

AUTOMATIQUE

Systèmes linéaires analogiques

B. Bergeon, Professeur

septembre 2014.

INTRODUCTION: QU'EST-CE QUE L'AUTOMATIQUE ?	5
I. METHODOLOGIE GENERALE DE SYNTHESE DE LOI DE COMMANDE. .	7
I.1 Définitions	7
I.2 Méthodologie générale	7
II. OUTILS MATHEMATIQUES DE MODELISATION DES SYSTEMES A TEMPS CONTINU	9
II.1. Equation différentielle	9
II.2. Transmittance isomorphe (en p)	11
II.3. Transmittance isochrone (en $j\omega$)	14
II.4. Schémas fonctionnels et calculs de transmittance.	16
4.1- Systèmes élémentaires :	17
4.2 Cas de systèmes en cascade.	17
4.3 Cas de systèmes en parallèle.....	18
4.4 Cas de systèmes bouclés.....	18
III. ANALYSE DE SYSTEMES	21
III.1 Signaux transitoires.	21
1.1. l'impulsion de Dirac	21
1.2 L'échelon de Heaviside	22
1.3 La rampe	23
III.2 Stabilité des systèmes	23
III.3 Représentations fréquentielles.	23
3.1 Le plan de Bode	24
3.2 Le plan de Black	24
3.3 Le plan de Nyquist.....	25
III.4 Systèmes stables du 1^{er} ordre	25
4.1 Réponses transitoires	25
4.2 Réponse fréquentielle	28
III.5 Systèmes stables du 2nd ordre.	30
5.1 Les réponses transitoires.	31
5.2 Réponse fréquentielle	34
III.6 Systèmes composés et à retard	36
6.1 Intégrateur et 1 ^{er} ordre	36
6.2 Second ordre avec numérateur	38
6.3 Système à retard	40
6.4 Réponses fréquentielles d'un système à retard	41

IV. IDENTIFICATION.....	43
IV.1 Principe.....	43
IV.2 Identification par réponse indicielle.....	43
IV.3 Identification par réponse fréquentielle.....	50
V. SPECIFICATION DE LOIS DE COMMANDE,	53
V.1 La commande en boucle fermée.....	53
1.1 Fonctions de transfert de boucle fermée.....	53
1.2 Abaque de Black-Nichols.....	54
V.2 Stabilité en boucle fermée.....	56
2.1 Equation caractéristique, pôles	56
2.2 Critère du revers.....	56
2.3 Marges de stabilité.....	58
V.3 Spécifications de performance en boucle fermée.....	58
3.1 Spécifications de poursuite.	58
3.2 Régulation	60
3.3 Admissibilité des commandes.....	62
VI. CONCEPTION DE REGULATEURS.....	63
VI.1 Le régulateur Proportionnel.....	63
VI.2 Le régulateur à actions Proportionnelle et Intégrale (PI)	64
2.1 Structure, transmittance et réponse harmonique.....	64
2.2 Précision statique de la boucle fermée	66
2.3 Méthodes fréquentielles de réglage	66
VI.3 Le régulateur Proportionnel et pseudo-intégral.....	68
3.1 Réponse harmonique	68
3.2 Précision statique de la boucle fermée	69
VI.4 Le régulateur à actions Proportionnelle et Dérivée, ou à avance de phase.....	70
4.1 Commande à retour tachymétrique.....	70
4.2 Correcteur à avance de phase.....	71
4.3 Méthode fréquentielle de réglage	72
VI.5 Le régulateur à action Proportionnelle, Intégrale et Dérivée (PID)	74
5.1 Structure et transmittance.....	74
5.2 Réponse harmonique	75
5.3 Réglage des paramètres.	76
5.4 Implantation des régulateurs PID	78
VI.6 Réglages empiriques de Ziegler-Nichols.....	79

INTRODUCTION: QU'EST-CE QUE L'AUTOMATIQUE ?

L'Automatique est une science pour l'ingénieur.

L'objectif de cette science est donc de fournir des outils conceptuels et méthodologiques utilisables pour :

L'analyse des systèmes,

La synthèse de commandes des systèmes.

Ce cours ne concerne que l'analyse et la synthèse de commandes de systèmes dynamiques, linéaires, stationnaires, monovariables, c'est à dire de systèmes dont on peut représenter le comportement par une équation différentielle (ou une équation récurrente) linéaire à coefficients constants.

D'une façon générale, un système possède une entrée, et une sortie.

Un tel système peut être représenté par un schéma fonctionnel comme sur la figure 1 ci-dessous.

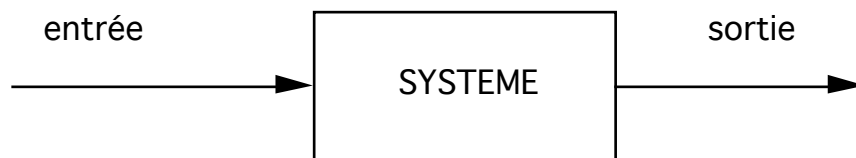


Figure 1: Schéma fonctionnel.

L'entrée et la sortie du système sont des grandeurs physiques dépendantes du temps, généralement appelées signaux.

La sortie du système est le signal fabriqué par le système en réponse au signal d'entrée. Ainsi, les flèches figurant sur le schéma fonctionnel de la figure 1 décrivent une relation de causalité.

Système	Equation
Dynamique	Différentielle, récurrente
Linéaire	Vérifie le théorème de superposition
Stationnaire	A coefficients constants
monovariante	Une entrée, une sortie

Exemple : Considérons le système constitué :

- d'une antenne parabolique de réception de signaux hertziens de satellite,

- d'un moteur électrique à courant continu, qui, par l'intermédiaire d'un réducteur de vitesse, peut faire pivoter l'antenne autour d'un axe.

On s'intéresse à l'orientation (dans un plan pour simplifier le problème) de l'axe de l'antenne vers un satellite géostationnaire.

Le signal d'entrée est alors la tension d'alimentation $u(t)$ du moteur, le signal de sortie étant l'angle $\alpha(t)$ que forme l'axe de l'antenne avec un référentiel fixe donné.

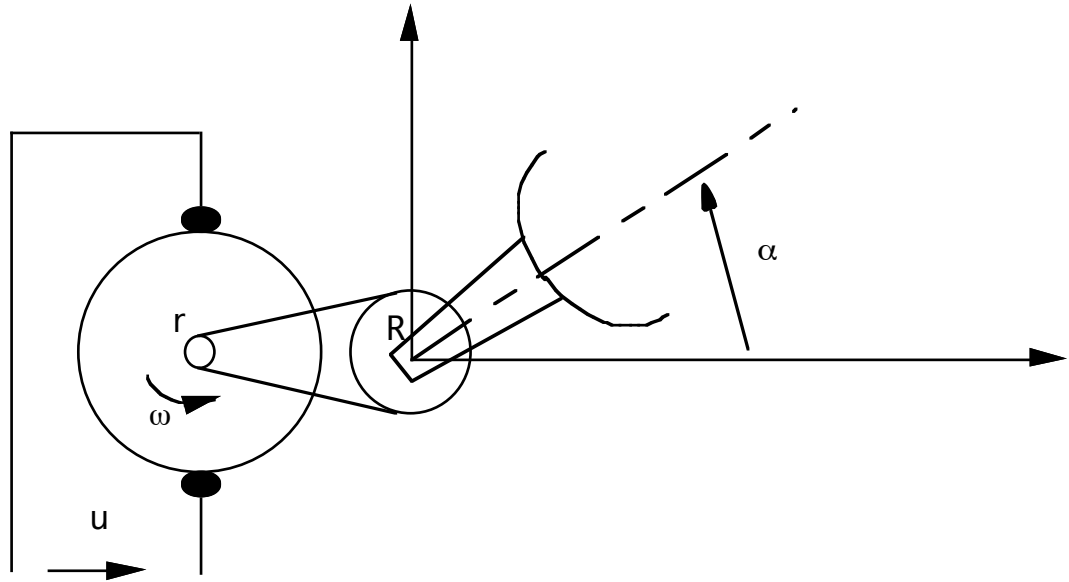


Figure 2 : Schéma d'antenne parabolique orientable par moteur électrique.
La relation de causalité : une tension électrique appliquée au moteur provoque sa rotation et donc une modification de l'orientation de l'antenne.

Sur un tel exemple, un problème typique d'Automatique serait de déterminer une structure de commande capable :

- de positionner l'antenne dans la direction demandée par l'utilisateur;
- de maintenir aussi bien que possible cette orientation malgré d'éventuels coups de vent.

I. METHODOLOGIE GENERALE DE SYNTHESE DE LOI DE COMMANDE.

I.1 Définitions

Un **système** est un triplet (entrée, relation de causalité, sortie); constitué aussi bien par un **procédé physique** (une machine, un phénomène physique, ...) que par une représentation abstraite d'un tel procédé.

Un **modèle** est une représentation abstraite d'un système ou d'un phénomène physique : par exemple, la loi d'Ohm est un modèle mathématique du système constitué d'un conducteur électrique qui, soumis à une différence de potentiel électrique, est parcouru par un courant électrique.

Une **loi de commande** est un algorithme de calcul du signal que l'on doit appliquer à l'entrée d'un système pour que sa sortie se comporte de la manière spécifiée dans un cahier des charges.

Un **organe de commande** est un appareil physique permettant de réaliser l'algorithme de calcul appelé loi de commande.

I.2 Méthodologie générale.

La loi de commande est déterminée à partir de la connaissance que l'on a du système à régler (contenue dans le modèle) et des spécifications issues du cahier des charges.

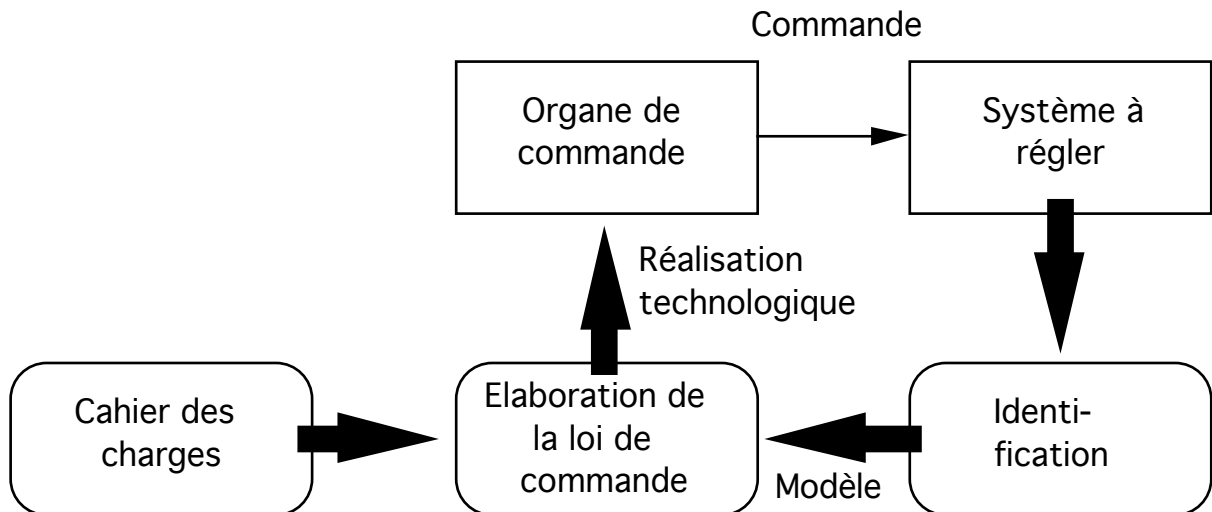


Figure 3: Méthodologie générale de l'Automatique.

L'étape de réalisation technologique consiste à traduire l'algorithme élaboré en un organe de commande capable de générer les signaux d'entrée du procédé.

Par exemple, un moteur électrique est généralement commandé par l'intermédiaire d'un amplificateur électronique de puissance. Le signal de commande élaboré par l'organe de commande est alors la tension d'entrée de cet amplificateur, c'est donc un signal électrique. Cet organe de commande pourra être réalisé sous la forme d'un circuit électronique.

A la fin de ce cours d'Automatique nous aborderons l'étude de quelques méthodes élémentaires d'élaboration de loi de commande.

Le chapitre II sera consacré à l'étude d'outils mathématiques nécessaires à l'écriture de modèles des systèmes utilisables pour la synthèse de loi de commande.

II. OUTILS MATHÉMATIQUES DE MODELISATION DES SYSTEMES A TEMPS CONTINU

Un système est dit à **temps continu** si les signaux d'entrée et de sortie de ce système sont (ou sont représentables par) des **fonctions continues du temps**.

II.1. Equation différentielle

L'objectif fondamental des sciences (en particulier des sciences physiques) est de fournir des représentations abstraites de systèmes ou de phénomènes. On a parlé de l'exemple de la loi d'Ohm. D'une façon générale, les modèles mathématiques issus des "lois de la nature" sont sous forme d'équations différentielles.

Les prétendues "lois de la nature" ne sont évidemment pas des expressions d'obligations que la nature devrait suivre sous peine de punition, mais bien des expressions de représentation de phénomènes naturels. A ce titre, les "lois générales" de la physique ou de la chimie, faisant l'objet des cours de physique et de chimie, sont en fait des modèles des phénomènes physiques concernés.

Il est important de noter, à ce niveau d'analyse, qu'une "loi de la nature" ne se résume pas à une simple expression mathématique. La loi d'Ohm, par exemple, ne consiste pas seulement en $U = R I$, mais bien en l'énoncé complet des conditions dans lesquelles cette expression rend compte de phénomènes observés et mesurés.

Exemple de l'antenne.

Un modèle du système constitué d'un moteur électrique à courant continu et de son amplificateur de puissance, entraînant en rotation une antenne par l'intermédiaire d'un réducteur de vitesse, peut être obtenu en utilisant les connaissances issues de la mécanique et de l'électricité :

- le couple moteur $C(t)$ est proportionnel au courant d'induit $i(t)$

$$C(t) = k i(t)$$

- le courant d'induit dépend de la tension de commande $u(t)$ et de la vitesse angulaire de rotation $\omega(t)$

$$i(t) = \frac{u(t) - \beta \omega(t)}{\rho}$$

- la vitesse de rotation et le couple moteur sont liés par :

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = C(t)$$

où J est le moment d'inertie, ramené sur l'arbre du moteur, de l'induit du moteur, des poulies, de la courroie et de l'antenne.

- enfin, la position angulaire $\alpha(t)$ de l'antenne par rapport au référentiel peut s'écrire :

$$\alpha(t) = \frac{r}{R} \int_0^t \omega(\tau) d\tau + \alpha(0)$$

ou encore :

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = \frac{r}{R} \omega(t)$$

L'ensemble de ces relations permettent d'écrire l'équation différentielle :

$$J\rho \frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} + k\beta \frac{d\alpha(t)}{dt} = k \frac{r}{R} u(t)$$

Cette équation différentielle constitue un modèle du système "antenne parabolique orientable par moteur électrique".

Ce modèle ne représente correctement le fonctionnement global du système que si certaines hypothèses implicites sont vérifiées :

- les effets capacitifs des conducteurs sont négligeables,
- les effets auto-inductifs des bobines d'induction sont négligeables,
- les frottements secs et visqueux des parties mécaniques mobiles sont négligeables,
- la courroie entraîne l'antenne en rotation sans glissement sur les poulies,
- etc...

D'une façon générale une équation différentielle linéaire peut s'écrire :

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 e(t) \quad (1)$$

Remarque sur la causalité

On appelle **système causal** un système dont la sortie (ou plus généralement l'état) ne peut être modifiée par un signal d'entrée avant l'apparition de celui-ci. Cela se traduit pour les systèmes linéaires décrits une équation différentielle du type (1) par la contrainte :

$$m \leq n.$$

Dans le cas où l'équation différentielle n'est pas linéaire, on peut obtenir une description de la "tendance" autour d'un point de fonctionnement par la procédure de linéarisation.

Soit l'équation différentielle non linéaire :

$$\frac{d}{dt} x(t) = f[x(t), u(t)]$$

On cherche à caractériser le comportement autour d'un point de fonctionnement particulier défini par u_0 et x_0 .

On peut écrire au voisinage de ce point :

$$u(t) = u_0 + \Delta u(t)$$

$$x(t) = x_0 + \Delta x(t)$$

où Δx et Δu représentent des petites variations de x et de u autour de x_0 et u_0 .

On peut alors écrire :

$$\frac{d}{dt}x(t) \approx f(x_0, u_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{u_0, x_0} \Delta x(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{u_0, x_0} \Delta u(t)$$

Mais comme :

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x_0, u_0) + \frac{d}{dt}\Delta x(t)$$

On déduit :

$$\frac{d}{dt}\Delta x(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{u_0, x_0} \Delta x(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{u_0, x_0} \Delta u(t)$$

Qui est une équation différentielle linéaire qui caractérise le système linéaire tangent au point x_0, u_0 .

Exemple.

Le système :

$$\frac{d}{dt}x(t) = x^2(t) + 2u(t)$$

admet le linéarisé tangent :

$$\frac{d}{dt}\Delta x(t) = 2x_0 \Delta x(t) + 2\Delta u(t)$$

II.2. Transmittance isomorphe (en p)

Pour simplifier l'étude de ce type d'équation différentielle, nous introduisons un outil mathématique, la **transformation de Laplace**, qui permet d'effectuer l'analyse du système et de calculer explicitement certains types de solution par l'intermédiaire du calcul symbolique.

La **transformation de Laplace** est une opération mathématique sur des fonctions réelles $f(t)$ qui vérifient :

$$f(t) = 0 \text{ si } t < 0. \quad (2.)$$

Par définition, on écrit alors la transformée $F(p)$ de la fonction $f(t)$ comme :

$$f(t) \xrightarrow{L} F(p) \quad (3.)$$

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad (4.)$$

Cette transformation possède les propriétés importantes suivantes :

1. Elle est **linéaire** par rapport à l'addition et la multiplication par un nombre réel :

$$f(t) \xrightarrow{L} F(p) \quad (5.)$$

$$g(t) \xrightarrow{L} G(p) \quad (6.)$$

$$\Rightarrow f(t) + g(t) \xrightarrow{L} F(p) + G(p) \quad (7.)$$

et : si λ est un nombre réel,

$$\Rightarrow \lambda f(t) \xrightarrow{L} \lambda F(p) \quad (8.)$$

2. On peut calculer la transformée de Laplace de la **dérivée d'ordre n** (entier) quelconque d'une fonction $f(t)$ par la relation suivante :

$$\frac{d^n}{dt^n} f(t) \xrightarrow{L} p^n F(p) - p^{n-1} f(0^+) - p^{n-2} f'(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+) \quad (9.)$$

Cette dernière relation se simplifie dès que les conditions initiales ($f(0^+)$, $f'(0^+)$, $f''(0^+)$, ..., $f^{(n-1)}(0^+)$) s'annulent :

$$\frac{d^n}{dt^n} f(t) \xrightarrow{L} p^n F(p) \quad (10.)$$

3. Le théorème des **valeurs initiales et finales** :

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) \quad (11.)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) \quad (12.)$$

Ces relations n'ont de sens que si ces limites existent !

Transmittance isomorphe (fonction de transfert) :

Soit un système décrit par l'équation différentielle linéaire à coefficients constants:

$$\begin{aligned}
 a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = \\
 b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 e(t)
 \end{aligned}
 \tag{13.}$$

Supposons que :

- les signaux d'entrée et sortie $e(t)$ et $s(t)$ admettent des transformées de Laplace, respectivement $E(p)$ et $S(p)$;
- les conditions initiales sont toutes nulles :

$$\begin{aligned}
 \frac{d^i e(t)}{dt^i} \Big|_{t=0} = 0; \forall i, 0 < i < m \\
 \frac{d^i s(t)}{dt^i} \Big|_{t=0} = 0; \forall i, 0 < i < n
 \end{aligned}
 \tag{14.}$$

on peut alors appliquer la transformation de Laplace sur l'équation différentielle, en utilisant la propriété 2 ci-dessus :

$$a_n p^n S(p) + \dots + a_1 p S(p) + S(p) = b_m p^m E(p) + \dots + b_0 E(p)
 \tag{15.}$$

d'où on peut exprimer le rapport :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + 1}
 \tag{16.}$$

qui est la **forme canonique de la transmittance isomorphe** ou **fonction de transfert en p**.

Exemple de l'antenne.

Le système décrit par l'équation différentielle peut être représenté par la fonction de transfert :

$$\frac{\alpha(p)}{U(p)} = \frac{r}{\beta R} \frac{1}{p \left(1 + \frac{J\rho}{k\beta} p \right)}$$

dans laquelle $\alpha(p)$ représente la transformée de Laplace de la position angulaire, et $U(p)$ la transformée de Laplace de la tension de commande du moteur.

II.3. Transmittance isochrone (en $j\omega$)

Dans le cas particulier où le système linéaire est soumis à des signaux d'entrée **sinusoïdaux permanents**, on utilise la transformation dite **transformation complexe**, qui est une généralisation à tout type de système linéaire de la représentation complexe des circuits électriques en courant alternatif (voir cours d'électricité de 1^{ère} année).

