarrow{\pi} \Gamma \longrightarrow 1$ une extension scindée par une section $\sigma : \Gamma \longrightarrow G$. Supposons que σ est à valeurs dans le centralisateur $\mathcal{C}(H)$. Alors l'extension considérée est triviale *i.e.* le groupe G est isomorphe au produit direct $H \times \Gamma$. C'est le cas en particulier d'une *extensions centrale* scindée (*i.e.* pour laquelle $H \subset \mathcal{C}(G)$). (Les vérifications sont laissées au lecteur.)

4. Exemples d'extensions

4.1. Voici une extension dont on a déjà parlé mais cela ne fait pas de mal de la reprendre. On prend $G = \mathbb{Z}$ et $H = n\mathbb{Z}$ le sous-groupe des multiples de n où n est un entier strictement supérieur à 1. Le quotient $\Gamma = G/H$ est le groupe des classes résiduelles $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ modulo n . Notons $j : H \hookrightarrow G$ l'inclusion et $\pi : G \longrightarrow \Gamma$ la projection canonique. Nous avons alors une suite exacte :

$$(8) \quad 0 \longrightarrow n\mathbb{Z} \xrightarrow{j} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

donc une extension de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par $n\mathbb{Z}$. Comme on l'a déjà vu, le morphisme projection π n'a pas de morphisme section et donc l'extension (8) n'est pas scindée. C'est l'exemple le plus simple d'extension non scindée qu'on puisse donner si jamais la question est posée !

4.2. Soit \mathcal{P} un espace affine dirigé par un espace vectoriel $\vec{\mathcal{V}}$ (réel ou complexe) de dimension n . On rappelle que la structure affine sur \mathcal{P} est définie par une application $\Phi : (M, N) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P} \mapsto \overrightarrow{MN} \in \vec{\mathcal{V}}$ telle que :

- (i) $\overrightarrow{ML} + \overrightarrow{LN} = \overrightarrow{MN}$ (relation de Chasles) ;
- (ii) pour tout $O \in \mathcal{P}$, l'application partielle $\Phi_O : M \in \mathcal{P} \mapsto \overrightarrow{OM} \in \vec{\mathcal{V}}$ est une bijection. Tout point M de \mathcal{P} s'écrit ainsi de façon unique $M = O + \vec{u}$ avec $\vec{u} \in \vec{\mathcal{V}}$.

L'ensemble des bijections affines de \mathcal{P} forment un groupe appelé *groupe affine* de \mathcal{P} et noté $\text{Aff}(\mathcal{P})$. Il se surjecte sur le *groupe linéaire* $\text{GL}(\vec{\mathcal{V}})$ de l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{V}}$ par le morphisme π qui à toute application affine f associe sa direction \vec{f} . Le noyau de π est le sous-groupe \mathcal{T} des translations de \mathcal{P} . Nous avons ainsi une suite exacte :

$$(9) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{T} \xrightarrow{j} \text{Aff}(\mathcal{P}) \xrightarrow{\pi} \text{GL}(\vec{\mathcal{V}}) \longrightarrow 1$$

donc une extension de $\text{GL}(\vec{\mathcal{V}})$ par \mathcal{T} . Cette extension est scindée. En effet, si O est un point de \mathcal{P} , on peut munir \mathcal{P} d'une structure d'espace vectoriel pour laquelle la bijection $\Phi_O : M \in \mathcal{P} \mapsto \overrightarrow{OM} \in \vec{\mathcal{V}}$ est un isomorphisme. Ainsi, pour cette structure d'espace vectoriel sur \mathcal{P} , les applications linéaires sont exactement les applications affines qui fixent le point O . À tout isomorphisme linéaire \vec{f} de $\vec{\mathcal{V}}$ on associe alors l'isomorphisme affine $f = \sigma(\vec{f})$ défini par le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \xrightarrow{\Phi_O} & \vec{\mathcal{V}} \\ f \downarrow & & \downarrow \vec{f} \\ \mathcal{P} & \xrightarrow{\Phi_O} & \vec{\mathcal{V}} \end{array}$$

Il est facile de vérifier que σ est un homomorphisme de $\text{GL}(\vec{\mathcal{V}})$ dans $\text{Aff}(\mathcal{P})$ et qu'il vérifie $\pi \circ \sigma = \text{identité de } \text{GL}(\vec{\mathcal{V}})$, c'est-à-dire σ est une section de π . Ce qui montre que l'extension

(9) est scindée. (Le scindement qu'on vient de construire dépend bien entendu du choix du point O .)

