VALEUR ABSOLUE, DISTANCE

Exercice n°1.
Ecrire les réels suivants sans utiliser de barres de valeur absolue :

$|3|$ $\quad |-2|$ $\quad \left|-\frac{2}{5}\right|$ $\quad -|-3,1|$ $\quad \left|\frac{3}{4}\right|$ $\quad -\left|\sqrt{54}\right|$ $\quad |-\pi|$

$|-3,1|$ $\quad \left|(-5)^2\right|$ $\quad \left|\frac{-3}{7}\right|$ $\quad \left|\sqrt{5}-2\right|$ $\quad \left|\sqrt{3}-4\right|$ $\quad |\pi-1|$ $\quad |1-\pi|$

$\left|10^{-3}\right|$ $\quad \left|10^2-10^3\right|$ $\quad \left|-10^5\right|$ $\quad |1+2|$ $\quad \left|-2-\frac{1}{2}\right|$ $\quad |3-8|$

$A=2\left|3-\frac{1}{2}\right|-1$ $\qquad B=\left|1-\frac{4}{3}\right|-\frac{11}{2}\times\left|2-\frac{1}{3}-\frac{7}{4}\right|$

Exercice n°2.
Les égalités suivantes ont-elles vraies ou fausses ?

$|2\times 3|=|2|\times|3|$ $\qquad |2\times(-5)|=|2|\times|(-5)|$ $\qquad |(-7)\times(-5)|=|(-7)|\times|(-5)|$

$|5-7|=|5|-|7|$ $\qquad |7-5|=|7+(-5)|=|7|+|-5|$ $\qquad |-3+(+1)|=|-3|+|+1|$

$|-3+(-1)|=|-3|+|-1|$ $\qquad \left|\frac{5}{-3}\right|=\frac{|5|}{|3|}$ $\qquad \left|\frac{-5}{-3}\right|=\frac{|5|}{|3|}$

Exercice n°3.

1) Ecrire plus simplement le réel $\sqrt{\left(2+\sqrt{5}\right)^2}$ et $\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}$.

2) En déduire la valeur exacte de $\sqrt{\left(2+\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}$.

Exercice n°4. Sachant que a est un réel strictement positif et que b est un réel strictement négatif, écrire sans utiliser de barres de valeur absolue, et le plus simplement possible:

1) $|a|$ **2)** $|b|$ **3)** $|ab|$ **4)** $|-a-1|$ **5)** $|-b+1|$.

Exercice n°5.
Est-il vrai que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $|-x|=x$? Si oui, le démontrer, et si non, donner un contre-exemple.

Exercice n°6. Donner d(a;b) dans les cas suivants :

1) a=4 et b=1 **2)** a=4 et b= –1 **3)** a= –1 et b=4 **4)** a= –2 et b= –3

Exercice n°7. Exprimer les écritures suivantes sous la forme d(x; ...) :

$|x-3|$ $\quad \left|x+\frac{1}{2}\right|$ $\quad |5-x|$ $\quad \left|\sqrt{3}+x\right|$ $\quad |-1,4+x|$ $\quad \left|-x+\frac{3}{5}\right|$

Exercice n°8.
A, B et M sont trois points d'une droite graduée d'abscisses respectives -3, 2 et x.
1) Exprimer les distances MA et MB en fonction de x.
2) Déterminer dans chacun des cas suivants, l'ensemble des abscisses des points M vérifiant:
a) $MA=5$ **b)** $MB\leq 3$.
3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x+3|=|x-2|$.
Indication : commencer par interpréter géométriquement cette équation.

Exercice n°9.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$|x-2|=3$ $\quad |x+5|=12$ $\quad |3-x|=5$ $\quad |x-5|=-2$ $\quad |2x-4|=|x+1|$ $\quad |2x+3|-|2-x|=-3$

$|x-2|\leq 3$ $\quad |x-2|>3$

Exercice n°10.
Soit la fonction $f(x)=|2x+3|-|2-x|$. Dresser un tableau de signes des expressions $2x+3$ et $2-x$ afin de déterminer,suivant les valeurs de x , l'expression de $f(x)$ correspondante

VALEUR ABSOLUE, DISTANCE - CORRECTION

Exercice n°1

$|3|=3$ car $3>0$ $\quad |-2|=-(-2)=2 \quad \left|-\frac{2}{5}\right|=-\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{2}{5} \quad -\underbrace{|-3,1|}_{\substack{-(-3,1)\\=3,1}}=-3,1$

$\left|\frac{3}{4}\right|=\frac{3}{4}$ car $\frac{3}{4}>0$ $\quad -\underbrace{\left|\sqrt{54}\right|}_{\substack{\sqrt{54}\text{ car}\\ \sqrt{54}>0}}=-\sqrt{54} \quad |-\pi|=-(-\pi)=\pi \quad |-3,1|=-(-3,1)=3,1$