En effet, une équation différentielle linéaire à coefficients constants, de la forme générale ci-dessus, admet une solution générale du type :

$$s(t) = S(\omega) \cos[\omega t + \varphi(\omega)] \quad (17.)$$

si le signal d'entrée $e(t)$ est de la forme :

$$e(t) = E(\omega) \cos(\omega t) \quad (18.)$$

En posant :

$$E(j\omega, t) = E(\omega) \exp(j\omega t) ; \quad (19.)$$

$$S(j\omega, t) = S(\omega) \exp j[\omega t + \varphi(\omega)] ; \quad (20.)$$

on vérifie que :

$$\Re\{E(j\omega, t)\} = e(t)$$

$$\Re\{S(j\omega, t)\} = s(t)$$

et en remarquant :

$$\frac{d^i}{dt^i} E(j\omega, t) = (j\omega)^i E(j\omega, t)$$

$$\frac{d^i}{dt^i} S(j\omega, t) = (j\omega)^i S(j\omega, t) \quad (21.)$$

on peut réécrire l'équation différentielle :

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 e(t) \quad (22.)$$

sous la forme particulière :

$$a_n(j\omega)^n S(j\omega, t) + \dots + a_1(j\omega)S(j\omega, t) + S(j\omega, t) = b_m(j\omega)^m E(j\omega, t) + \dots + b_0 E(j\omega, t). \quad (23.)$$

De plus, on peut écrire :

$$E(j\omega, t) = E(j\omega) \exp(j\omega t); \quad (24.)$$

$$S(j\omega, t) = S(j\omega) \exp(j\omega t); \quad (25.)$$

où:

$$E(j\omega) = E(\omega) \quad (26.)$$

$$S(j\omega) = S(\omega) \exp[j\varphi(\omega)], \quad (27.)$$

où $\varphi(\omega)$ représente le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée, à la pulsation ω .

L'équation différentielle devient alors :

$$a_n(j\omega)^n S(j\omega) + \dots + a_1(j\omega)S(j\omega) + S(j\omega) = b_m(j\omega)^m E(j\omega) + \dots + b_0 E(j\omega). \quad (28.)$$

On peut alors former le rapport :

$$\frac{S(j\omega)}{E(j\omega)} = F(j\omega) \quad (29.)$$

qui définit la **transmittance isochrone** (ou fonction de transfert en $j\omega$).

Cette fonction de transfert s'écrit :

$$\frac{S(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{b_m(j\omega)^m + \dots + b_0}{a_n(j\omega)^n + \dots + a_1(j\omega) + 1} \quad (30.)$$

Exemple de l'antenne.

Le système décrit par l'équation différentielle peut être représenté par la fonction de transfert :

$$\frac{\alpha(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{r}{\beta R} \frac{1}{j\omega \left(1 + \frac{J\rho}{k\beta} j\omega \right)}$$

dans laquelle $\alpha(j\omega)$ représente la transformée complexe de la position angulaire, et $U(j\omega)$ la transformée complexe de la tension de commande du moteur.

Il est évident que la quantité $F(j\omega)$ est une fonction complexe de la variable imaginaire $j\omega$. Cette fonction complexe peut s'écrire sous la forme polaire, mettant en évidence un **module** et un **argument**:

$$F(j\omega) = |F(j\omega)| \exp[j \text{Arg}(F(j\omega))] \quad (31.)$$

avec:

$$|F(j\omega)| = \frac{|S(j\omega)|}{|E(j\omega)|} = \frac{S(\omega)}{E(\omega)} \quad (32.)$$

et

$$\text{Arg}(F(j\omega)) = \text{Arg}(S(j\omega)) - \text{Arg}(E(j\omega)) = \varphi \quad (33.)$$

Le module de la transmittance isochrone représente donc le rapport de l'amplitude du signal sinusoïdal de sortie sur l'amplitude du signal sinusoïdal d'entrée.

L'argument de la transmittance isochrone représente le déphasage du signal de sortie par rapport au signal d'entrée.

On voit d'après l'expression (31) de la transmittance isochrone que son module et son argument sont fonctions de $j\omega$, donc, pour un système dynamique linéaire en régime sinusoïdal permanent : **le rapport d'amplitude des signaux d'entrée et de sortie dépend de la pulsation** (donc de la fréquence), **ainsi que le déphasage du signal de sortie par rapport au signal d'entrée.**

L'expression (28), comparée à l'expression (15) du paragraphe II.2, montre qu'il existe une grande similitude entre les transmittances isomorphe et isochrone : **les coefficients sont les mêmes** (ce sont en fait les coefficients de l'équation différentielle), mais **la variable n'est pas la même**. Cela traduit le fait que ces deux formes de transmittances représentent le **même système** (mêmes coefficients), mais dans des **conditions expérimentales** (signaux d'entrée) **complètement différentes** (et incompatibles) :

- **signaux transitoires** (nuls avant l'origine arbitraire du temps) en ce qui concerne la variable (complexe) de **Laplace p** ;
- **signaux sinusoïdaux permanents** (établis depuis un temps infini) en ce qui concerne la variable **imaginaire $j\omega$** .

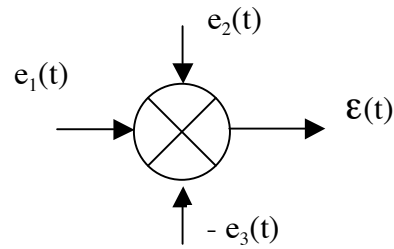
II.4. Schémas fonctionnels et calculs de transmittance.

Plutôt que de manipuler les équations différentielles ou les transmittances, on préfère utiliser une représentation graphique des signaux et systèmes.

- les signaux sont représentés par des flèches
- les systèmes sont représentés par des boîtes

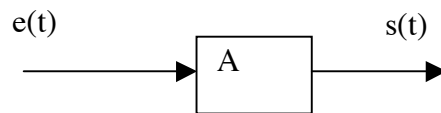
4.1- Systèmes élémentaires :

- additionneur/soustracteur-comparateur :



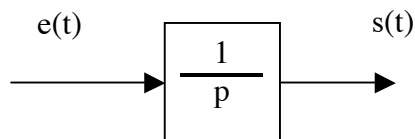
$$\mathcal{E}(t) = e_1(t) + e_2(t) - e_3(t)$$

- gain statique (amplificateur)



$$s(t) = A e(t)$$

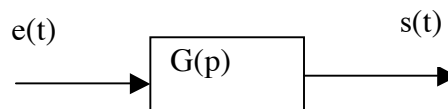
- intégrateur



$$s(t) = \int e(t) dt$$

$$S(p) = E(p)/p$$

- gain dynamique

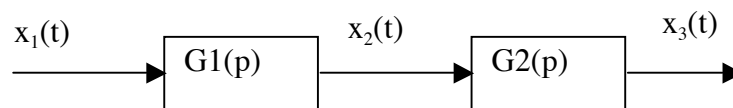


$$S(p) = G(p) E(p)$$

$G(p)$ est ici le nom du système dont la transmittance est $G(p)$.

4.2 Cas de systèmes en cascade.

Soit le système composé de :

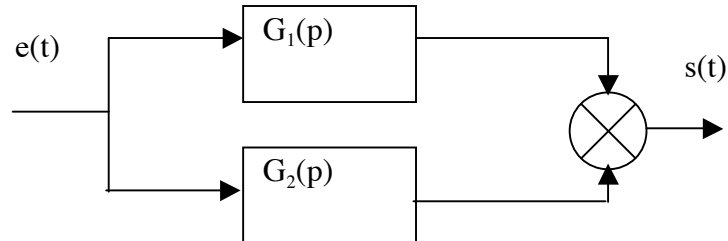


On peut alors écrire :

$$\frac{X_3(p)}{X_1(p)} = \frac{X_3(p)}{X_2(p)} \frac{X_2(p)}{X_1(p)} = G_2(p) G_1(p)$$

4.3 Cas de systèmes en parallèle.

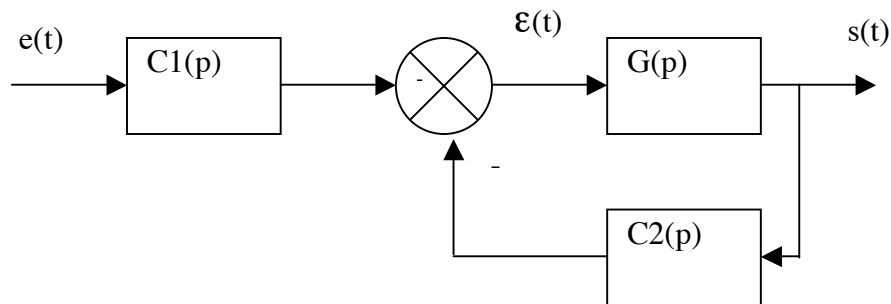
Soit le système décrit par le schéma :



On a alors :

$$S(p) = G_1(p) E(p) + G_2(p) E(p) = [G_1(p) + G_2(p)] E(p)$$

4.4 Cas de systèmes bouclés



$$S(p) = G(p) \varepsilon(p)$$

$$\varepsilon(p) = C_1(p) E(p) - C_2(p) S(p)$$

$$S(p) = G(p) [C_1(p) E(p) - C_2(p) S(p)]$$

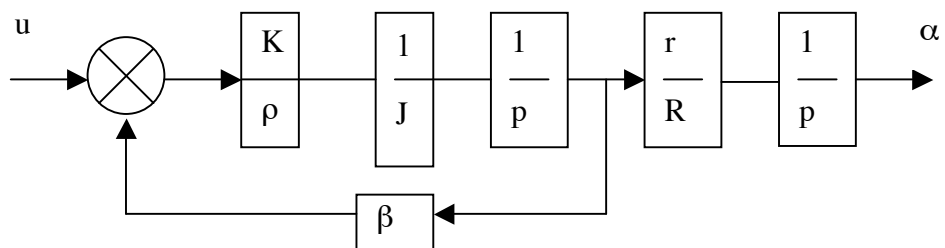
$$[1 + G(p) C_2(p)] S(p) = G(p) C_1(p) E(p)$$

D'où

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{G(p) C_1(p)}{1 + G(p) C_2(p)}$$

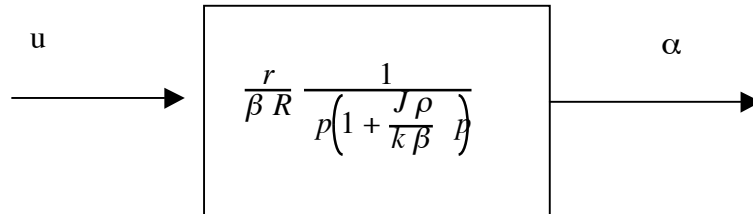
Exemple de l'antenne

Le schéma fonctionnel :



La transmittance :

$$\frac{\alpha(p)}{U(p)} = \frac{k \frac{r}{R}}{k \beta p + J \rho p^2} = \frac{r}{\beta R} \frac{1}{p \left(1 + \frac{J \rho}{k \beta} p\right)}$$



III. ANALYSE DE SYSTEMES

III.1 Signaux transitoires.

On appelle ainsi des signaux :

- nuls avant l'origine du temps ($t = 0$)
- définis pour tout $t \geq 0$
- admettant une transformée de Laplace.

Les signaux transitoires élémentaires sont :

1.1. l'impulsion de Dirac $\delta(t)$

Ce n'est pas une vraie fonction, mais une distribution que l'on construit comme une limite de fonction :

Soit la fonction paramétrée en θ définie par la figure 4:

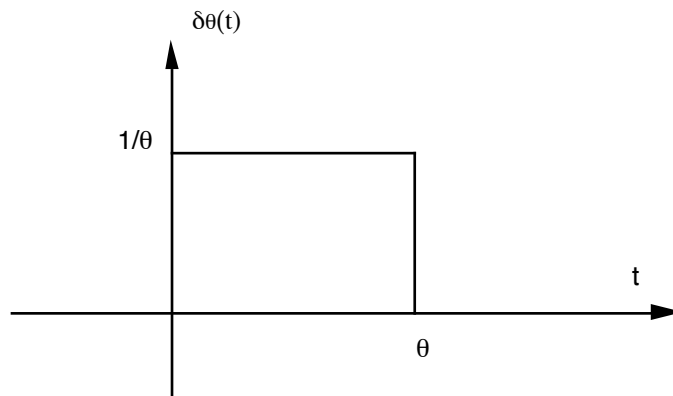


Figure 4: fonction $\delta_\theta(t)$

$$\delta_\theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{1}{\theta} & \text{si } 0 \leq t \leq \theta \\ 0 & \text{si } t > \theta \end{cases}$$

alors :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\theta(t) dt = 1$$

et la transformée de Laplace vaut :

$$\begin{aligned} \Delta_\theta(p) &= \int_0^{\infty} \delta_\theta(t) e^{-pt} dt \\ &= \frac{1 - e^{-p\theta}}{p\theta} \end{aligned}$$

On définit l'impulsion de Dirac comme la limite de cette fonction lorsque θ tend vers zéro :

$$\delta(t) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \delta_\theta(t)$$

C'est donc un signal :

- nul pour $t < 0$
- nul pour $t > 0$
- infini pour $t = 0$
- d'aire (ou surface, ou poids) égale à 1 :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \lim_{\theta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\theta}(t) dt = 1$$

On le représente par :

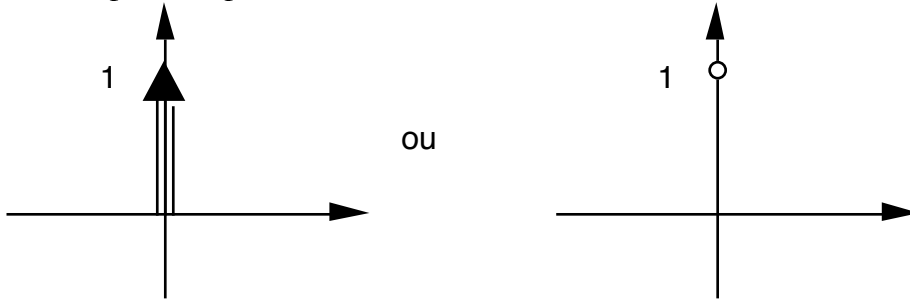


Figure 5: représentations de l'impulsion de Dirac unitaire

Sa transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \Delta_{\theta}(p) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-p\theta}}{p\theta} = 1 \quad (34.)$$

1.2 L'échelon de Heaviside

Il est défini par :

$$\Gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

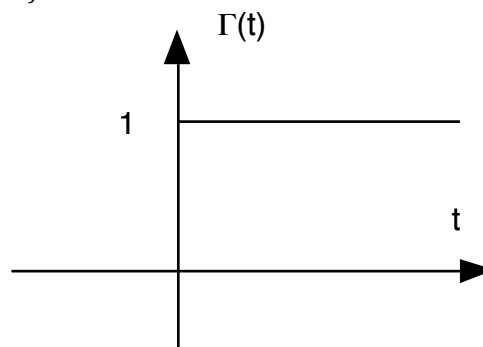


Figure 6 : l'échelon de Heaviside unitaire

Sa transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}\{\Gamma(t)\} = \int_0^{\infty} \Gamma(t) e^{-pt} dt = \frac{1}{p} \quad (35.)$$

1.3 La rampe

Est définie par :

$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ t & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

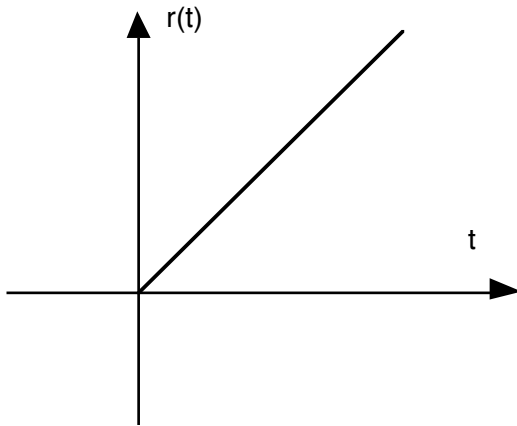


Figure 7: la rampe unitaire

Sa transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}\{r(t)\} = \int_0^{\infty} t e^{-pt} dt = \frac{1}{p^2} \quad (36.)$$

III.2 Stabilité des systèmes.

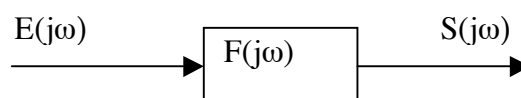
Un système dynamique linéaire est dit **asymptotiquement stable** si et seulement si sa réponse à une impulsion de Dirac tend vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini.

Si le système est représenté par une transmittance isomorphe, alors :

- il est asymptotiquement stable si et seulement si tous les pôles de cette transmittance ont leur partie réelle strictement négative ;
- il est instable si un ou plusieurs pôles ont leur partie réelle positive ou nulle.

III.3 Représentations fréquentielles.

Il s'agit de représenter graphiquement les variations d'une fonction de transfert isochrone, en fonction de la pulsation des signaux d'entrée et de sortie.



3.1 Le plan de Bode

On trace séparément le module (en dB) et l'argument, en fonction de la pulsation en échelle logarithmique :



Figure 8: plan de Bode

3.2 Le plan de Black

On trace une seule courbe, graduée en pulsation, dans un plan où l'axe d'abscisse est gradué en degrés (argument) et l'axe d'ordonnée en dB (module) :



Figure 9: plan de Black

3.3 Le plan de Nyquist

C'est le plan complexe en coordonnées polaires :

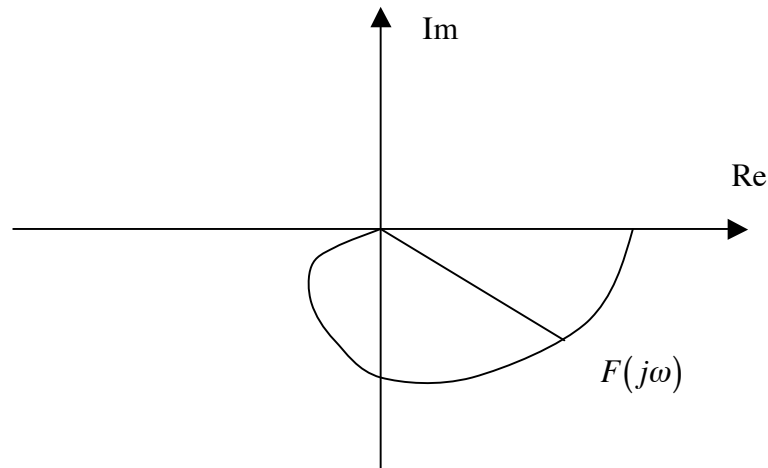


Figure 10: plan de Nyquist

III.4 Systèmes stables du 1^{er} ordre.

On appelle ainsi un système linéaire décrit par une équation différentielle du 1^{er} ordre :

$$\tau \frac{d}{dt} s(t) + s(t) = k e(t) \quad (k > 0) \quad (37.)$$

Un tel système est stable si τ est strictement positif.

4.1 Réponses transitoires

Lorsque le signal d'entrée $e(t)$ est un signal transitoire :

- de transformée de Laplace $E(p)$

et si les conditions initiales sont nulles :

$$s(0) = 0$$

on peut écrire la transmittance isomorphe (fonction de transfert en p) du système :

$$F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{1 + \tau p}$$

k est le gain statique

τ est la constante de temps

remarque : C'est un cas particulier de la forme générale donnée au chap II § 2, avec $m = 0$, $n = 1$, $b_0 = k$, $a_1 = \tau$.