Lorsque \mathcal{P} est l'espace vectoriel \mathbb{R}^n muni de sa structure affine canonique, le groupe linéaire $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ et la section σ n'est rien d'autre que l'injection $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$; le groupe additif $(\mathbb{R}^n, +)$ est vu comme le sous-groupe des translations. Ainsi :

$$(10) \quad \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}).$$

Un exemple plus simple à comprendre est le groupe GA des transformations affines préservant l'orientation de la droite réelle \mathbb{R} . (Ce sont les transformations de la forme $x \in \mathbb{R} \mapsto ax + b \in \mathbb{R}$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$.) Le groupe multiplicatif \mathbb{R}_+^* agit (par automorphismes) sur le groupe additif \mathbb{R} :

$$(a, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \mapsto at \in \mathbb{R}.$$

Le produit semi-direct $\mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}_+^*$ associé à cette action n'est alors rien d'autre que le groupe GA qu'on appelle *groupe affine* de la droite réelle.

4.3. Le groupe linéaire $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ et le groupe affine $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ contiennent de nombreux sous-groupes extrêmement intéressants et dont pas mal d'entre eux sont des produits semi-directs. Ils s'obtiennent dès qu'on impose aux transformations de préserver une structure géométrique supplémentaire sur l'espace vectoriel \mathbb{R}^n . Voici des exemples concrets.

- Munissons \mathbb{R}^n de son produit scalaire usuel $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$. Ce produit scalaire définit une norme $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ sur l'espace vectoriel \mathbb{R}^n et une distance $d(x, y) = \|x - y\|$ sur l'espace affine \mathbb{R}^n . On dira qu'un automorphisme linéaire $\varphi \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ est *orthogonal* s'il vérifie :

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{pour tous } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Ces automorphismes forment un sous-groupe de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ noté $\mathrm{O}(n)$ et appelé *groupe orthogonal* de \mathbb{R}^n ; les éléments $\varphi \in \mathrm{O}(n)$ de déterminant 1 forment un sous-groupe $\mathrm{SO}(n)$ appelé *groupe orthogonal spécial* de \mathbb{R}^n . Ces groupes agissent naturellement sur \mathbb{R}^n et donnent lieu à des extensions scindées :

$$(11) \quad 0 \longrightarrow \mathbb{R}^n \xrightarrow{j} \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\pi} \mathrm{O}(n) \longrightarrow 1$$

et

$$(12) \quad 0 \longrightarrow \mathbb{R}^n \xrightarrow{j} \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\pi} \mathrm{SO}(n) \longrightarrow 1$$

où $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ (resp. $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^n)$) est le groupe des isométries affines de \mathbb{R}^n (resp. des isométries affines de \mathbb{R}^n qui préservent l'orientation). Le sous-groupe $\mathrm{SO}(n)$ est le noyau du morphisme \det de $\mathrm{O}(n)$ sur le groupe multiplicatif $\{1, -1\}$ qui à φ associe son déterminant $\det(\varphi)$. On a donc une extension :

$$(13) \quad 1 \longrightarrow \mathrm{SO}(n) \hookrightarrow \mathrm{O}(n) \xrightarrow{\det} \{1, -1\} \longrightarrow 1.$$

Elle est scindée : une section du morphisme \det est obtenue en envoyant -1 sur n'importe quel automorphisme orthogonal d'ordre 2 (*i.e.* de carré trivial) et qui ne respecte pas l'orientation de \mathbb{R}^n , par exemple une réflexion par rapport à un hyperplan vectoriel.

• Soit A une matrice carrée d'ordre n inversible. Pour tout entier relatif k on note A^k la puissance $|k|^{\text{ème}}$ de A si $k > 0$, de A^{-1} si $k < 0$; $A^0 = I$ (matrice identité). Supposons que A est à coefficients entiers et de déterminant 1; alors son inverse A^{-1} est aussi à coefficients entiers. Si A est d'ordre infini (A^k différente de la matrice identité pour tout $k \in \mathbb{Z}$), elle engendre une action fidèle de $\Gamma = \mathbb{Z}$ sur $H = \mathbb{Z}^n$:

$$(k, \mathbf{m}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^n \longmapsto A^k(\mathbf{m}) \in \mathbb{Z}^n.$$

Cette action permet de construire le produit semi-direct $G = \mathbb{Z}^n \rtimes_A \mathbb{Z}$, donc une extension scindée :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^n \hookrightarrow G \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Lorsque la matrice A a toutes ses valeurs propres réelles, positives et différentes de 1, ces groupes possèdent des propriétés dynamiques extrêmement riches.