$\left|(-5)^2\right|=|25|=25 \quad \left|\frac{-3}{7}\right|=\left|-\frac{3}{7}\right|=-\left(-\frac{3}{7}\right)=\frac{3}{7} \quad \left|\sqrt{5}-2\right|=\sqrt{5}-2$ car $\sqrt{5}-2>0$

$\left|\sqrt{3}-4\right|=-\left(\sqrt{3}-4\right)=-\sqrt{3}-(-4)=-\sqrt{3}+4=4-\sqrt{3}$

$|\pi-1|=\pi-1$ car $\pi-1>0 \quad |1-\pi|=-(1-\pi)=-1-(-\pi)=-1+\pi=\pi-1$

$\left|10^{-3}\right|=10^{-3}$ car $10^{-3}=\frac{1}{10^3}>0$

$\left|10^2-10^3\right|=|100-1000|=|-900|=900$ (on pouvait écrire $\left|10^2-10^3\right|=-\left(10^2-10^3\right)=-10^2+10^3$ car $10^2-10^3<0$

$\left|-10^5\right|=-\left(-10^5\right)=10^5 \quad |1+2|=|3|=3 \quad \left|-2-\frac{1}{2}\right|=\left|-\frac{5}{2}\right|=\frac{5}{2} \quad |3-8|=|-5|=5$

$A=2\left|3-\frac{1}{2}\right|-1=2\left(3-\frac{1}{2}\right)-1=6-1-1=4$

$B=\left|1-\frac{4}{3}\right|-\frac{11}{2}\times\left|2-\frac{1}{3}-\frac{7}{4}\right|=\left|-\frac{1}{3}\right|-\frac{11}{2}\times\left|-\frac{1}{12}\right|=\frac{1}{3}-\frac{11}{2}\times\left(\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{3}-\frac{11}{24}=-\frac{3}{24}$

Exercice n°2

L'égalité $|2\times3|=|2|\times|3|$ est VRAIE car $|2\times3|=|6|=6$ et $|2|\times|3|=2\times3$

L'égalité $|2\times(-5)|=|2|\times|(-5)|$ est VRAIE car $|2\times(-5)|=|-10|=10$ et $|2|\times|(-5)|=2\times5=10$

L'égalité $|(-7)\times(-5)|=|(-7)|\times|(-5)|$ est VRAIE car $|(-7)\times(-5)|=|35|=35$ et $|(-7)|\times|(-5)|=7\times5=35$

L'égalité $|5-7|=|5|-|7|$ est FAUSSE car $|5-7|=|-2|=2$ tandis que $|5|-|7|=5-7=-2$

L'égalité $|7-5|=|7+(-5)|=|7|+|-5|$ est FAUSSE car $|7-5|=|2|=2$ tandis que $|7|+|-5|=7+5=12$

L'égalité $|-3+(+1)|=|-3|+|+1|$ est FAUSSE car $|-3+(+1)|=|-2|=2$ tandis que $|-3|+|+1|=3+1=4$

L'égalité $\left|\frac{5}{-3}\right|=\frac{|5|}{|3|}$ est VRAIE car $\left|\frac{5}{-3}\right|=\left|-\frac{5}{3}\right|=-\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{5}{3}$ et $\frac{|5|}{|3|}=\frac{5}{3}$

Exercice n°6

1) $d(a;b)=d(4;1)=|1-4|=|-3|=3$ **2)** $d(a;b)=d(4;-1)=|-1-4|=|-5|=5$

3) $d(a;b)=d(-1;4)=|4-(-1)|=|5|=5$ **4)** $d(a;b)=d(-2;-3)=|-3-(-2)|=|-1|=1$

Exercice n°7

$|x-3|=d(3;x) \quad \left|x+\frac{1}{2}\right|=\left|x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|=d\left(-\frac{1}{2};x\right) \quad |5-x|=d(x;5)$

$\left|\sqrt{3}+x\right|=\left|\sqrt{3}-(-x)\right|=d\left(-x;\sqrt{3}\right)$ ou encore $\left|\sqrt{3}+x\right|=\left|x+\sqrt{3}\right|=\left|x-\left(-\sqrt{3}\right)\right|=d\left(\sqrt{3};x\right)$

$|-1,4+x|=|x-1,4|=d(1,4;x) \quad \left|-x+\frac{3}{5}\right|=\left|\frac{3}{5}-x\right|=d\left(x;\frac{3}{5}\right)$

Exercice n°9

Pour résoudre des équations ou inéquations faisant intervenir des valeurs absolues, deux méthodes sont possibles :

1ère méthode :

Interpréter les valeurs absolues en termes de distances. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle n'est plus efficace si plusieurs valeurs absolues interviennent. Enfin, ne pas oublier que $|a|=|b|\Leftrightarrow a=b$ ou $a=-b$

2ème méthode :

Distinguer plusieurs cas (on appelle cela une DISJONCTION DES CAS), pour « enlever » les valeurs absolues, puisque, par définition , $|a|=a$ ou $-a$, selon que $a\geq0$ ou $a\leq0$