• réponse impulsionnelle

Si le signal d'entrée est une impulsion de Dirac d'aire un, sa transformée de Laplace vaut 1, et on a :

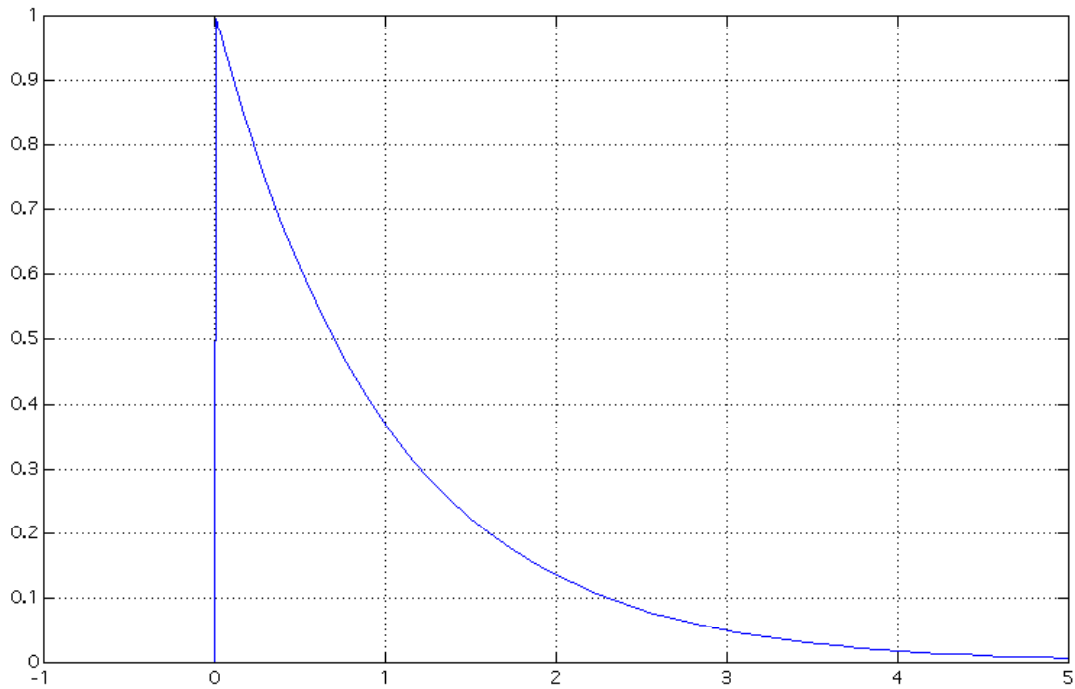


Figure 11: réponse impulsionnelle d'un système du 1^{er} ordre

$$S_{\delta}(p) = \frac{k}{1 + \tau p} 1$$

$$s_{\delta}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{k}{1 + \tau p}\right)$$

$$s_{\delta}(t) = \frac{k}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \Gamma(t)$$

Les points remarquables :

$$s(0) = \frac{k}{\tau}$$

$$s(\tau) = k \frac{e^{-1}}{\tau} = 0,37 \frac{k}{\tau}$$

$$s(\infty) = 0 \text{ si } \tau > 0$$

• réponse indicielle

Si le signal d'entrée est un échelon de Heaviside de hauteur 1, on a :

$$E(p) = \frac{1}{p}$$

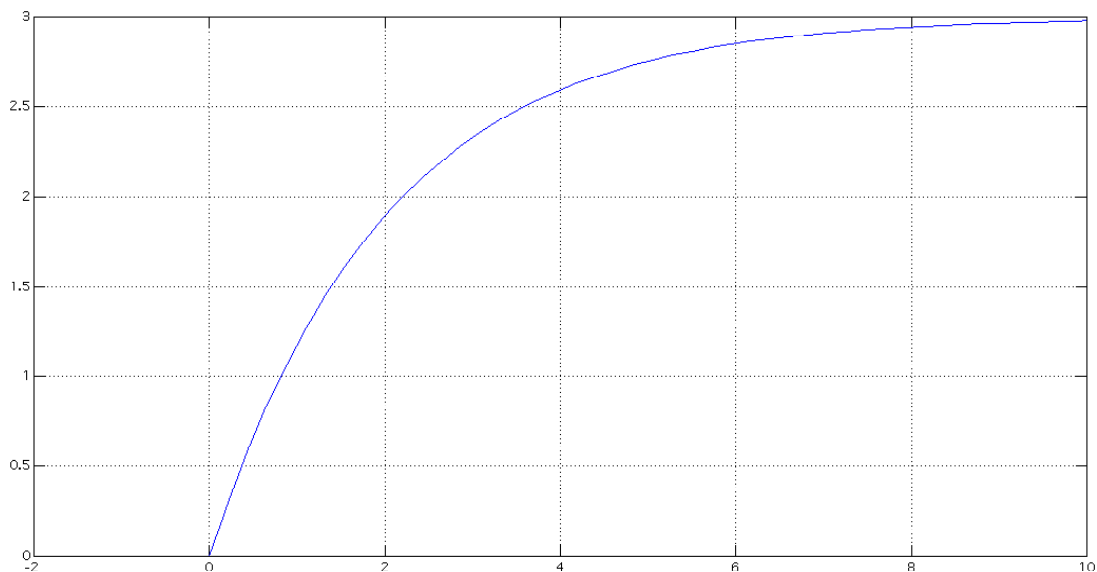
$$S_{\Gamma}(p) = \frac{k}{1 + \tau p} \frac{1}{p}$$

$$s_{\Gamma}(t) = L^{-1}\left(\frac{k}{1 + \tau p} \frac{1}{p}\right)$$

$$s_{\Gamma}(t) = k \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \Gamma(t)$$

* à $t = \tau$, on calcule :

$$s(\tau) = k [1 - e^{-1}] = 0,63 k$$



* si $t \rightarrow \infty$, alors $s(t) \rightarrow k$

Figure 12 : réponse indicielle d'un système du 1er ordre ($k = 3$, $\tau = 2$ s)

• réponse à la rampe

Si le signal d'entrée est une rampe de pente 1 :

$$E(p) = \frac{1}{p^2}$$

$$S_r(p) = \frac{k}{1 + \tau p} \frac{1}{p^2}$$

$$s_r(t) = L^{-1}\left(\frac{k}{1 + \tau p} \frac{1}{p^2}\right)$$

$$s_r(t) = k \left[t - \tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \right] \Gamma(t)$$

Si $k = 1$, alors lorsque $t \rightarrow \infty$, la réponse tend vers une asymptote d'équation $y = t - \tau$.

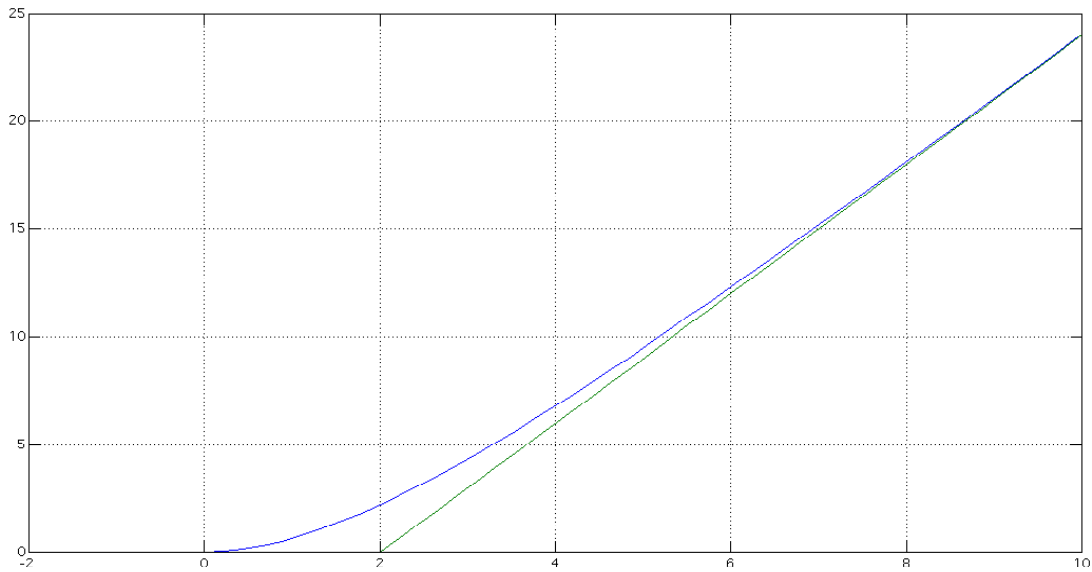


Figure 13: réponse d'un système du 1^{er} ordre ($k = 3$, $\tau = 2$ s) à une rampe de pente 1.

4.2 Réponse fréquentielle

La transmittance isochrone d'un système du premier ordre s'écrit donc :

$$F(j\omega) = \frac{k}{1 + j\tau\omega} = \frac{k}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \quad (38.)$$

Le paramètre ω_c s'appelle pulsation transitionnelle (ou de coupure).

Le module de cette fonction complexe de la fréquence s'écrit :

$$|F(j\omega)| = \left| \frac{S(j\omega)}{E(j\omega)} \right| = \frac{k}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}$$

L'argument s'écrit :

$$\angle F(j\omega) = -\text{Arc tan} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)$$

Ces fonctions sont tracées ci-dessous dans les plans de Bode, Black et Nyquist, avec les valeurs numériques :

$$k = 10$$

$$\tau = 0,1 \text{ s. ou } \omega_c = 10 \text{ rad/s.}$$

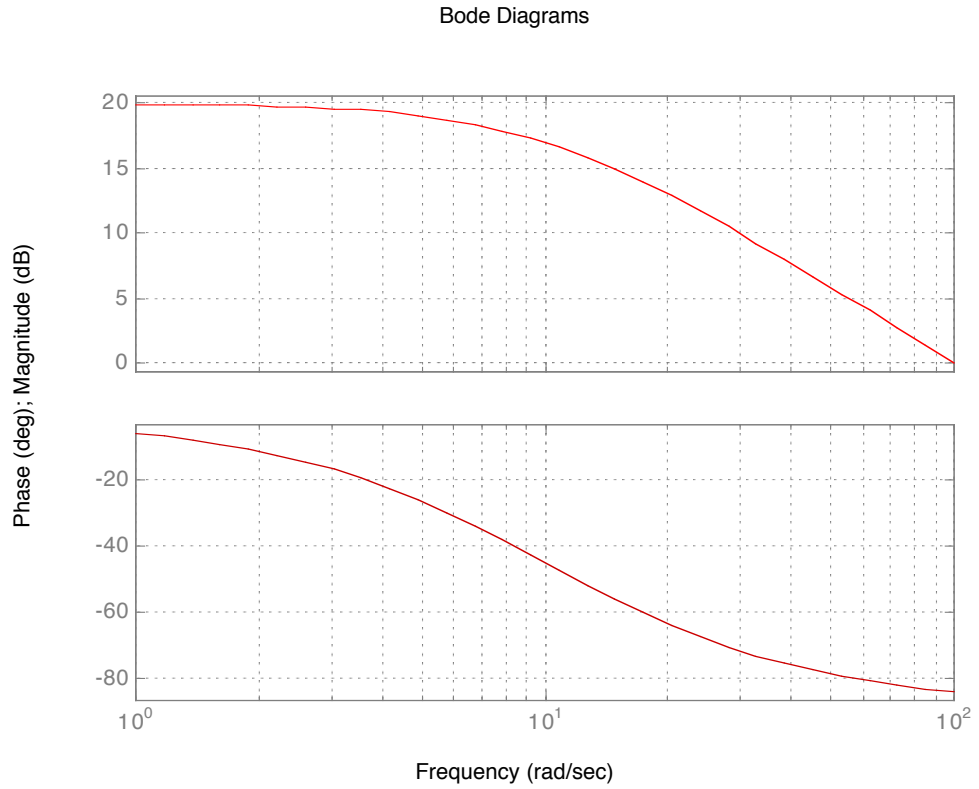


Figure 14: diagramme de Bode d'un système du 1^{er} ordre

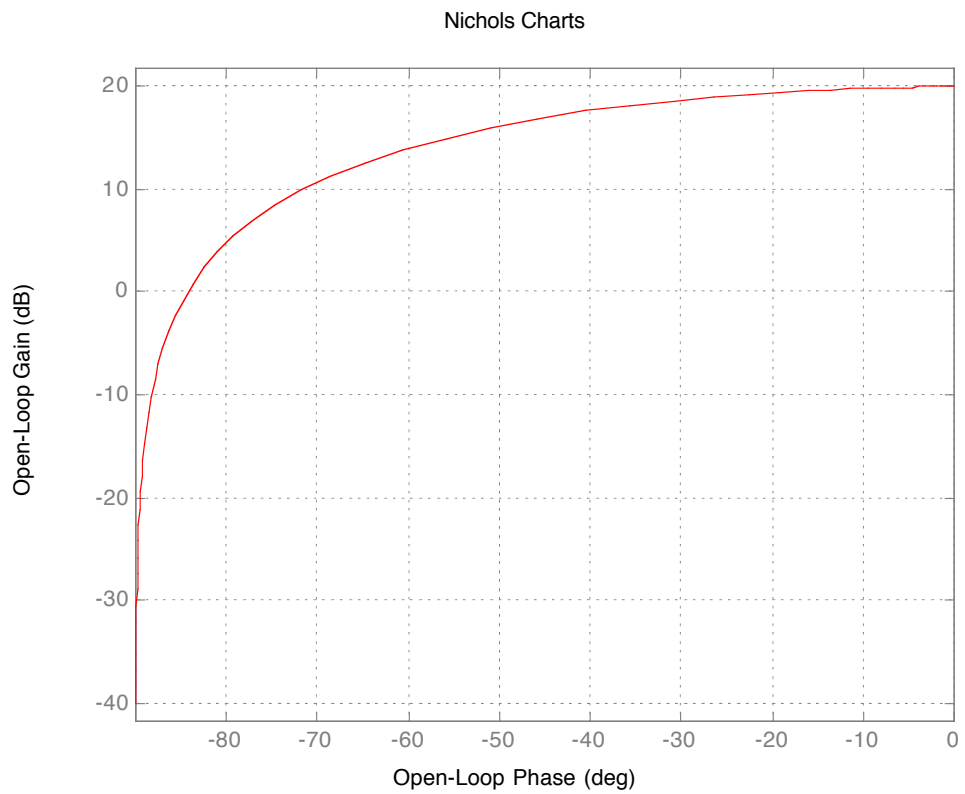


Figure 15: diagramme de Black d'un système du 1^{er} ordre

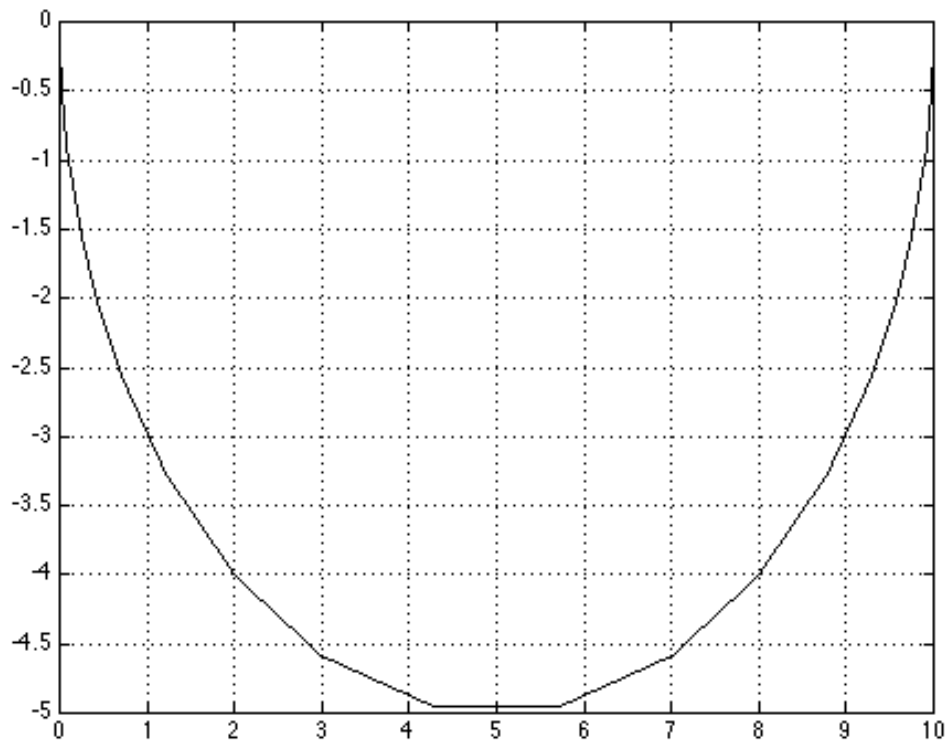


Figure 16: diagramme de Nyquist d'un système du 1^{er} ordre

Sur ce dernier diagramme (Nyquist), on a tracé la fonction pour ω entre 0 et $+\infty$.

III.5 Systèmes stables du 2nd ordre.

On appelle système du 2nd ordre un système linéaire décrit par une équation différentielle du 2nd ordre, du type :

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2}{dt^2} s(t) + \frac{2\xi}{\omega_n} \frac{d}{dt} s(t) + s(t) = k e(t) \quad (39.)$$

Dans cette équation on appelle :

- k le gain statique ($k > 0$ généralement),
- ξ le coefficient d'amortissement, ($\xi > 0$ si le système est stable).
- ω_n la pulsation propre non amortie ($\omega_n > 0$).

Si le signal d'entrée $e(t)$ admet une transformée de Laplace, et si :

- ($t < 0$) $\Rightarrow (e(t) = s(t) = 0)$
- ($t = 0$) $\Rightarrow \left(s(t) = \frac{d}{dt} s(t) = 0 \right)$

alors on peut écrire la fonction de transfert du 2nd ordre (forme canonique):

$$F(p) = \frac{k}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2} \quad (40.)$$

Les pôles de cette fonction de transfert sont les racines de l'équation caractéristique :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2 = 0 \quad (41.)$$

On doit donc calculer le discriminant :

$$\Delta = 4 \frac{\xi^2}{\omega_n^2} - \frac{4}{\omega_n^2} = 4 \left(\frac{\xi^2 - 1}{\omega_n^2} \right) \quad (42.)$$

dont le signe ne dépend que de la valeur absolue de ξ :

- si $|\xi| > 1, \Delta > 0$ et les 2 pôles sont réels;
- si $|\xi| = 1, \Delta = 0$ et les 2 pôles sont réels et confondus (pôle double);
- si $|\xi| < 1, \Delta < 0$ et les 2 pôles sont complexes conjugués.

Dans tous les cas, on peut écrire les pôles sous la forme :

$$\begin{aligned} p_1 &= -\xi \omega_n + \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} \\ p_2 &= -\xi \omega_n - \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} \end{aligned} \quad (43.)$$

Si $\xi > 0$, les pôles sont à partie réelle négative et le système est stable.

5.1 Les réponses transitoires.

- cas de 2 pôles réels ($\xi > 1$)

La réponse impulsionnelle ($e(t) = \delta(t)$) est l'originale de la fonction de transfert. Celle-ci se décompose en somme de 2 fonctions de transfert du 1^{er} ordre (par décomposition en éléments simples, voir cours de mathématiques) :

$$F(p) = \frac{k \omega_n}{2 \sqrt{\xi^2 - 1}} \left[\frac{1}{p + \omega_n (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})} - \frac{1}{p + \omega_n (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})} \right] \quad (44.)$$

d'où l'expression temporelle de la réponse impulsionnelle :

$$s_\delta(t) = \frac{k \omega_n}{2 \sqrt{\xi^2 - 1}} \left[e^{-\omega_n (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})t} - e^{-\omega_n (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})t} \right] \Gamma(t) \quad (45.)$$

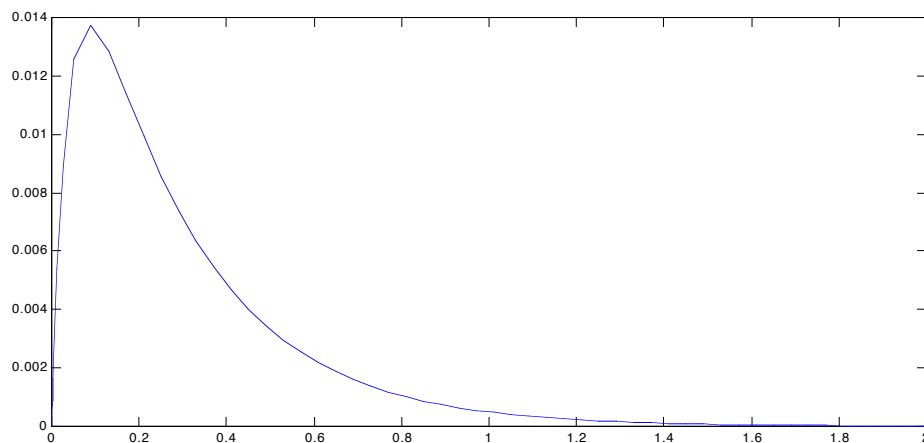


Figure 17: réponse impulsionnelle pour $k = 10$, $\omega_n = 10$ rad/s et $\xi = 1,5$ (système hyperamorti).

La réponse indicielle se déduit en intégrant la réponse impulsionnelle par rapport au temps :

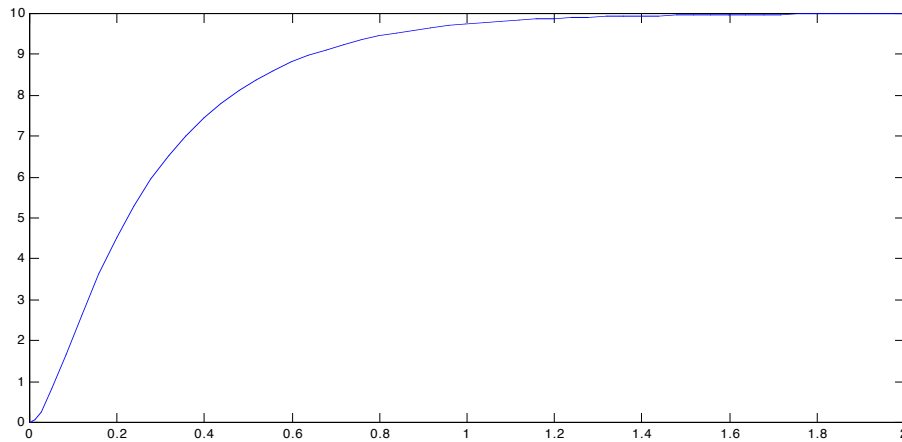
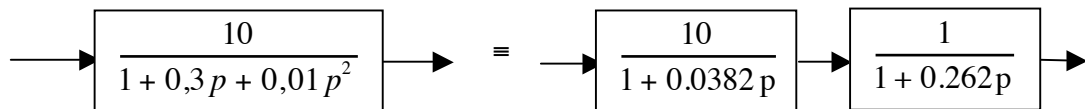


Figure 18: réponse indicielle pour $k = 10$, $\omega_n = 10$ rad/s et $\zeta = 1,5$ (système hyper-amorti).