4.4. Soit \mathbb{K} un corps commutatif quelconque (c'est par exemple \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} ou un corps fini). Soit G le groupe de matrices :

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{K} \right\}.$$

C'est un groupe non commutatif mais nilpotent (le lecteur peut le vérifier). Son centre

$H = \mathcal{C}(G)$ est constitué des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et est isomorphe au groupe

additif $(\mathbb{K}, +)$. L'application $\pi : \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \longmapsto (x, y) \in \mathbb{K}^2$ est un homomorphisme

surjectif de noyau H . On a donc un isomorphisme $\Gamma = G/H \xrightarrow{\simeq} \mathbb{K}^2$ (\mathbb{K}^2 est muni de sa structure habituelle de groupe additif) et par suite une extension :

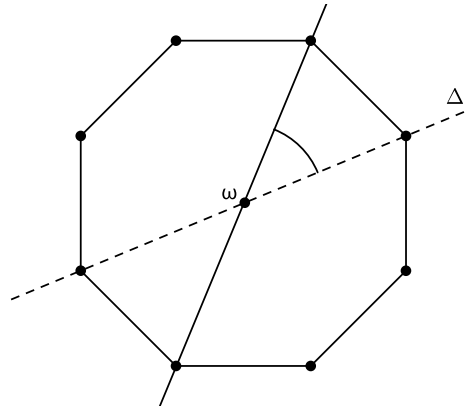
$$0 \longrightarrow \mathbb{K} \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{K}^2 \longrightarrow 0.$$

Cette extension est non scindée. En effet, toute section $\sigma : \Gamma \longrightarrow G$ arrive dans le centralisateur de H (puisque H est le centre de G) et donc G sera isomorphe au produit direct $\mathbb{K} \times \mathbb{K}^2 \simeq \mathbb{K}^3$, ce qui n'est pas le cas puisque G n'est pas commutatif.

4.5. Soit \mathfrak{P}_n un polygone régulier à n côtés (avec $n \geq 3$) dans le plan affine euclidien. Pour $n = 3$, c'est un triangle équilatéral, pour $n = 4$, c'est un carré *etc.* Un tel polygone est toujours inscrit dans un cercle γ dont on notera ω le centre.

Soit Δ la droite passant par ω et l'un des sommets de \mathfrak{P}_n et posons $\theta_n = \frac{2\pi}{n}$. Un examen de la figure ci-dessous montre immédiatement que la réflexion s d'axe Δ et la rotation ρ de centre ω et d'angle θ_n sont des isométries de \mathcal{P} qui préservent le polygone \mathfrak{P}_n . Elles engendrent un groupe noté D_n qu'on appelle *groupe diédral* d'ordre $2n$ (nombre de ses éléments). En fait D_n est le groupe des symétries de \mathfrak{P}_n . La rotation ρ engendre un groupe cyclique $C_n = \{1, \rho, \rho^2, \dots, \rho^{n-1}\}$ d'ordre n (isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$), les autres éléments sont $s\rho, \dots, s\rho^{n-1}$ et sont les réflexions par rapport aux droites passant par ω et les autres sommets du n -gone (autres que celui qu'on a fixé). En fait, le groupe D_n est un produit semi-direct $C_n \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Quant à $D_1 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, c'est le groupe des symétries d'un triangle isocèle qui n'est pas équilatéral ; $D_2 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est celui d'un rectangle qui n'est pas un carré.



5. Groupes résolubles, groupes nilpotents

Soit G un groupe d'élément neutre e . On appelle *commutateur* de $x, y \in G$, l'élément $xyx^{-1}y^{-1}$; on dira que x et y *commutent* si $xyx^{-1}y^{-1} = e$. Évidemment, dans un groupe abélien, tout commutateur est trivial. Le groupe G n'est pas abélien s'il admet au moins un commutateur non trivial. Ces commutateurs vont permettre de "mesurer" le "degré de non commutativité" du groupe. Pour simplifier $xyx^{-1}y^{-1}$ sera noté $[x, y]$.

On note G_1 ou $[G, G]$ le sous-groupe de G engendré par tous les commutateurs *i.e.* le plus petit sous-groupe contenant la partie $\{[x, y] : x, y \in G\}$. On vérifie facilement que G_1 est un sous-groupe distingué de G . On pose :

$$G_0 = G \quad \text{et, pour tout } k \geq 1, \quad G_k = [G_{k-1}, G_{k-1}].$$

De façon immédiate, on a $\dots G_k \subset G_{k-1} \subset \dots \subset G_2 \subset G_1 \subset G_0 = G$; d'autre part, pour tout $k \geq 1$, G_k est un sous-groupe distingué de G_{k-1} .