Le système du 2nd ordre est équivalent dans ce cas à la mise en cascade de 2 systèmes du 1^{er} ordre :



• cas de 2 pôles réels confondus ($\zeta = 1$)

La fonction de transfert s'écrit :

$$F(p) = \frac{k}{\left(1 + \frac{1}{\omega_n} p\right)^2}$$

La réponse impulsionnelle ($e(t) = \delta(t)$) est l'originale de la fonction de transfert, soit :

$$s_\delta(t) = k \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} \Gamma(t) \quad (46.)$$

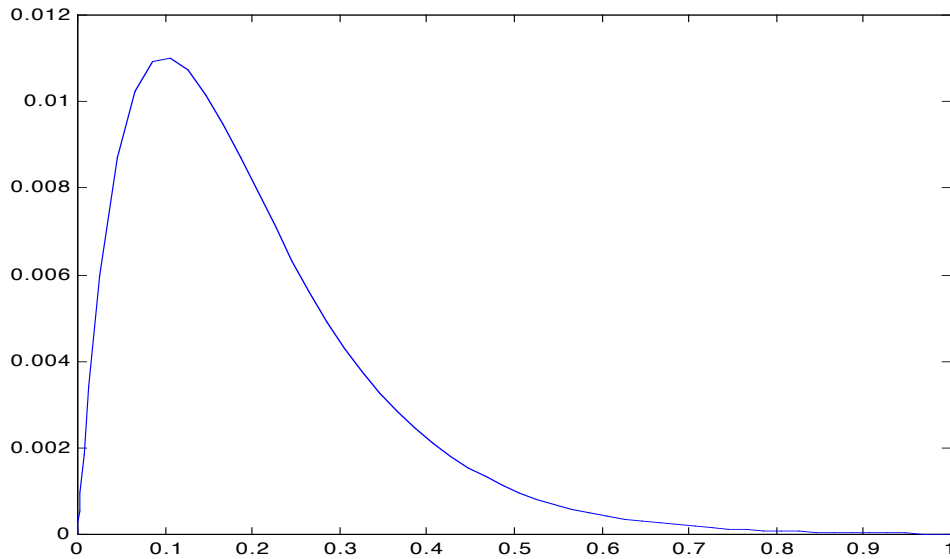


Figure 19: réponse impulsionnelle pour $k = 10$, $\omega_n = 10$ rad/s et $\zeta = 1$

La réponse indicielle s'obtient en intégrant la réponse impulsionnelle par rapport au temps :

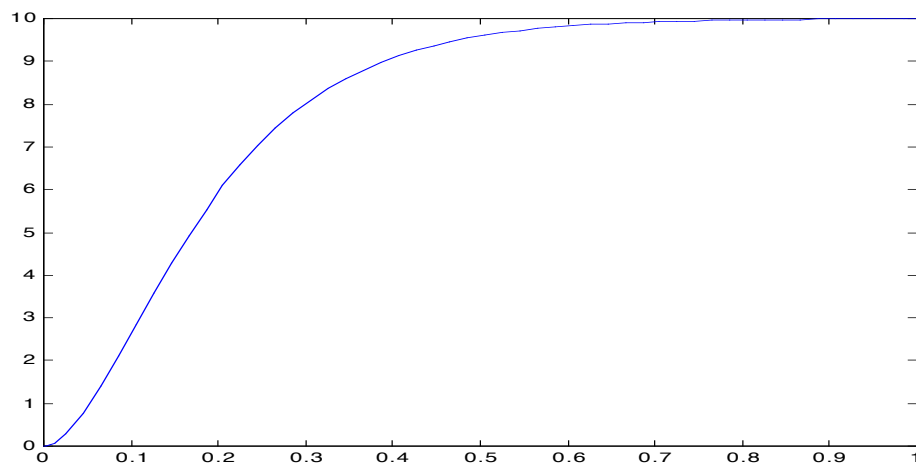


Figure 20: réponse indicielle pour $k = 10$, $\omega_n = 10$ rad/s et $\zeta = 1$

- cas de 2 pôles complexes conjugués ($0 < \zeta < 1$)

La réponse impulsionnelle ($e(t) = \delta(t)$) est l'originale de la fonction de transfert. On peut l'écrire directement à partir de la table des transformées de Laplace :

$$s_{\delta}(t) = \frac{k \omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \left[e^{-\zeta \omega_n t} \sin\left(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t\right) \right] \Gamma(t) \quad (47.)$$

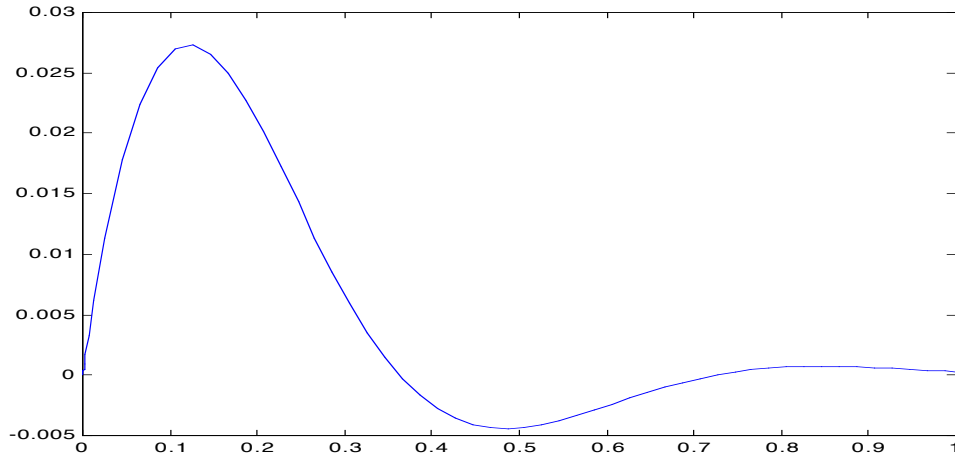


Figure 21: réponse impulsionnelle pour $k = 10$, $\omega_n = 10$ rad/s et $\zeta = 0,5$

La réponse indicielle s'obtient en intégrant la réponse impulsionnelle par rapport au temps :

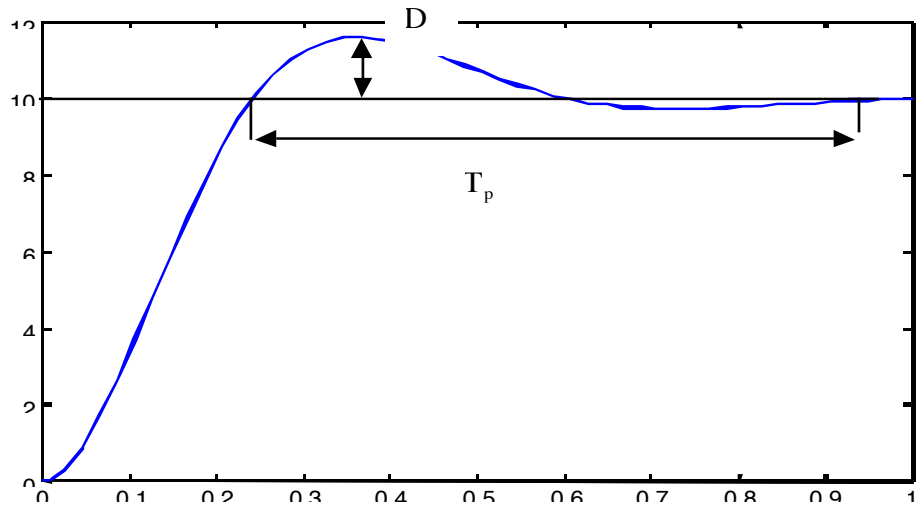


Figure 22: réponse indicielle pour $k = 10$, $\omega_n = 10$ rad/s et $\zeta = 0,5$

D est le 1^{er} dépassement. Il s'exprime par :

$$\frac{D}{s(\infty)} (\%) = 100 e^{-\frac{\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (48.)$$

T_p est la pseudo-période propre qui vaut l'inverse de ω_p qui est la pulsation propre amortie. Elle s'exprime par :

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

5.2 Réponse fréquentielle

La transmittance isochrone d'un système du second ordre s'écrit donc :

$$F(j\omega) = \frac{k}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \quad (49.)$$

Le module de cette fonction complexe de la fréquence s'écrit :

$$|F(j\omega)| = \left| \frac{S(j\omega)}{E(j\omega)} \right| = \frac{k}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (50.)$$

L'argument s'écrit :

$$\angle F(j\omega) = -\text{Arc tan} \left(\frac{2\xi\omega/\omega_n}{1 - \omega^2/\omega_n^2} \right) \quad (51.)$$

Ces fonctions sont tracées ci-dessous dans les plans de Bode, Black et Nyquist, avec les valeurs numériques :

$k = 1$
 $\xi = 0,1 ; 0,7 ; 2$
 $\omega_n = 1 \text{ rad/s.}$

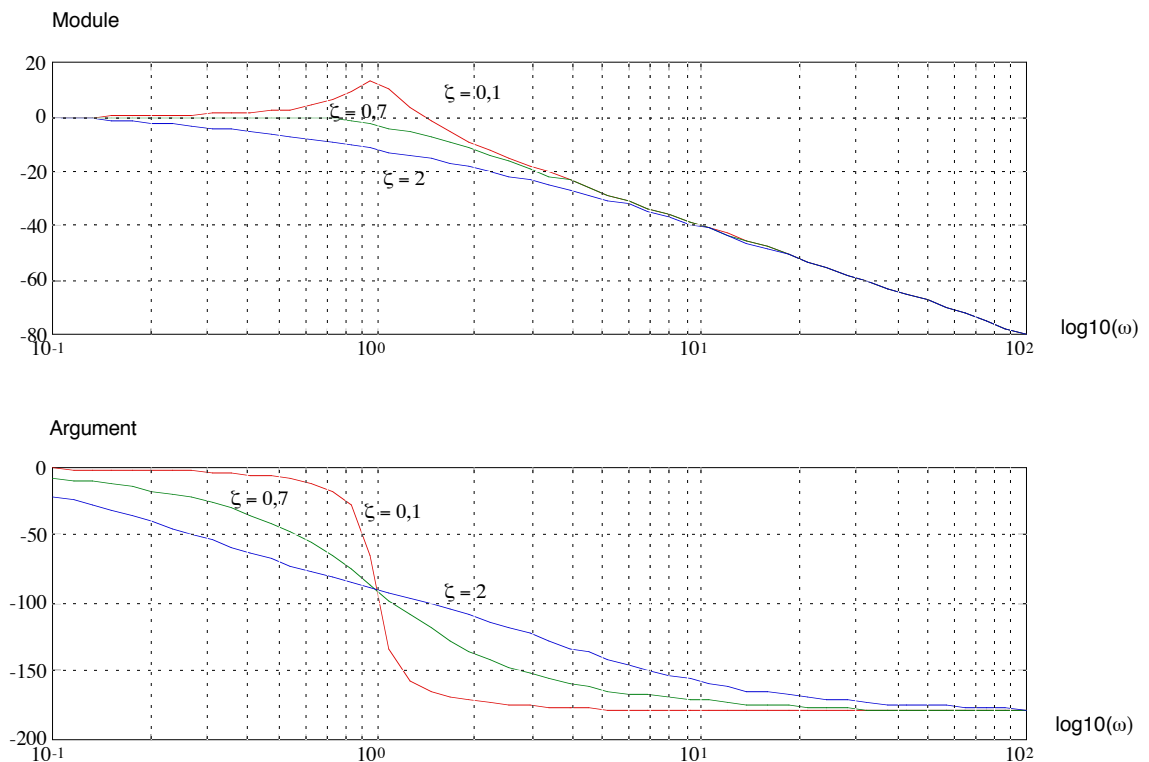


Figure 23: diagramme de Bode de systèmes du 2nd ordre pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement ξ .

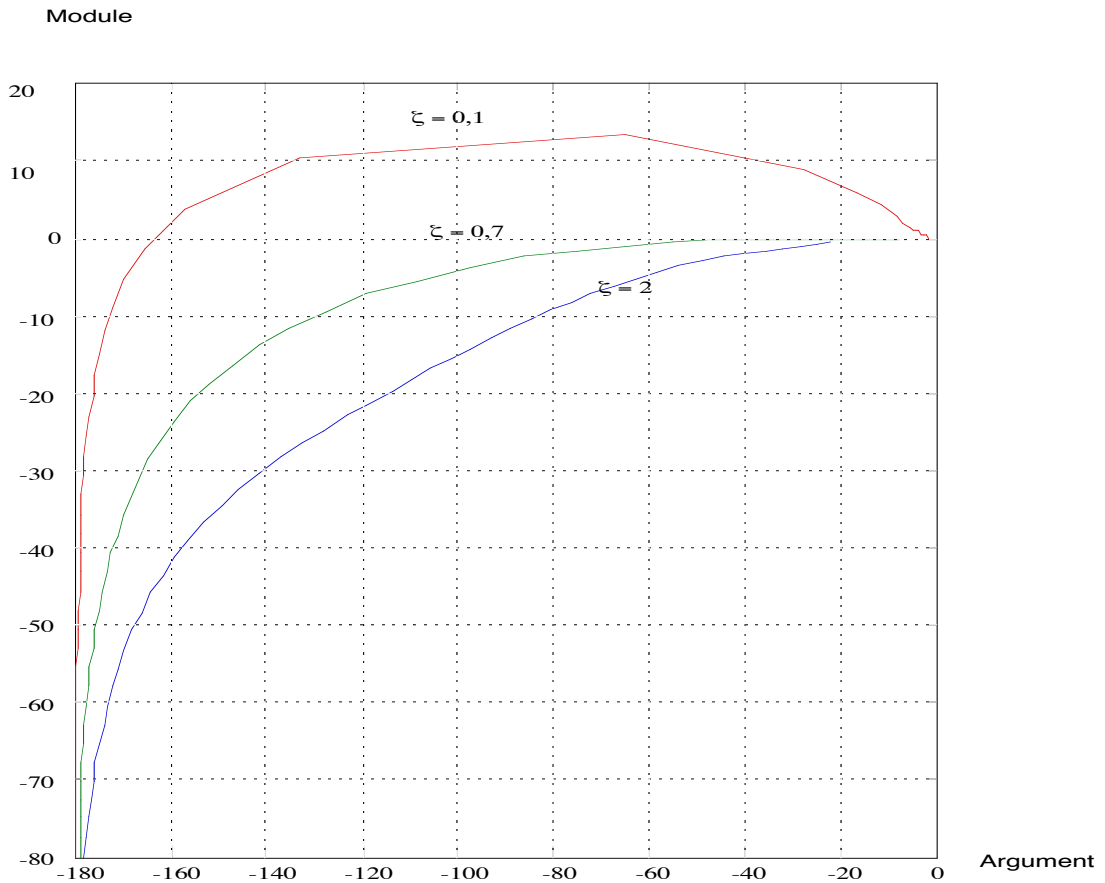


Figure 24: diagramme de Black de systèmes du 2nd ordre pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement ζ .

Pour des valeurs de ζ inférieures à 0,7, on observe une résonance : la courbe de module passe par un maximum à la pulsation dite de résonance ω_r :

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

On définit le facteur de résonance Q :

$$Q = \frac{|F(j\omega_r)|}{|F(j0)|} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

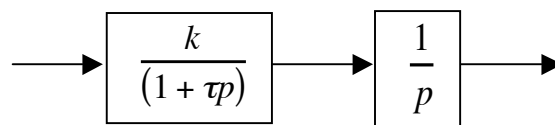
III.6 Systèmes composés et à retard.

6.1 Intégrateur et 1^{er} ordre

Soit le système de transmittance

$$G(p) = \frac{k}{(1 + \tau p)p}$$

qui correspond au schéma fonctionnel :



Sa réponse impulsionnelle est égale à la réponse indicielle du système du 1^{er} ordre (à démontrer).

La réponse fréquentielle :

$$G(j\omega) = \frac{k}{(1 + j\tau\omega)j\omega}$$

Posons $\omega_c = 1/\tau$ et $\omega_i = k$:

$$G(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_c}\right)j\frac{\omega}{\omega_i}} \quad (52.)$$

On calcule le module (en dB) et l'argument (en degrés) :

$$|G(j\omega)|_{dB} = \left| \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_i}} \right|_{dB} + \left| \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \right|_{dB}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_i}} + \angle \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

On obtient donc le diagramme de Bode en additionnant, pour chaque valeur de ω :

- les valeurs de module de l'intégrateur (+) et du 1^{er} ordre (*) ;
- les valeurs d'argument de l'intégrateur (+) et du 1^{er} ordre (*) .

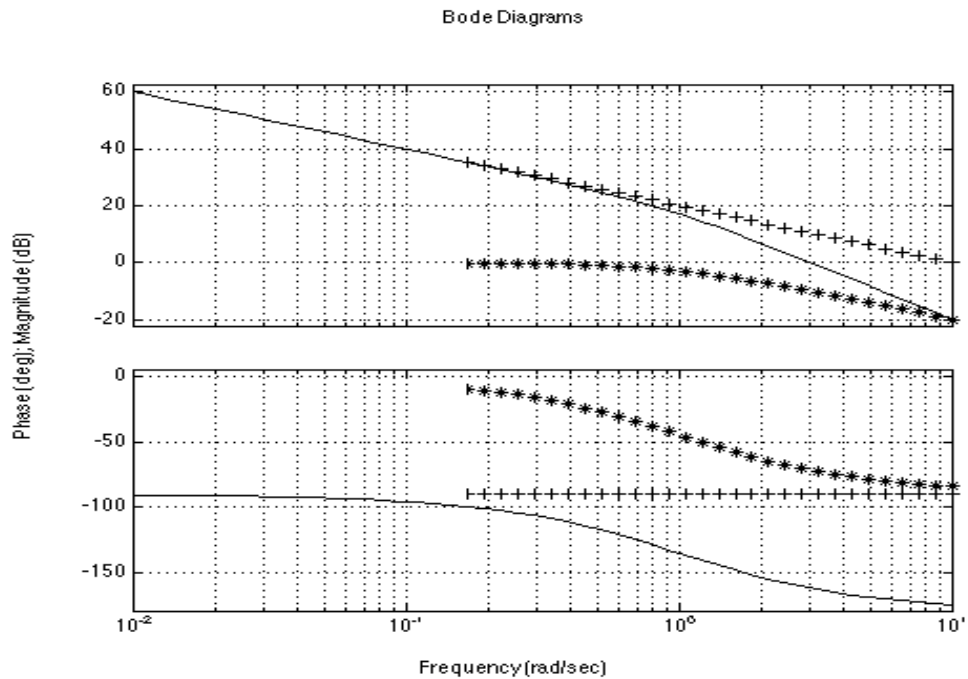


Figure 25: diagramme de Bode de système du 1^{er} ordre avec intégrateur.

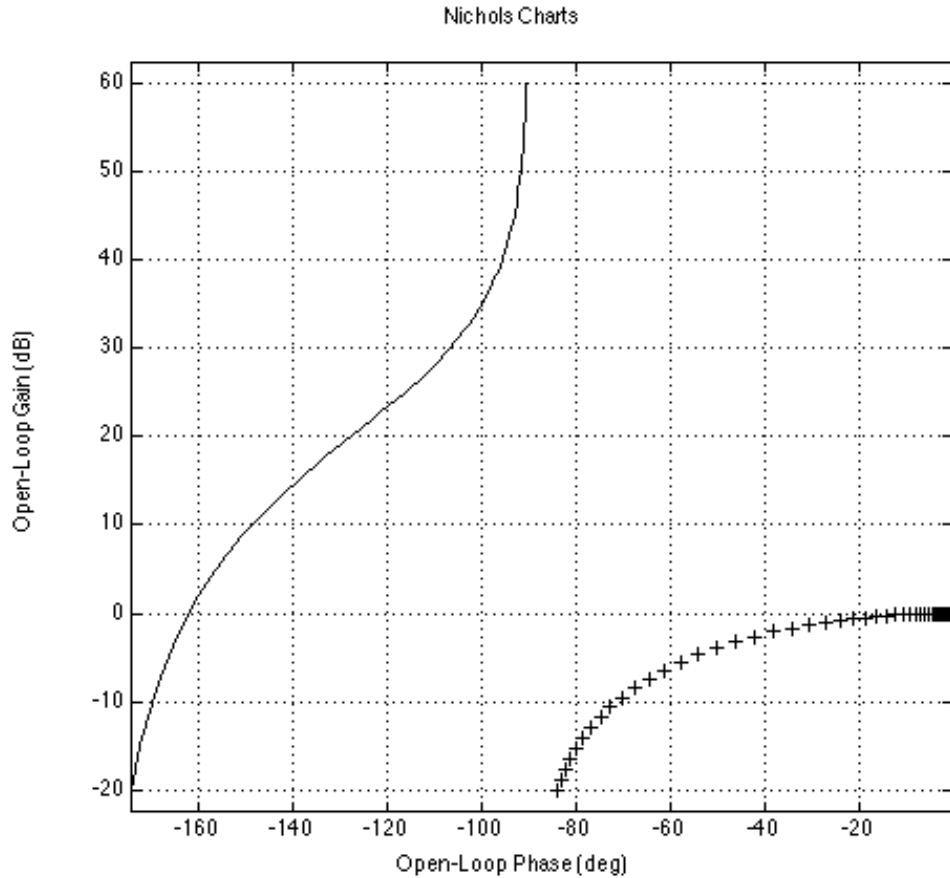


Figure 26: diagrammes de Black de système du 1^{er} ordre seul (+) et avec intégrateur

6.2 Second ordre avec numérateur

Soit un système du type :

$$G(p) = \frac{k(1 + \tau p)}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2}$$

sa réponse fréquentielle peut se calculer à partir de la représentation suivante :

$$G(j\omega) = k(1 + j\tau\omega) \frac{1}{1 + j\frac{2\xi}{\omega_n}\omega - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \quad (53.)$$

et on peut exprimer les valeurs de module (en dB) et d'argument (en degrés) :

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10} k + |1 + j\tau\omega|_{dB} + \left| \frac{1}{1 + j\frac{2\xi}{\omega_n}\omega - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right|_{dB}$$

$$\angle G(j\omega) = \text{Arc tan}(\tau\omega) + \angle \frac{1}{1 + j\frac{2\xi}{\omega_n}\omega - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

Le diagramme de Bode s'obtient donc en additionnant, fréquence par fréquence, les courbes :

- de module
- d'argument :

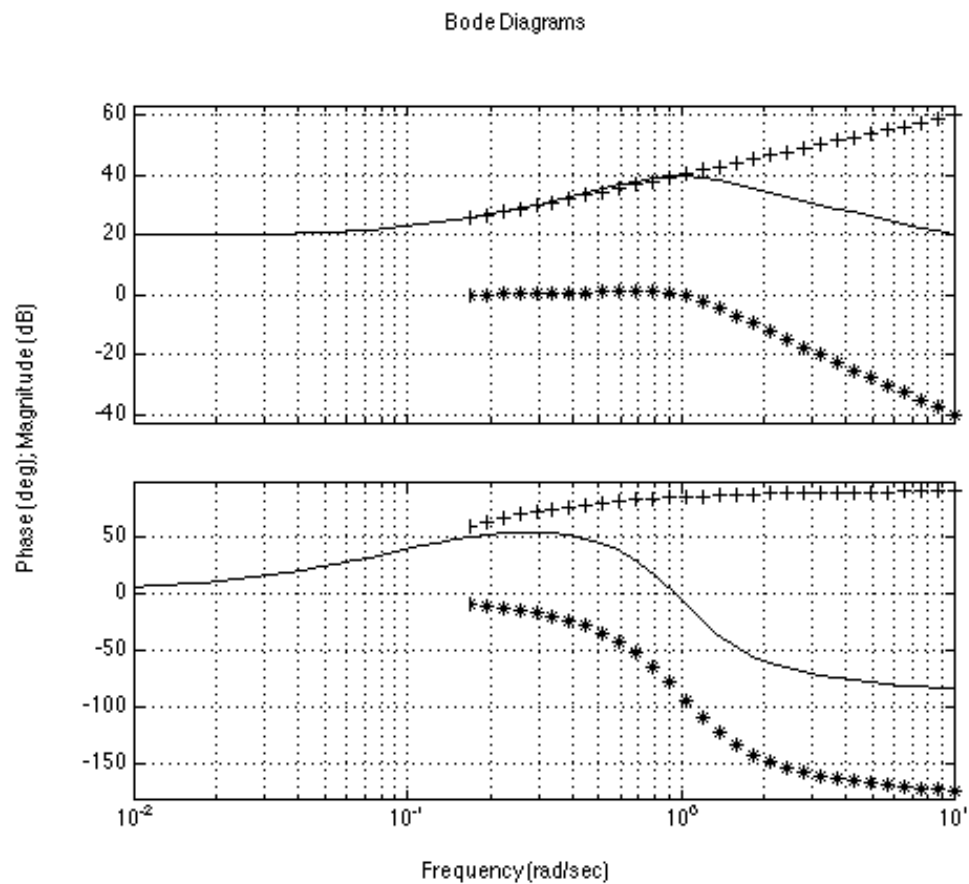


Figure 27: diagramme de Bode de système du 2nd ordre avec numérateur :

$$G(j\omega) = \frac{10 \left(1 + j \frac{\omega}{0,1} \right)}{1 + j\omega - \omega^2}$$

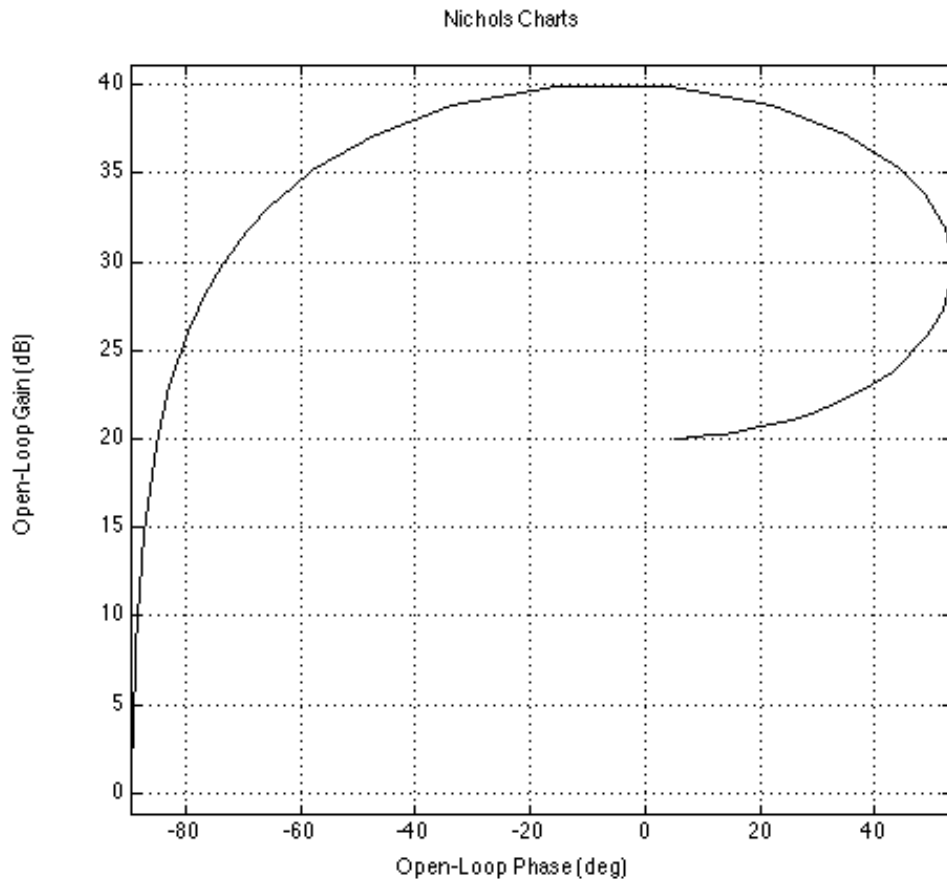


Figure 28: diagramme de Black de système du 2nd ordre avec numérateur

6.3 Système à retard

Considérons le système représenté par l'équation :

$$s(t) = e(t - \theta)$$

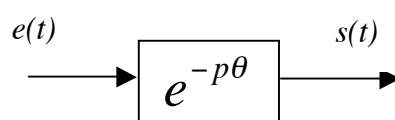
C'est un système dont le signal de sortie à l'instant t reproduit le signal d'entrée tel qu'il était à l'instant $t - \theta$.

Si les conditions requises sont remplies, on peut calculer les transformées de Laplace et calculer la fonction de transfert :

$$S(p) = e^{-p\theta} E(p)$$

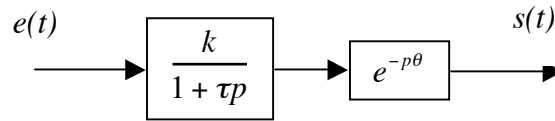
$$\frac{S(p)}{E(p)} = e^{-p\theta} \quad (54.)$$

On peut donc représenter le retard par le schéma fonctionnel :



- 1^{er} ordre et retard :

Le système représenté par le schéma fonctionnel :



est également représenté par la fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{k e^{-p\theta}}{1 + \tau p}$$

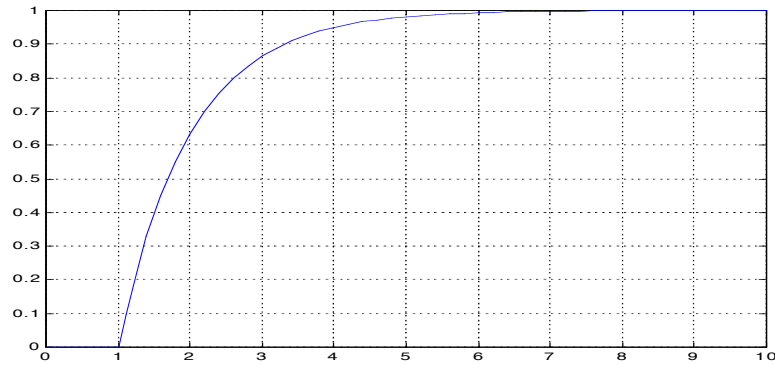


Figure 29: Réponse indicielle pour $\theta = 1$ s, $\tau = 1$ s et $k = 1$.

- 2nd ordre et retard

Le principe est le même.

6.4 Réponses fréquentielles d'un système à retard

En remplaçant p par $j\omega$, la transmittance isochrone d'un retard est $e^{-j\theta\omega}$

Le module vaut 1 pour toutes les valeurs de ω :

$$\left| e^{-j\theta\omega} \right| = 1, \forall \omega;$$

l'argument est directement proportionnel à la pulsation ω :

$$\angle e^{-j\theta\omega} = -\theta\omega.$$

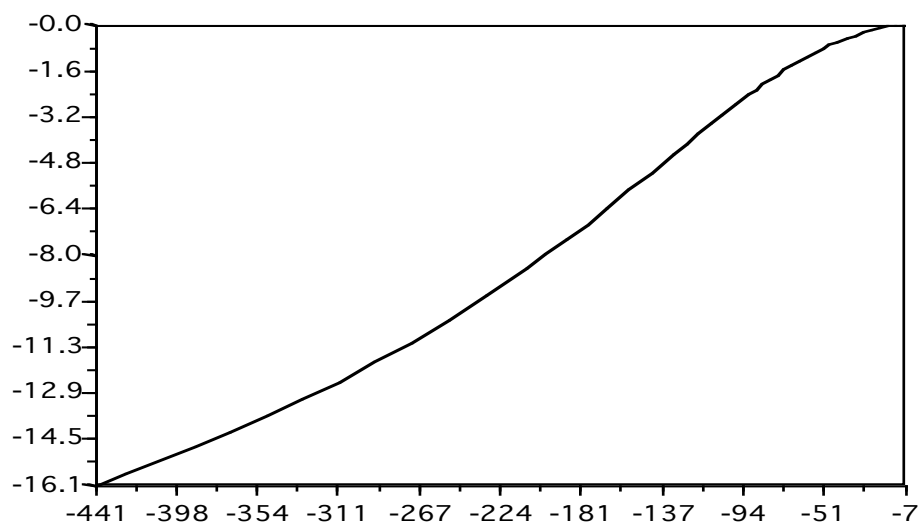


Figure 30: Lieu de Black d'un système du 1^{er} ordre avec retard : $k=1$, $\tau=1 s$, $\theta=1 s$.

IV. IDENTIFICATION.

IV.1 Principe.

L'objectif de l'identification est de déterminer un modèle du système, par exemple une fonction de transfert. On peut chercher un modèle pour différentes raisons, mais, dans le cadre de ce cours, on s'intéresse surtout à la détermination d'un modèle pour la conception de système de commande.

Un tel modèle doit être le plus simple possible, mais doit représenter le mieux possible le comportement **mesurable** du système.

Le modèle est obtenu par traitement des signaux issus de mesures sur les entrées et sorties du système réel. Ces signaux sont toujours perturbés par des bruits, introduits par les appareils de mesure (capteurs) ou résultants de processus internes au système, qui n'est en fait jamais parfaitement linéaire. La qualité du modèle linéaire obtenu est donc fortement dépendante du soin que l'on apporte à effectuer les mesures et à filtrer les signaux utilisés.

La procédure consiste à :

- soumettre le système à des signaux d'excitation connus, en vérifiant que ces signaux n'atteignent pas les limites de saturation du système ;
- relever soigneusement la réponse à ces signaux ;
- interpréter la forme des signaux pour choisir une structure de modèle (ordre, retard de la fonction de transfert) ;
- déduire de mesures sur les signaux des valeurs numériques des paramètres du modèle ;
- valider le modèle en vérifiant, si possible à l'aide de signaux d'excitation différents, que les réponses expérimentales du système et les réponses simulées du modèle sont suffisamment proches.

En ce qui concerne les signaux d'excitation, on utilisera ici essentiellement les signaux transitoires (surtout échelon) ou sinusoïdaux.

IV.2 Identification par réponse indicielle.

Les conditions d'application sont :

- le système peut admettre un signal en échelon de hauteur suffisante, sans que les actionneurs entrent en saturation ;
- la réponse du système présente un régime permanent mesurable.

On commence par déterminer le **gain statique** en mesurant la valeur finale de la sortie et en la divisant par la hauteur de l'échelon d'entrée :

$$K = \frac{\lim_{t \rightarrow \infty} s(t)}{\lim_{t \rightarrow \infty} e(t)}$$

Selon l'allure de la réponse, on choisit la **structure** puis les **paramètres** du modèle :

- 1^{er} ordre avec (ou sans) retard :

réponse en exponentielle, pente à l'origine non nulle ;
la structure :

$$G(p) = \frac{K e^{-p\theta}}{1 + \tau p} \quad (55.)$$

les paramètres se mesurent directement comme indiqué

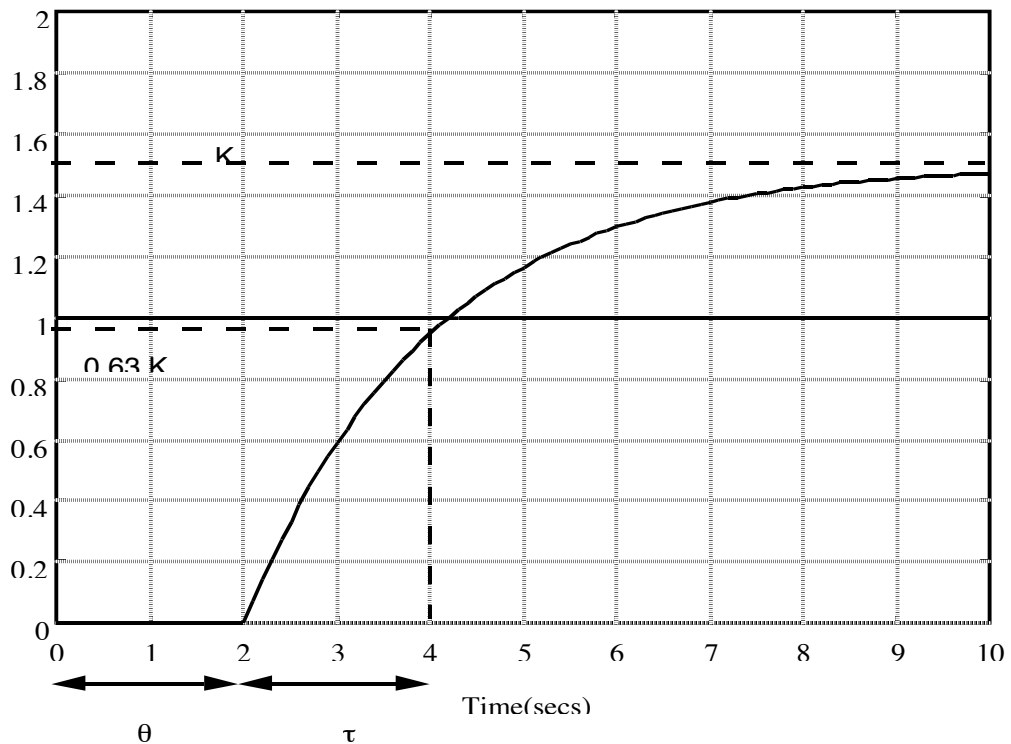


Figure 31: Réponse d'un système du 1^{er} ordre avec retard : $K=1.5$, $\theta=2$ s, $\tau=2$ s.

• 2^{ème} ordre hyperamorti :

Dans ce cas, le système a 2 pôles réels, sa fonction de transfert est de la forme :

$$G(p) = k \left(\frac{1}{1 + \tau_1 p} \cdot \frac{1}{1 + \tau_2 p} \right)$$

et il faut identifier les 2 constantes de temps correspondantes, τ_1 et τ_2 .

Pour cela on trace la courbe (de préférence sur papier semi-logarithmique, voir figure 34) :

$$\log[s(\infty) - s(t)] = f(t)$$

Exemple :

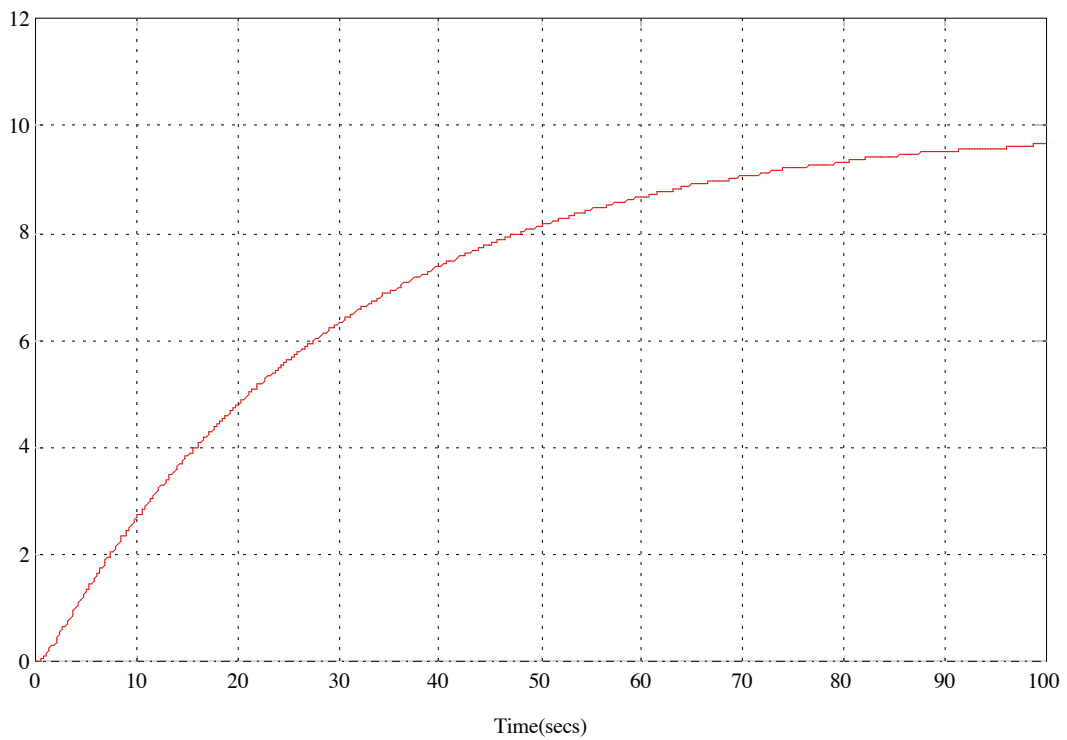


Figure 32: réponse indicielle d'un système à identifier

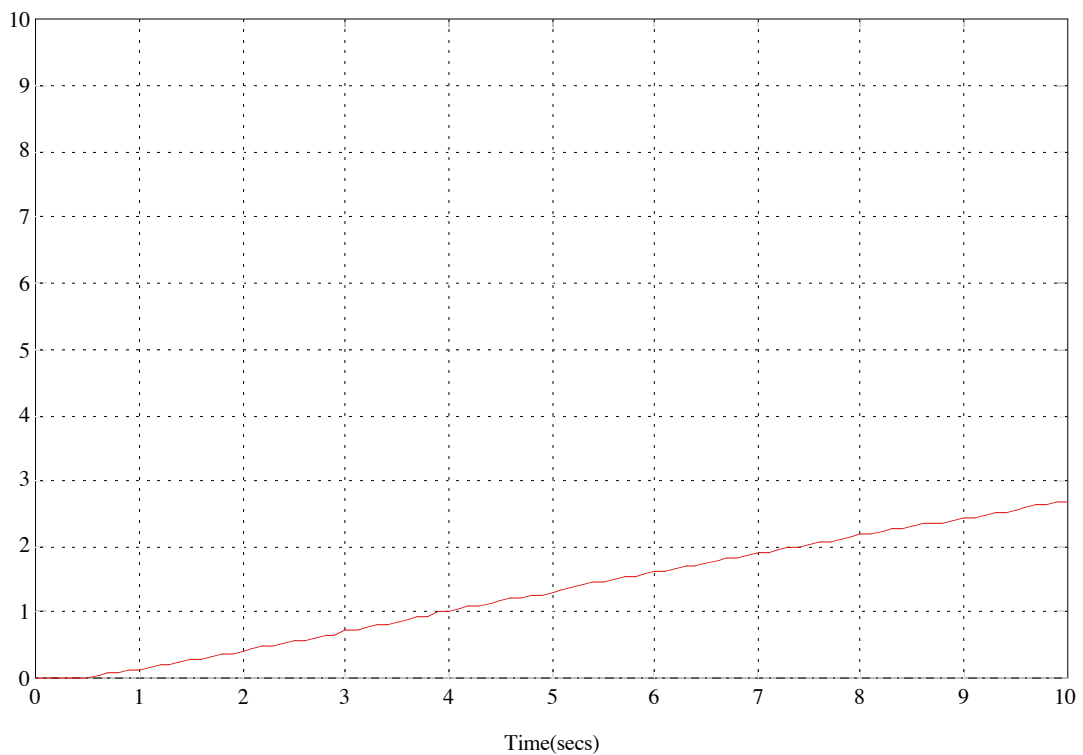


Figure 33: même réponse, avec zoom sur l'axe d'abscisse.