5.1. Définition. On dira que le groupe G est **résoluble** s'il existe $k \geq 1$ tel que $G_k = \{e\}$.

Le plus petit entier k tel que $G_k = \{e\}$ et $G_{k-1} \neq \{e\}$ est appelé *degré de résolubilité* du groupe G . Si $k = 1$, le groupe G est commutatif. Plus l'entier k est "petit" plus G paraît "proche" d'un groupe commutatif. Les groupes résolubles forment une classe très importante et sont à la base de la *théorie de Galois* (résolution des équations algébriques par radicaux).

Il existe une catégorie intermédiaire entre les groupes abéliens et les groupes résolubles. Elle joue aussi un rôle important en géométrie et dans pas mal d'autres domaines en algèbre. Posons :

$$G^0 = G \quad \text{et, pour tout } k \geq 1, \quad G^k = [G^{k-1}, G].$$

On vérifie aussi facilement que $\dots G^k \subset G^{k-1} \subset \dots \subset G^2 \subset G^1 \subset G^0 = G$ et que, pour tout $k \geq 1$, G^k est un sous-groupe distingué de G^{k-1} .

5.2. Définition. On dira que le groupe G est **nilpotent** s'il existe $k \geq 1$ tel que $G^k = \{e\}$.

Le plus petit entier k tel que $G^k = \{e\}$ et $G^{k-1} \neq \{e\}$ est appelé *degré de nilpotence* du groupe G . Si $k = 1$, le groupe G est commutatif ; si $k = 2$, on dira que G est *métabélien*.

Comme $G_k \subset G^k$ pour tout k , un groupe nilpotent est forcément résoluble. On a donc la suite d'inclusions entre catégories de groupes :

$$\{\text{groupes abéliens}\} \subset \{\text{groupes nilpotents}\} \subset \{\text{groupes résolubles}\}.$$

Ces inclusions sont évidemment strictes.

5.3. Exemple résoluble non nilpotent

Soit G le groupe des transformations affines préservant l'orientation de la droite réelle \mathbb{R} , c'est-à-dire les applications de la forme :

$$g : x \in \mathbb{R} \mapsto ax + b \in \mathbb{R}$$

avec $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Si l'élément $g \in G$ est défini par le couple (b, a) et g' par le couple (b', a') alors gg' est défini par le couple $(a'b + b', a'a)$: facile à voir, il suffit de composer les applications g et g' dans l'ordre $g' \circ g$ (faire attention à cela dans la suite des calculs). L'inverse de g est donné par le couple $(-\frac{b}{a}, \frac{1}{a})$.

- Le groupe multiplicatif \mathbb{R}_+^* agit sur le groupe additif par homothéties :

$$(a, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \mapsto at \in \mathbb{R}.$$

Cette action permet de construire le produit semi-direct $\mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}_+^*$ dont il est facile de voir que c'est exactement le groupe G .

- Pour montrer que G est résoluble non nilpotent, il suffit de reprendre la preuve donnée pour le groupe affine complexe dans la question bonus de l'exercice 7 page 81.

RÉFÉRENCES

On a bien vu que ce texte est un bref aperçu de la théorie des fonctions d'une variable complexe et des surfaces riemanniennes, aussi bien sous l'aspect analytique que géométrique. Bien entendu, il manque délibérément de développement ; ceux qui désirent en savoir plus peuvent consulter les références mentionnées ci-dessous.

- [Ahl] AHLFORS, L.V. *Complex Analysis*. Collection *Mathematics Series*, McGraw-Hill (1979).
- [Be] BEARDON, A. F. *The Geometry of Discrete Groups*. GTM 91, Springer-Verlag, (1983).
- [BP] BENEDETTI, R. & PETRONIO, C. *Lectures on Hyperbolic Geometry*. Universitext, Springer-Verlag, (1992).
- [BBM] BERARD BERGERY, L., BOURGUIGNON, J. P. & MAZET, E. *Variétés à courbure négative*. Publications Mathématiques de l'Université de Paris VII, (1971).
- [Ca] DO CARMO, M. *Geometria riemanniana*. Projeto Euclides, Rio de Janeiro, (1988).
- [Car] CARTAN, H. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*. Collection *Enseignement des Sciences*, Hermann (1985).
- [DNF] DOUBROVINE, B., NOVIKOV, S. & FOMENKO, A. *Géométrie contemporaine*. Tomes I, II et III, Editions MIR, (1979).
- [ST] SÁ EARP, R. & TOUBIANA, E. *Introduction à la géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann*. Bibliothèque des Sciences, Diderot Éditeur (1997).
- [Fr] FREITAG, E. *Hilbert Modular Forms*. Springer-Verlag, (1990).
- [JS] JONES, G. & SINGERMAN, D. *Complex Functions. An algebraic and geometric viewpoint*. Cambridge University Press, (1987).
- [La] LANG, S. *Faire des Maths : grands problèmes de géométrie et de l'espace*. Revue du Palais de la découverte 12, 114, (1984), 21-72.
- [LC] LAVRENTIEV, M. & CHABAT, B. *Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe*. Éditions Mir, Moscou (1972).
- [Ma] MAASS, H. *Lectures on Modular Functions of one Complex Variable*. Tata Institute of Fundamental Research, (1964).
- [Po] POSTNIKOV, M. *Leçons de géométrie. Variétés différentiables*. Editions MIR, (1990).
- [Ra] RATCLIFFE, J.G. *Foundations of Hyperbolic Geometry*. GTM 149, Springer-Verlag (1994).
- [SG] SAINT-GERVAIS, H. P. *Uniformisation des surfaces de Riemann*. ENS Éditions, Lyon (2010).
- [Ve] VERJOVSKY, A. *Introducción a la geometría y variedades hiperbólicas*. Publié au Mexique par Instituto Politécnico Nacional, (1986).
- [Vid] VIDONNE, R. *Groupe circulaire, rotations et quaternions*. Collections CAPES et Agrégation, Ellipses (2001).
- [Vog] VOGEL, P. *Fonctions analytiques*. Collection *Licence*, Dunod (1999).

INDEX ALPHABÉTIQUE

Action	
– libre	105
– séparante	105
– propre	106
– totalement discontinue	105
– transitive	105
Application	
– conforme	123
– différentiable	101
– tangente	104
Automorphisme d'un groupe	141
Biholomorphisme	54
Birapport	51
Centralisateur	51
Centre	143
Champ de vecteurs	143
Chemin	34
Connexion	
– affine	115
– riemannienne	116
Convergence	
– absolue	21
– rayon de	24
– disque de	24
Conditions de Cauchy-Riemann	33
Courbure	
– tenseur de	118
– courbure sectionnelle	119
Critère	
– de d'Alembert	22
– de Cauchy	21
Dérivée covariante	115
Difféomorphisme	102
Domaine fondamental	106
Espace	
– projectif	131
– tangent	103
Étoilé	40
Facteur de conformité	123
Fonction	
– analytique	28

– exponentielle	25
– holomorphe	31
– logarithme	27
– méromorphe	61
– multiforme	27
Formule	
– de d’Alembert	24
– de Cauchy	44
– de Hadamard	24
– de Moivre	13
Géodésique	117
Groupe	
– affine	143
– des automorphises du plan complexe \mathbb{C}	81
– des automorphismes du disque unité \mathbb{D}	55
– des automorphismes du demi-plan \mathbb{H}^2	56
– linéaire	143
– nilpotent	147
– résoluble	81
Homographie	47
Homotopie entre chemins	39
Hyperbolique	
– demi-plan	123
– surface	127
Identité	
– de Bianchi	118
– de Jacobi	104
Indice d’un lacet	43
Inégalités de Cauchy	45
Intégrale sur un chemin	34
Isométrie locale	110
Lemme	
– d’Abel	24
– de Schwarz	55
Longueur d’une courbe	111
Métrique riemannienne	109
Nombre complexe	
– argument	13
– module	11
Orbite	105
Partie	
– principale	59
– régulière	59

Partition de l'unité	102
Point fixe	105
Principe du maximum	46
Produit semi-direct	141
Quotient par une action	106
Résidu	63
Règle	
– de d'Alembert	22
– de Cauchy	22
Saturé	104
Section	139
Série de Laurent	59
Simply connexe	39
Singularité	
– apparente	61
– essentielle	61
– pôle	61
Sous-groupe	
– caractéristique	147
– distingué	147
– d'isotropie	105
Support d'une fonction	102
Surface	
– différentiable	100
– topologique	99
– hyperbolique	127
Symboles de Christoffel	115
Théorème	
– de Cauchy	41, 42
– de classification	121
– de Levi-Civita	117
– fondamental de l'algèbre	69
– de Liouville	46
– de Mittag-Leffler	62
– de Picard	62
– de Poincaré	128
– des résidus	64
– d'uniformisation	54
– de Weierstrass	62
Transport parallèle	116
Zéro d'une fonction analytique	30