On remarque sur la figure 33, la tangente à l'origine horizontale.

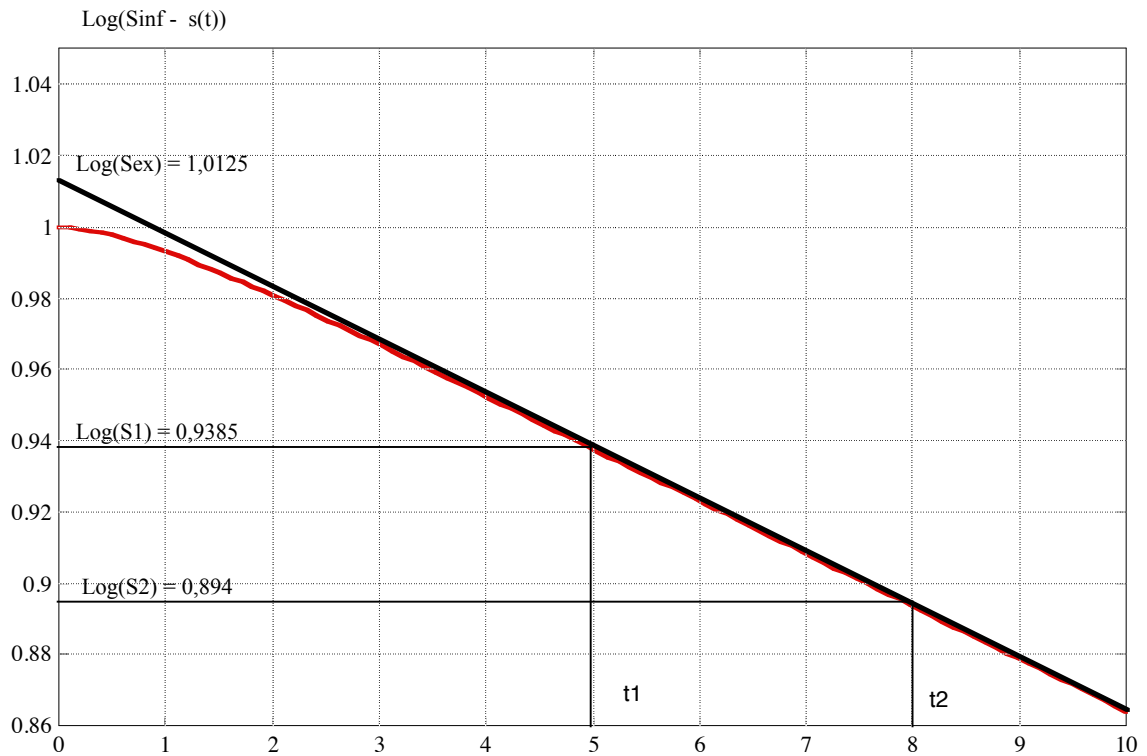


Figure 34: représentation logarithmique.

on mesure, dans la partie linéaire (voir figure 34) t_1 , t_2 , S_1 , S_2 , S_0 et S_{ex} ;
Alors :

$$\tau_1 = 0,43 \frac{t_2 - t_1}{\log S_1 - \log S_2} \quad (56.)$$

$$\tau_2 = \frac{S_{ex} - S_0}{S_{ex}} \tau_1$$

$$\tau_1 = 28.9888 \text{ s};$$

$$\tau_2 = 0.8225 \text{ s}$$

• 2^{ème} ordre critique :

La fonction de transfert recherchée est de la forme :

$$G(p) = \frac{k}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2}$$

Sur la réponse ci-dessous, on détermine les instants t_1 , t_2 et t_3 tels que :

$$\frac{s(t_1)}{s(\infty)} = 1 - \frac{2}{e}$$

$$\frac{s(t_2)}{s(\infty)} = 1 - \frac{3}{e^2}$$

$$\frac{s(t_3)}{s(\infty)} = 1 - \frac{4}{e^3}$$

On calcule ζ , $\omega_n t_1$ et $\omega_n t_2$ au moyen de l'abaque de la figure 36.

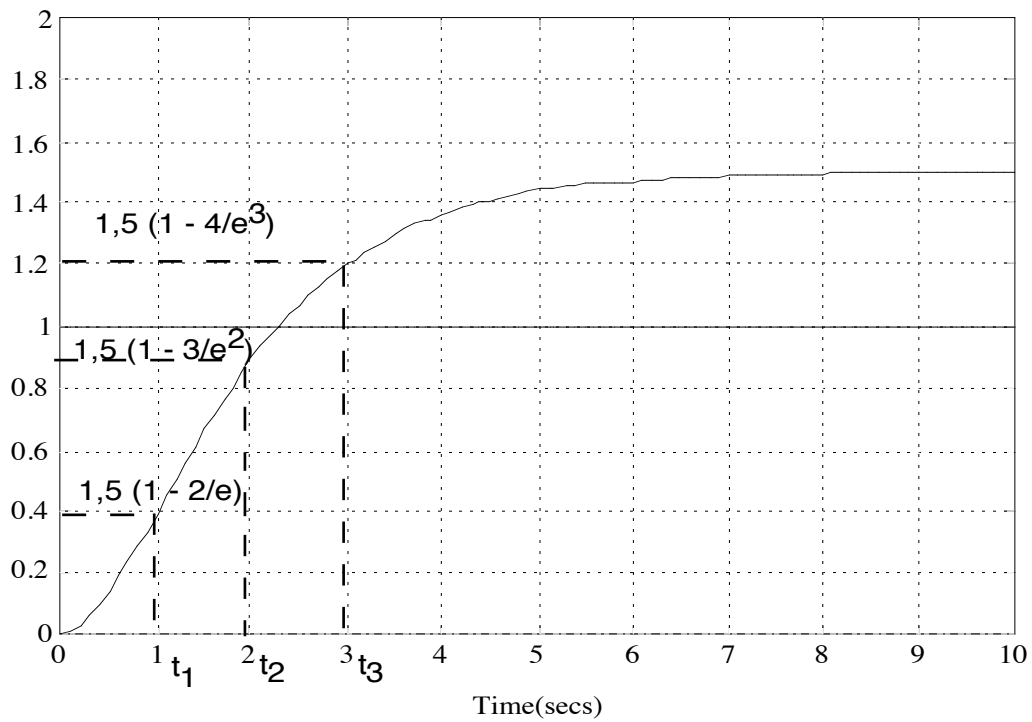


Figure 35: réponse indicielle d'un système à identifier

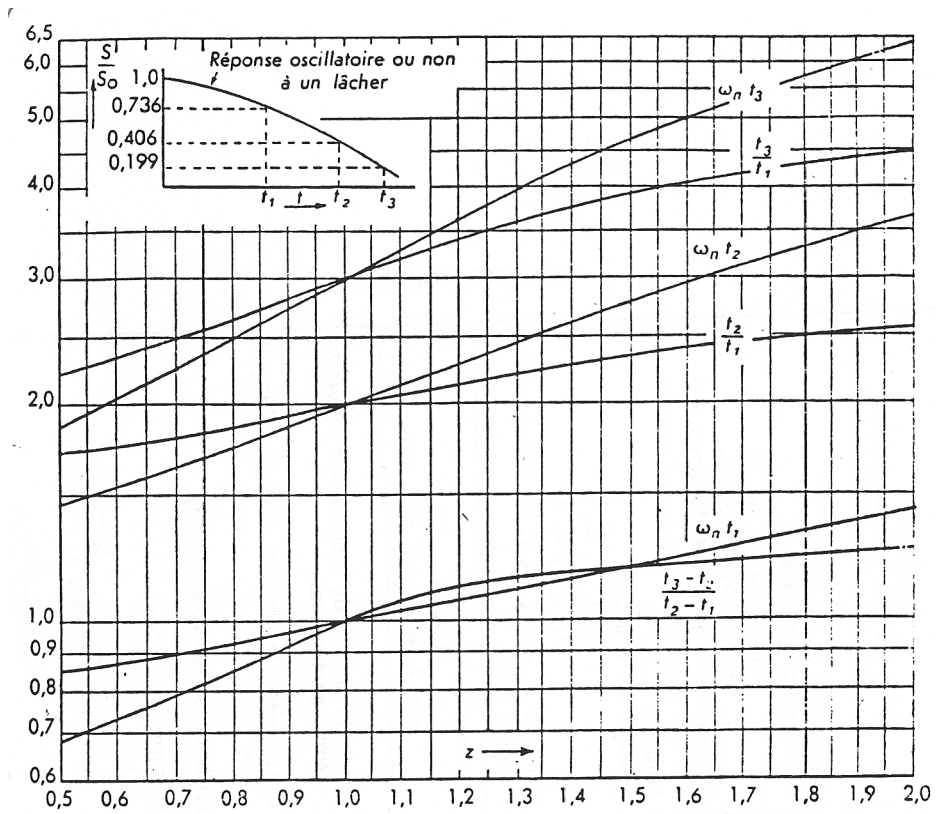


Figure 36 : abaque

• 2^{ème} ordre oscillant :

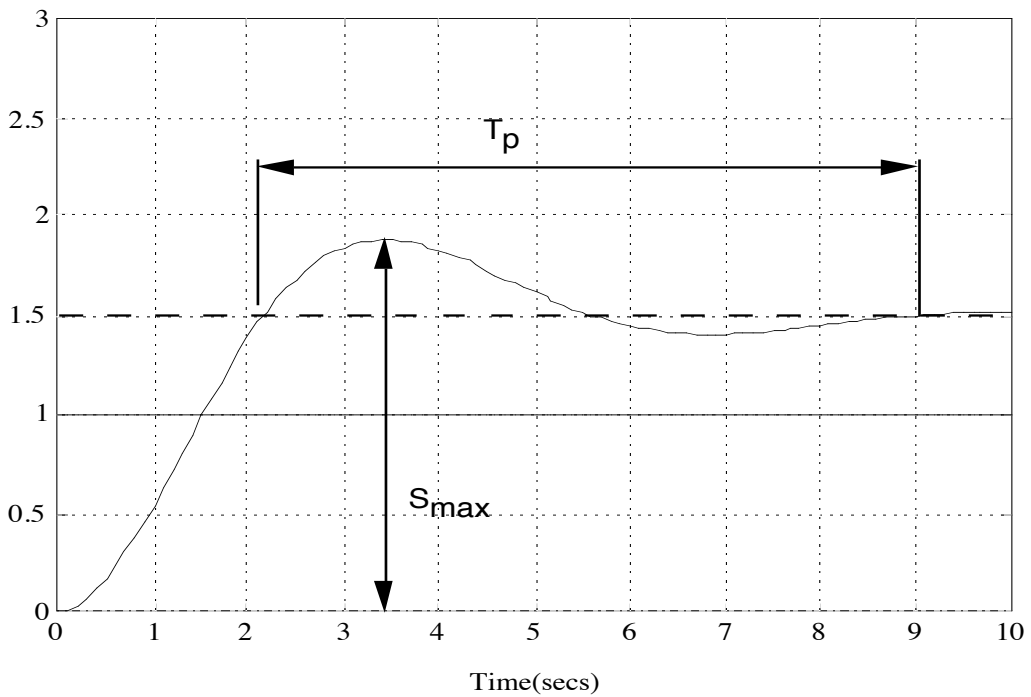


Figure 37: réponse oscillante d'un système à identifier

On définit le dépassement ou premier dépassement réduit D comme :

$$D = \frac{S_{\max} - S_{\infty}}{S_{\infty}}$$

De la relation entre le dépassement réduit et le facteur d'amortissement :

$$D = \exp\left(-\pi \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

on déduit la courbe-abaque ci-dessous, sur laquelle on peut mesurer ζ .

La valeur de ω_n est déduite de la mesure de la pseudo période T_p :

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T_p \sqrt{1-\zeta^2}}$$

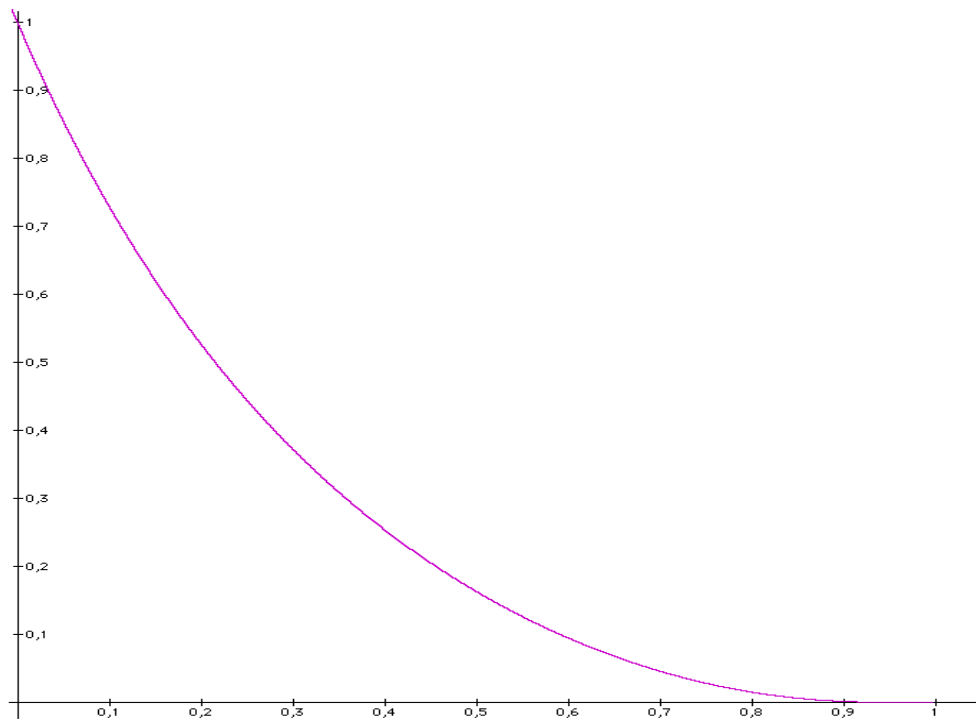


Figure 38: Courbe-abaque : $D = f(\zeta)$.

IV.3 Identification par réponse fréquentielle.

Dans le cas où on ne peut pas appliquer un échelon sur l'entrée du système et si :

- le système peut admettre des signaux de type sinusoïdal de fréquence variable ;
- on dispose d'appareils de mesure d'amplitude et de phase de signaux sinusoïdaux ;

alors on cherche à tracer expérimentalement les lieux de réponse en fréquence du système, par exemple dans le plan de Bode. Le rapport d'amplitude de la sortie par rapport à l'entrée donne, pour chaque fréquence le module de la transmittance isochrone ; le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée donne l'argument de la transmittance isochrone.

La première étape consiste à déterminer le gain statique (s'il existe) en appliquant des signaux de fréquence très basse : lorsque les valeurs de rapport d'amplitude et de déphasage ne changent plus lorsque l'on diminue la fréquence.

Ensuite il faut déterminer la plage de fréquences utiles. Au delà de la bande passante du système, plus on augmente la fréquence du signal d'entrée, plus l'amplitude du signal de sortie diminue, en sorte que le rapport signal sur bruit se détériore : après avoir atteint la limite admissible pour l'amplitude du signal d'entrée il ne sert plus à rien de continuer d'augmenter la fréquence.

Les différentes mesures effectuées permettent de placer des points dans le plan de Bode. On se reportera au polycopié de travaux pratiques et en particulier à la notice d'utilisation de l'analyseur LabVIEW (ou de l'Enertec) pour ce qui concerne la mise en pratique de ces mesures.

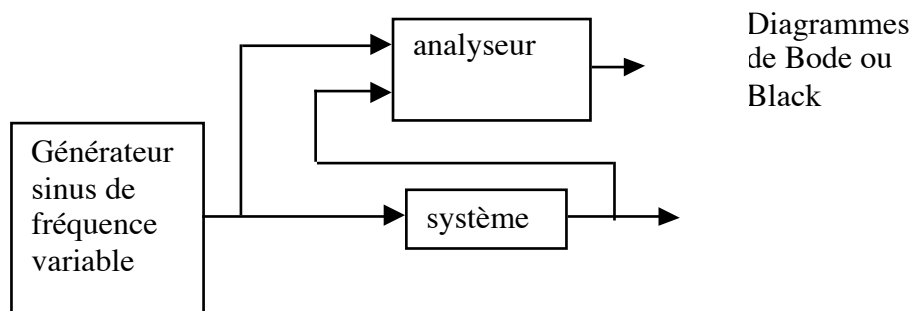


Figure 39: schéma fonctionnel de mise en œuvre d'analyse fréquentielle.

Il faut ensuite procéder à une analyse des courbes ou des mesures pour déterminer, d'une part une structure de modèle, puis des valeurs de paramètres. Pour cela on se reportera aux différentes courbes de Bode étudiées au chapitre précédent, en utilisant au mieux les courbes de module et d'argument.

• 1^{er} exemple

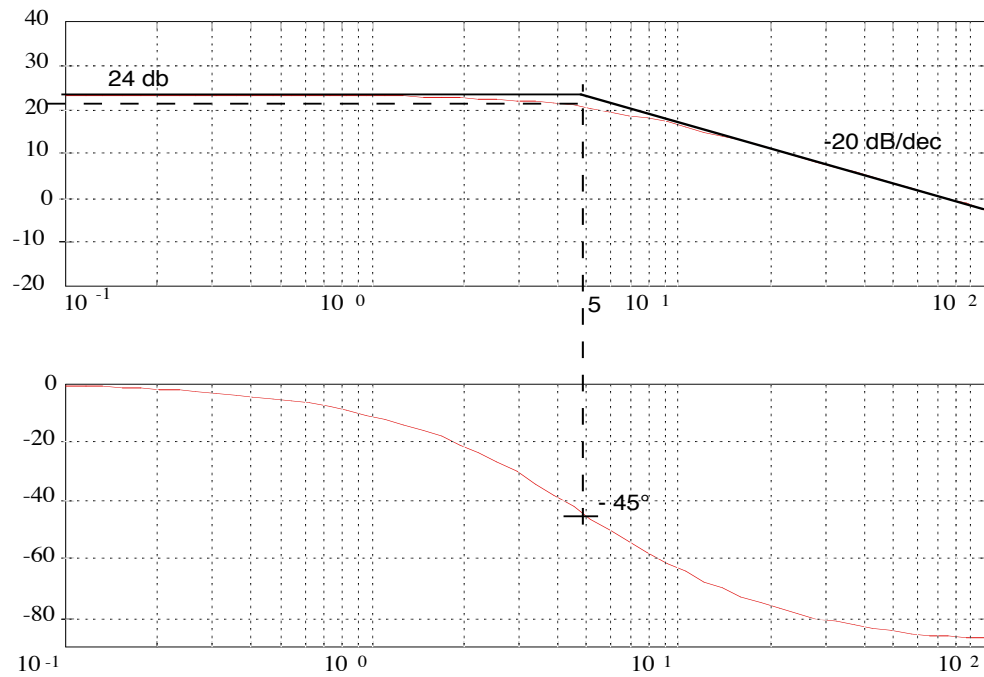


Figure 40: réponse fréquentielle d'un système à identifier

On remarque que la courbe d'argument tend vers -90° , on cherche donc un modèle du premier ordre.

Sur la courbe de module on peut lire :

$$20 \log K = 24 \text{ dB}$$

$$\text{donc } K = 15$$

et sur la courbe d'argument, à -45° , $\omega_c = 5 \text{ rad/s}$

d'où la transmittance :

$$H(j\omega) = \frac{15}{1 + j\frac{\omega}{5}}$$

• 2^{ème} exemple

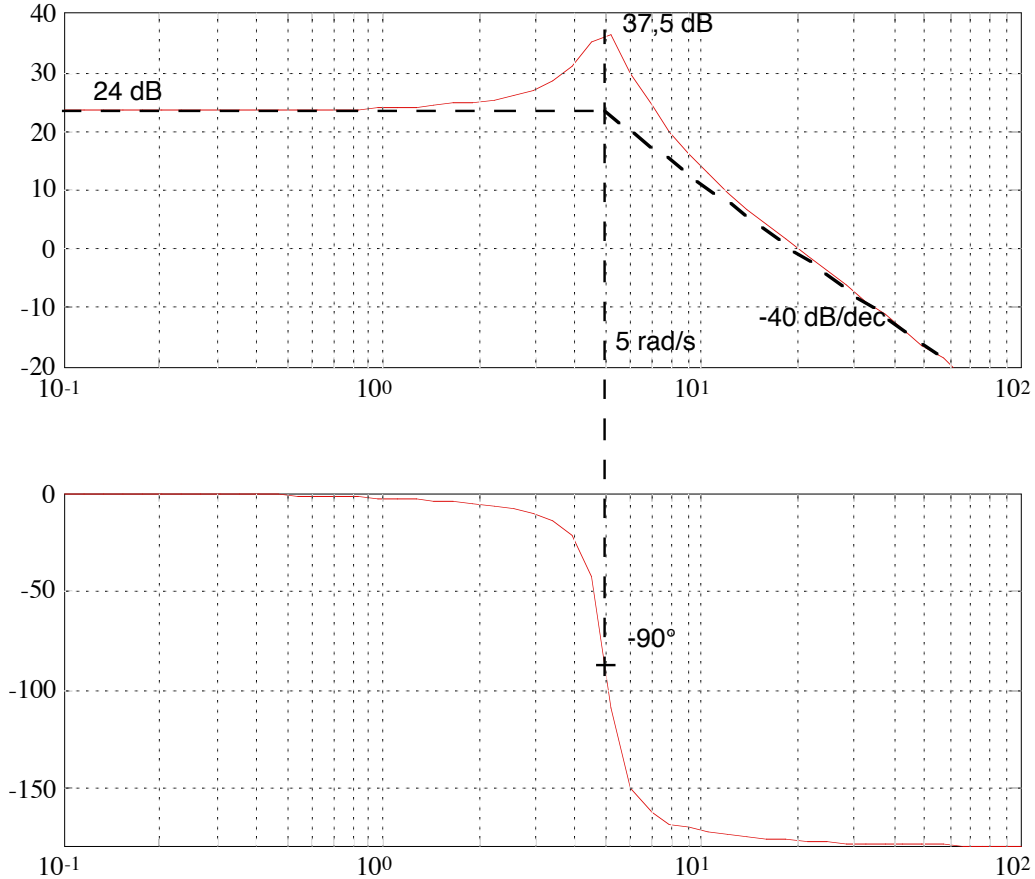


Figure 41: réponse fréquentielle d'un système à identifier

On remarque que la courbe d'argument tend vers -180° , on cherche donc un modèle du second ordre.

Sur la courbe de module on peut lire

$$20 \log K = 24 \text{ dB}$$

donc

$$K = 15 ;$$

Et sur la courbe d'argument, à -90° , $\omega_n = 5 \text{ rad/s}$

$$|H(j\omega_n)|_{\text{dB}} = 37,5$$

$$|H(j\omega_n)| = 75$$

$$\Rightarrow \zeta = \frac{K}{2 |H(j\omega_n)|} = \frac{15}{2 * 75} = 0,1$$

d'où la transmittance :

$$H(j\omega) = \frac{15}{1 + 0,04 j\omega - 0,04\omega^2} \quad (57.)$$

V. SPECIFICATION DE LOIS DE COMMANDE,

V.1 La commande en boucle fermée

1.1 Fonctions de transfert de boucle fermée

La structure générale d'un système de commande comporte :

- la partie opérative (PO) : c'est le système à régler (SAR) qui comprend
 - les actionneurs : ce sont les organes de puissance de la PO (moteurs, vérins, ...)
 - les capteurs : ce sont les organes qui mesurent les variables à régler du SAR ;
- le régulateur : c'est le système qui élabore ("calcule") la commande.

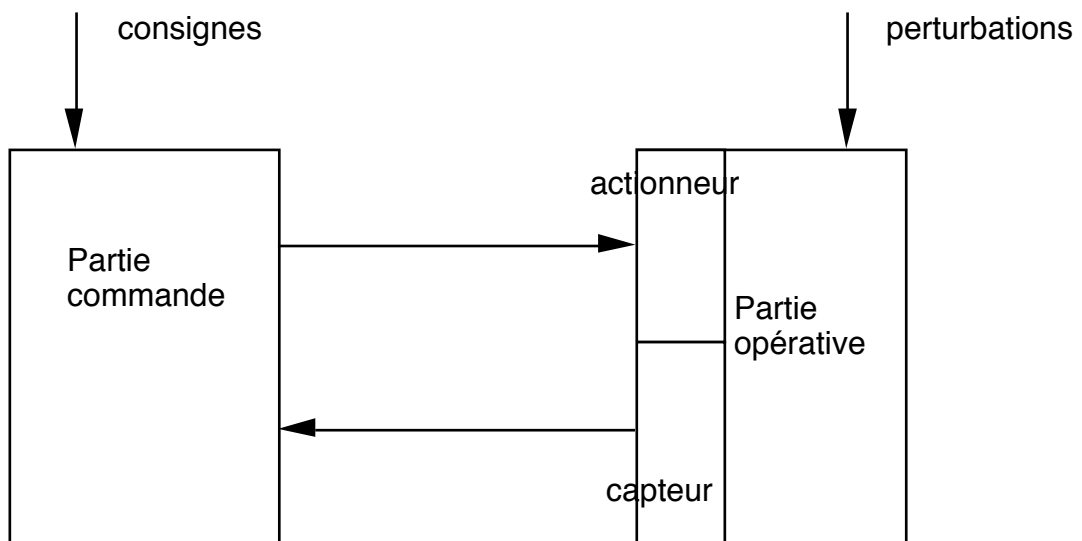


Figure 42: représentation générale d'un système de commande

Dans le cas où l'ensemble actionneur-partie opérative-capteur peut être représenté par un modèle linéaire, par exemple une fonction de transfert $F(p)$, le régulateur (qui constitue la "partie commande") est en général linéaire.

L'ensemble peut alors être représenté par le schéma fonctionnel :

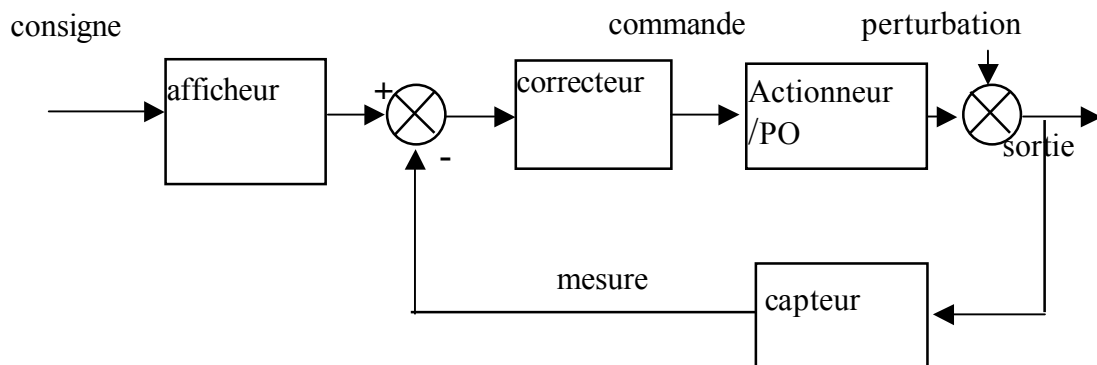


Figure 43: Schéma fonctionnel général d'une boucle de commande.

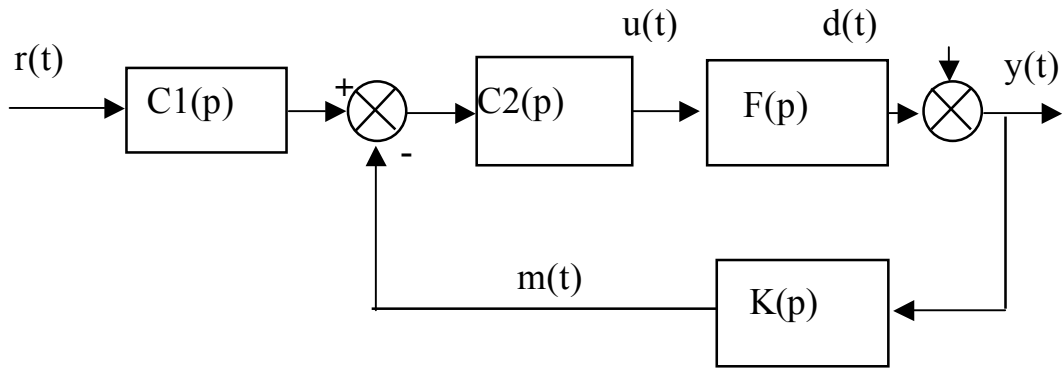


Figure 44: Schéma fonctionnel général d'une boucle de commande.

Les fonctions de transfert de boucle fermée :

- Poursuite de la consigne

$$H(p) = \frac{Y(p)}{R(p)} = \frac{F(p)C_1(p)C_2(p)}{1 + F(p)K(p)C_2(p)} \quad (58.)$$

- Rejet de la perturbation de sortie

$$S(p) = \frac{Y(p)}{D(p)} = \frac{1}{1 + F(p)K(p)C_2(p)}$$

1.2 Abaque de Black-Nichols

Il existe un outil graphique permettant de déduire la réponse fréquentielle de la boucle fermée à partir de la réponse fréquentielle de la boucle ouverte : c'est l'abaque de Black-Nichols.

Il faut d'abord obtenir un schéma fonctionnel de la boucle fermée dit "à retour unitaire", sur lequel le gain de la chaîne de retour est normalisé à 1 :

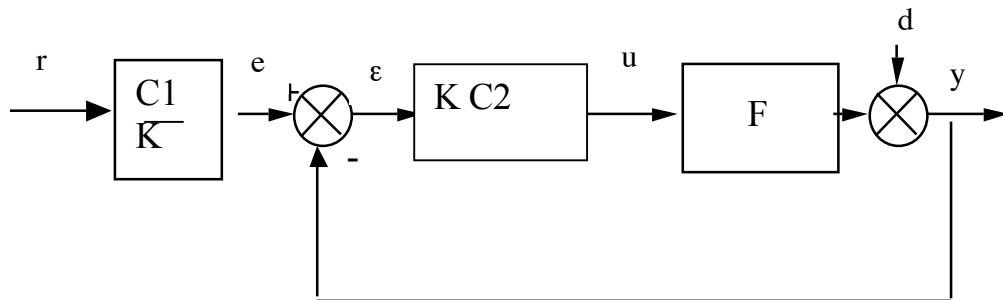


Figure 45-bis: Schéma fonctionnel d'une boucle de commande à retour unitaire.

D'un point de vue purement formel, ce schéma est équivalent au précédent si et seulement si la fonction de transfert $1/K$ est stable.

La fonction de transfert entre e et y s'écrit :

$$T(p) = \frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{F(p)K(p)C_2(p)}{1 + F(p)K(p)C_2(p)}$$

C'est une transmittance de la forme :

$$T(p) = \frac{Z(p)}{1 + Z(p)}$$

Soit la forme en $j\omega$:

$$T(j\omega) = \frac{Z(j\omega)}{1 + Z(j\omega)}$$

Pour chaque valeur de ω , on a une relation entre 2 nombres complexes du type :

$$t = \frac{z}{1 + z}$$

$$\text{Soit : } z = x e^{j\theta} = x[\cos\theta + j \sin\theta].$$

On veut tracer dans le plan de Black les courbes qui représentent des valeurs données du module de t , pour cela on cherche la relation entre x et θ qui correspond à une valeur de t :

$$|t| = Cste = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2 + 2x \cos\theta}}$$

définit une courbe dans le plan de Black : c'est le lieu des z (boucle ouverte) pour lesquels le module de t (boucle fermée) est égal à la constante donnée.

De même :

$$\angle t = Cste = \theta - \text{Arc tan} \left(\frac{x \sin\theta}{1 + \cos\theta} \right)$$

définit une courbe dans le plan de Black : c'est le lieu des z (boucle ouverte) pour lesquels l'argument de t (boucle fermée) est égal à la constante donnée.

On peut donc tracer dans le plan de Black un ensemble de courbes correspondant à différentes valeurs de module et d'argument de la boucle fermée : c'est l'abaque de Black-Nichols ci-dessous. Il sert à déterminer, à partir du lieu de Black de $Z(j\omega)$, le module de $T(j\omega)$. (Les courbes d'argument sont rarement utilisées).

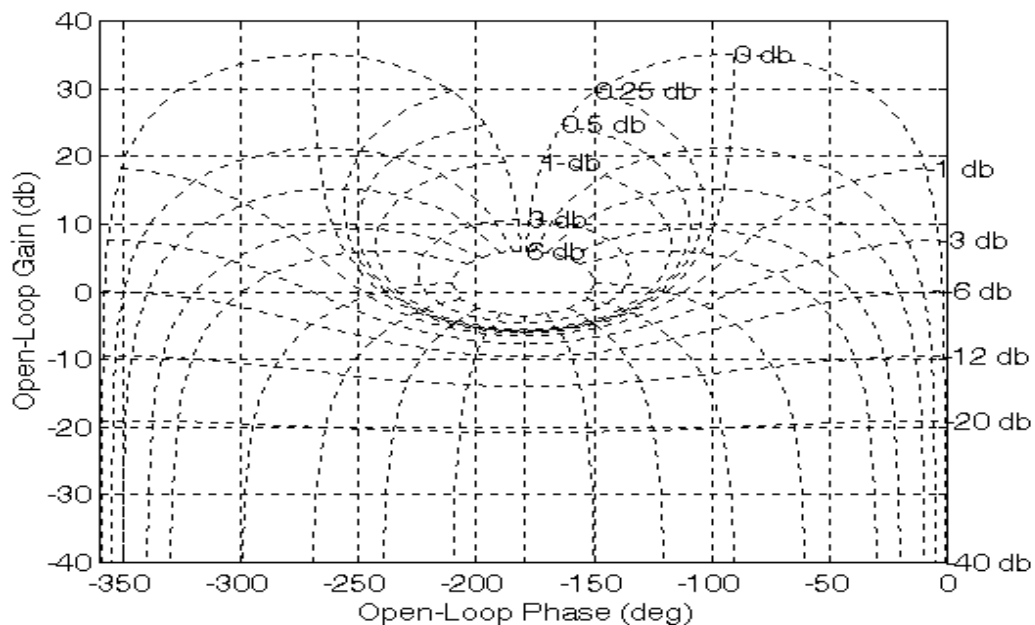


Figure 46: Abaque de Black (ou de Black-Nichols, ou de Nichols)

V.2 Stabilité en boucle fermée.

2.1 Equation caractéristique. pôles

Soit le système en boucle fermée représenté par le schéma fonctionnel :

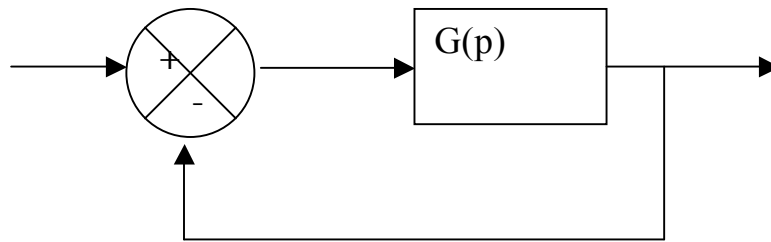


Figure 47: schéma fonctionnel général d'un système en boucle fermée.

où $G(p)$ est une fraction rationnelle :

$$G(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$$

$B(p)$ et $A(p)$ sont des polynomes en p .

La transmittance de boucle fermée s'écrit :

$$T(p) = \frac{B(p)}{A(p) + B(p)}$$

Les pôles de cette fonction de transfert sont donc les racines de l'équation caractéristique :

$$A(p) + B(p) = 0$$

Pour que la **boucle fermée soit stable** il est donc **nécessaire et suffisant** que **tous les pôles** de cette fonction de transfert soient dans le **demi-plan complexe gauche** (partie réelle négative).

2.2 Critère du revers

Il existe un critère, basé sur la réponse fréquentielle de la boucle ouverte, permettant de caractériser la stabilité de la boucle fermée : c'est le **critère général de Nyquist** qui se réduit au **critère du revers dans le cas de boucle ouverte stable**.

Soit le système de transmittance (isochrone) $G(j\omega)$, que l'on suppose **stable** (pas de pôle à partie réelle positive) ; on peut tracer sa réponse fréquentielle dans le plan de Nyquist; alors, lorsque l'on parcourt le **lieu de Nyquist dans le sens des pulsations croissantes** :

- si on laisse le **point critique (-1, 0)** à **gauche**, la boucle fermée est **stable** ;
- si on **traverse** le **point critique (-1, 0)**, la boucle fermée est **juste oscillante** ;
- si on laisse le **point critique (-1, 0)** à **droite**, la boucle fermée est **instable**.

Remarque : le cas où on passe sur le point critique exprime en fait la condition de Barkhausen utilisée en électronique pour la réalisation d'oscillateurs !

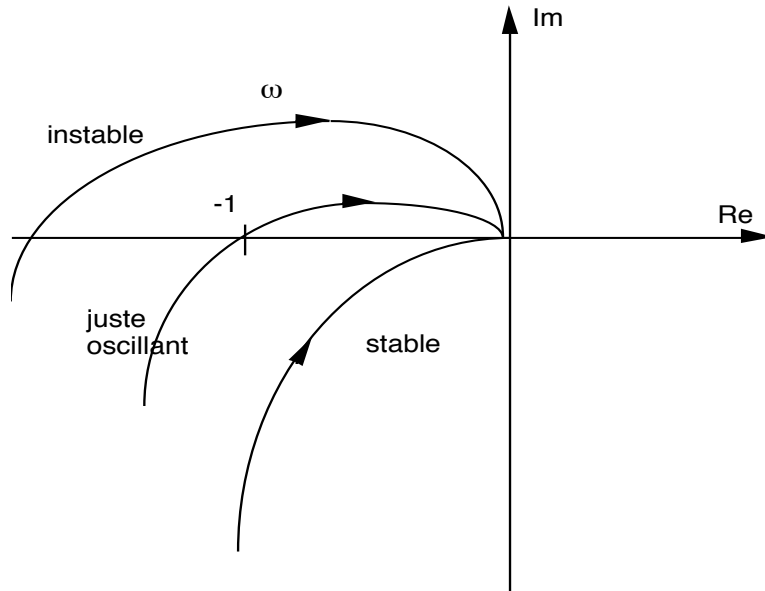


Figure 48: critère du revers dans le plan de Nyquist.

Ce critère du revers s'applique également dans le **plan de Black**.

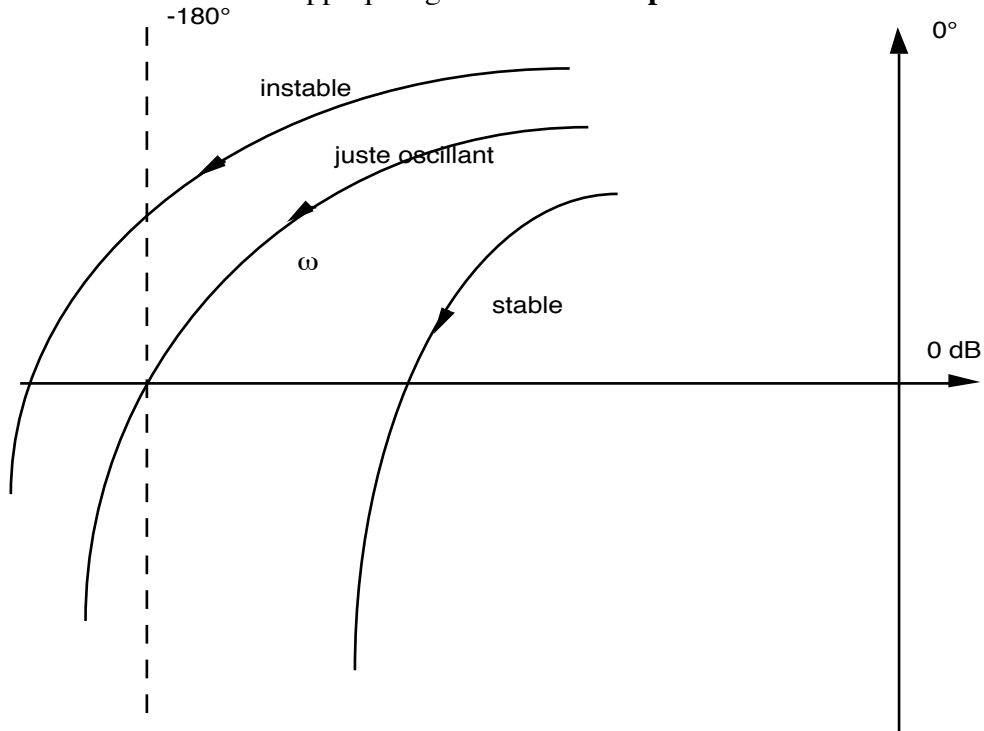


Figure 49: critère du revers dans le plan de Black.

Le point critique $(-1, 0)$ est le point correspondant à un module de 0dB et un argument de $-180^\circ (\pm 360^\circ)$. On l'exprime : lorsque l'on parcourt **le lieu de Black dans le sens des pulsations croissantes** :

- si on laisse **le point critique (0dB, -180°) à droite**, la boucle fermée est **stable** ;
- si on **passé par le point critique (0dB, -180°)**, la boucle fermée est **juste oscillante** ;
- si on laisse **le point critique (0dB, -180°) à gauche**, la boucle fermée est **instable**.

2.3 Marges de stabilité

On évalue la distance de la boucle fermée à l'instabilité en mesurant en boucle ouverte:

- **la marge de phase** : distance en $^\circ$ ou en radians entre l'intersection du lieu de boucle ouverte avec l'axe 0 dB, et le point critique;
- **la marge de gain** : distance en dB entre l'intersection du lieu de boucle ouverte avec l'axe -180° , et le point critique

V.3 Spécifications de performance en boucle fermée.

Nous allons décrire un certain nombre d'objectifs typiques que doit atteindre un système de commande automatique. Ces objectifs définissent un ensemble de **spécifications** utilisables pour la synthèse de la loi de commande.

Le premier groupe de spécifications décrit de quelle façon l'utilisateur désire que s'effectue le **suivi de consigne**, sous l'hypothèse d'absence de perturbation, nous parlerons de spécifications de **poursuite**.

3.1 Spécifications de poursuite.

La première spécification, la plus importante, doit être naturellement la **stabilité** de la boucle fermée : voir chapitre précédent.

En ce qui concerne les spécifications de poursuite, nous distinguerons :

- la précision,
- la rapidité.

3.1.1 Précision.

La précision d'un système de commande traduit sa capacité à minimiser un écart entre une valeur désirée de la variable à régler (consigne) et la valeur de la variable à régler.

On définit quelquefois les notions de **précision statique** et de **précision dynamique**. Dans le cadre de ce cours nous parlerons plutôt de **précision** en régime **stationnaire**.

On appelle **erreur stationnaire** d'ordre n la limite, lorsque le temps t tend vers l'infini, de l'erreur entre la consigne $r(t)$ et la sortie à régler $y(t)$ lorsque le signal de consigne $r_n(t)$ est une fonction polynomiale du temps, de la forme générale :

$$r_n(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \Gamma(t)$$

La transformée de Laplace d'un tel signal de consigne s'écrit :

$$R_n(p) = 1/p^n$$

Pour $n = 0$, on reconnaît l'impulsion de Dirac, pour $n = 1$ l'échelon de Heaviside, pour $n = 2$, la rampe, etc ...

Considérons le cas d'une boucle fermée à retour unitaire, dont $L(p)$ est la fonction de transfert de boucle ouverte.

La fonction de transfert de poursuite (entre la consigne et la sortie) s'écrit :

$$H(p) = \frac{L(p)}{1 + L(p)} \quad (59.)$$

donc la fonction de transfert entre l'erreur $\varepsilon(t)$ et la consigne :

$$S(p) = \frac{1}{1 + L(p)} \quad (60.)$$

permet d'écrire l'expression de la transformée de Laplace de l'erreur de consigne :

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + L(p)} \frac{1}{p^n} .$$

Le théorème de la valeur finale permet d'exprimer l'erreur stationnaire d'ordre n :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) \quad (61.)$$

L'expression d'une spécification de précision consistera en une valeur maximale admissible d'une erreur stationnaire d'ordre choisi.

Remarque :

- pour $n=1$, l'entrée est un échelon, on parle **d'erreur statique**
- pour $n=2$, l'entrée est une rampe, on parle **d'erreur de traînage**.

3.1.2 Rapidité.

La rapidité d'un système caractérise la vitesse de convergence de la variable de sortie vers la valeur de consigne à la suite d'une modification de celle-ci.

La rapidité peut donc être évaluée à partir de la réponse à un échelon de consigne : un système est d'autant plus rapide que le temps mis par la variable de sortie pour atteindre son régime d'équilibre en réponse à un échelon de consigne est plus court.

On distingue alors :

- le temps de montée : c'est le temps mis par le signal pour passer de 10 % à 90 % de sa valeur finale.

Ce temps de montée est surtout utilisé pour les systèmes du premier ordre : le temps de montée vaut alors 2,2 fois la constante de temps. Dans le cas de systèmes d'ordre plus élevé, ce temps de montée n'est pas significatif, surtout à cause d'éventuelles oscillations du régime transitoire.

- le temps de raideur : c'est le temps au bout duquel le signal atteint pour la première fois sa valeur finale.

Ce temps de raideur n'a d'intérêt que pour caractériser la rapidité de la réponse à l'échelon au début du régime transitoire, seulement dans le cas de réponse de type oscillatoire. Pour un système du premier ordre, par exemple, le temps de raideur est toujours infini ...

- le temps de réponse à 5 % : c'est le temps mis par le signal de sortie pour s'approcher définitivement à moins de 5 % de la valeur finale.

C'est évidemment l'indicateur de rapidité le plus général et le plus significatif : il caractérise parfaitement la vitesse à laquelle la sortie converge vers sa valeur finale, indépendamment de l'ordre du système, du caractère apériodique ou oscillatoire de la réponse à l'échelon, etc...

On peut également spécifier la rapidité de la réponse à une consigne par la **bande passante de la boucle fermée**.

3.2 Régulation

La fonction de régulation traduit la capacité d'un système de commande à rejeter des perturbations sur la grandeur à régler.

Considérons le système commandé décrit par le schéma fonctionnel de la figure 44, reproduite ci-dessous:

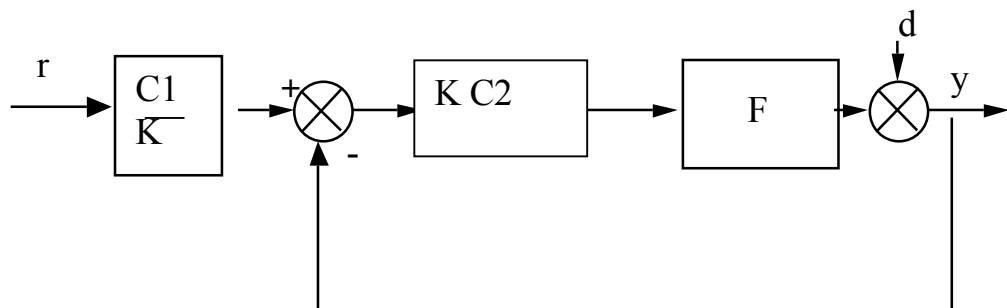


Figure 50: schéma fonctionnel de système commandé en boucle fermée.

La fonction de transfert entre la perturbation d et la sortie à régler, y , s'écrit :

$$S(p) = \frac{Y(p)}{D(p)} = \frac{1}{1 + F(p)K(p)C_2(p)} \quad (62.)$$

Ou encore, si on appelle $L(p)$ la fonction de transfert de la boucle ouverte :

$$L(p) = F(p)K(p)C_2(p) \quad (63.)$$

on retrouve la **fonction de sensibilité** de la relation (60).

3.2.1 Etude asymptotique.

On peut l'utiliser pour caractériser l'influence en régime asymptotique de perturbations polynomiales, de la forme :

$$d_n(t) = D \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \Gamma(t)$$

C'est à dire, en transformée de Laplace :

$$D_n(p) = \frac{D}{p^n}$$

Alors :

$$y(p) = \frac{1}{1 + L(p)} \frac{D}{p^n}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{DS(p)}{p^{n-1}}$$

On exprimera alors la spécification de régulation sous la forme d'une valeur maximale admissible de l'effet de la perturbation sur le régime asymptotique de la sortie.

3.2.2 Etude fréquentielle.

On définit également des spécifications sur la rapidité du rejet de perturbation. En particulier cette spécification s'exprime sous la forme de bande passante de la boucle fermée : il s'agit alors d'exprimer la plage de fréquence dans laquelle le module de la fonction de sensibilité est "petit", ce sera donc la plage de fréquences dans laquelle l'influence du bruit de sortie sera fortement diminuée sur la sortie à régler.

La transmittance isochrone de la sensibilité s'écrit :

$$S(j\omega) = \frac{1}{1 + L(j\omega)} \quad (64.)$$

Soit

$$L(j\omega) = l(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \quad (65.)$$

On peut alors exprimer le module de la fonction de sensibilité :

$$|S(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + l^2(\omega) + 2l(\omega)\cos\varphi(\omega)}} \quad (66.)$$

Ce module est "petit" tant que le module de la boucle ouverte, $l(\omega)$, est "grand".

Remarque.

Quand $l(\omega)$ devient "petit", le module de la sensibilité tend vers 1, c'est à dire que la perturbation affecte directement la sortie : il n'y a plus d'effet de régulation. C'est toujours le cas en hautes fréquences puisque la boucle ouverte est composée de systèmes physiques, donc de type passe-bas.

L'allure générale du module de cette fonction de sensibilité peut être tracée dans le plan de Bode :

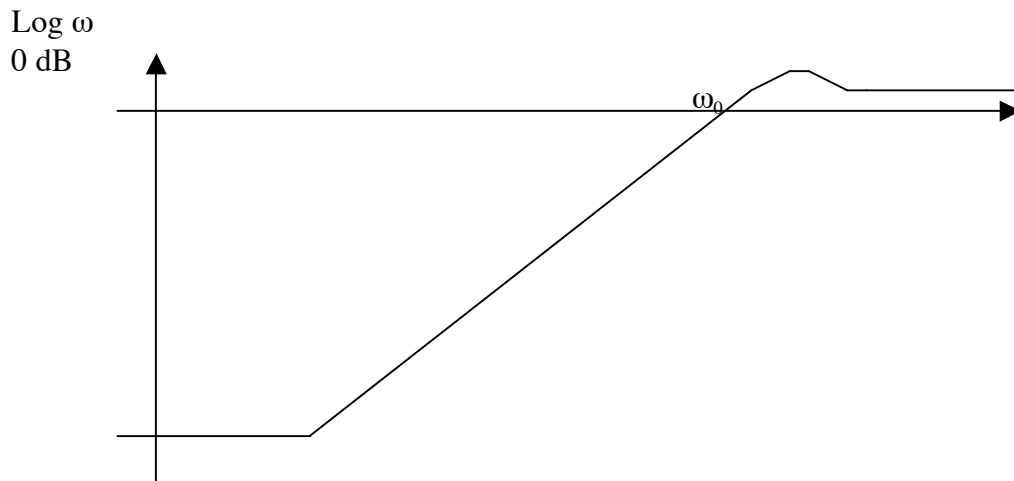


Figure 51: exemple de fonction de sensibilité.

La pulsation ω_0 correspond à peu près à la bande passante du système.

3.3 Admissibilité des commandes

L'hypothèse fondamentale faite dans l'étude des systèmes linéaires est la linéarité : cette hypothèse ne peut être vérifiée sur les systèmes réels que si les commandes appliquées aux actionneurs restent inférieures aux niveaux de saturation. Il faut donc veiller, lors de la réalisation du système de commande, à ce que les gains de la boucle restent raisonnables.

Un autre point de vue important est que le modèle que l'on utilise pour la réalisation du système de commande (régulateur) n'est fidèle à la réalité que dans la plage de fréquences pour laquelle l'identification a pu être faite, c'est à dire celle dans laquelle le rapport signal/bruit est suffisant : c'est à peu près la bande passante naturelle du système à régler. Il est donc dangereux de fixer des gains importants pour augmenter de façon déraisonnable la rapidité du système.

Les spécifications de stabilité, et de performance (en poursuite et en régulation) doivent donc être fixées de manière à rester compatibles avec cette contrainte d'admissibilité des commandes.

VI. CONCEPTION DE REGULATEURS

VI.1 Le régulateur Proportionnel

On appelle ainsi le système de régulation en boucle fermée constitué seulement d'un comparateur et d'un amplificateur, selon le schéma de la figure 51.

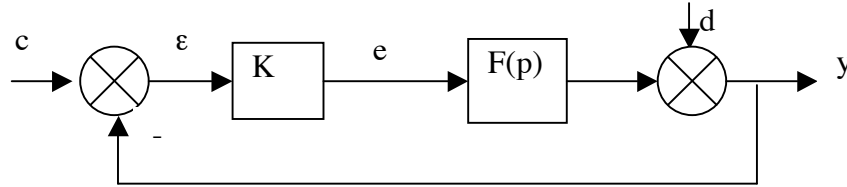


Figure 52: Régulateur Proportionnel

La commande $e(t)$ appliquée à l'actionneur s'écrit :

$$e(t) = K[c(t) - y(t)] = K \varepsilon(t) \quad (67.)$$

Une telle commande proportionnelle ne peut pas résoudre le dilemme stabilité/précision statique. En effet, la seule action possible d'un correcteur proportionnel sur le lieu de Black de boucle ouverte est une translation verticale. Une amélioration de la précision statique demande une augmentation du gain statique de boucle ouverte, donc de K , ce qui peut produire une diminution de la marge de phase, voire une déstabilisation de la boucle fermée.

Prenons l'exemple d'un système à régler représenté par un premier ordre et un retard, de fonction de transfert :

$$F(p) = F_0 \frac{\exp(-Tp)}{1 + \tau p} \quad (68.)$$

On peut calculer l'erreur statique de boucle fermée, en appliquant, par exemple, un échelon unitaire sur l'entrée de consigne :

$$r(t) = r \Gamma(t)$$

alors :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) &= \lim_{p \rightarrow 0} S(p) \\ &= \frac{1}{1 + K F_0} \end{aligned}$$

Il faut donc augmenter K pour améliorer la précision statique.

Pour analyser la stabilité de la boucle fermée, on peut utiliser le critère du revers dans le plan de Black-Nichols :

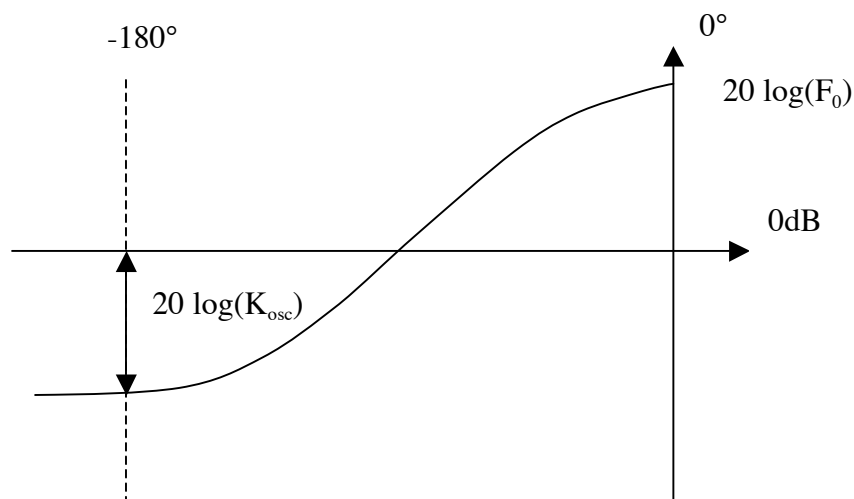


Figure 53: dilemme stabilité/précision statique

On ne peut donc pas augmenter le gain K au delà de la valeur K_{osc} sans déstabiliser la boucle fermée. On est même contraint à se limiter à $K_{osc}/2$ si on veut conserver une marge de gain de 6 dB.

La meilleure précision statique possible est donc limitée à :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \frac{1}{1 + F_0 \frac{K_{osc}}{2}} \quad (69.)$$

VI.2 Le régulateur à actions Proportionnelle et Intégrale (PI)

La structure de la boucle fermée de commande est représentée à la figure 53 :

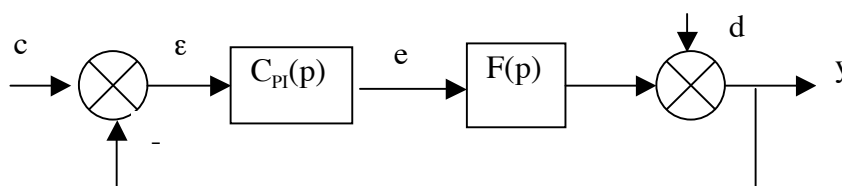


Figure 54: schéma fonctionnel de commande par PI

2.1 Structure, transmittance et réponse harmonique

Un régulateur à actions Proportionnelle et Intégrale (PI) élabore une commande conformément à la relation :

$$e(t) = K \left[\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\theta) d\theta \right] \quad (70.)$$

La transmittance s'obtient facilement :

$$C_{PI}(p) = K \frac{1 + T_i p}{T_i p} \quad (71.)$$

Le schéma fonctionnel est représenté à la figure 54.

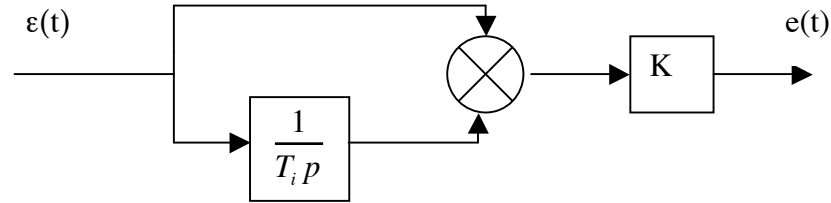


Figure 55: Schéma fonctionnel du régulateur PI

Pour étudier la réponse harmonique (diagramme de Bode), on utilise la transmittance isochrone :

$$C_{PI}(j\omega) = K \frac{1 + jT_i\omega}{jT_i\omega} \quad (72.)$$

En faisant le changement de variable $u = T_i\omega$, on peut tracer le diagramme de Bode de $\frac{1 + ju}{ju}$, en fonction de la pulsation réduite u :

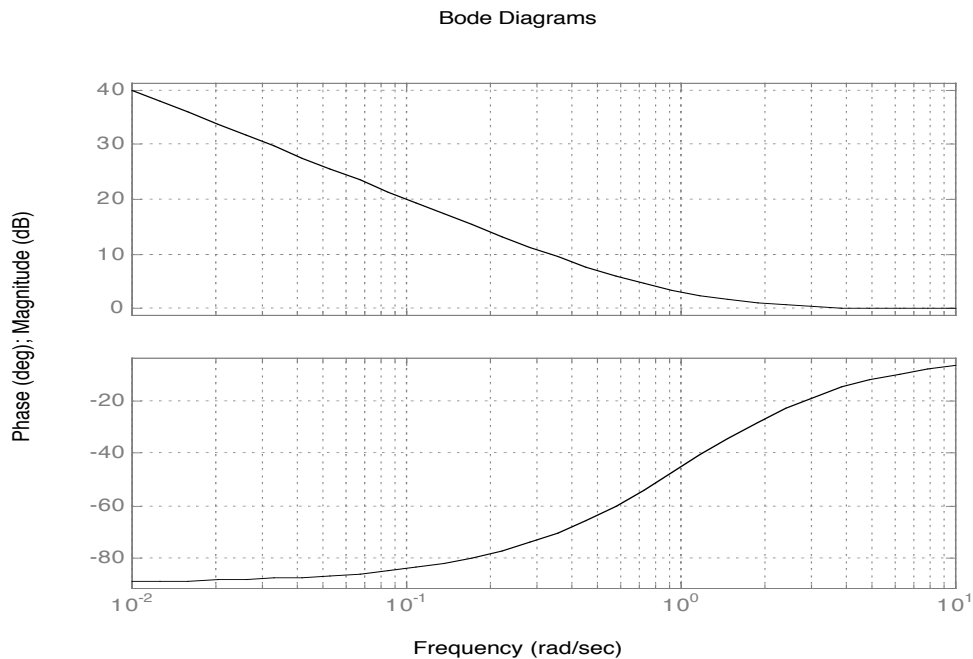


Figure 56: diagramme de Bode de $\frac{1 + ju}{ju}$ en pulsation réduite.

On peut relever les valeurs particulières suivantes :

en $u = 1$:

$$\begin{aligned} |C_{PI}(j1)|_{dB} &= 20\log K + 3 \\ \angle C_{PI}(j1) &= -45^\circ \end{aligned} \quad (73.)$$

en $u \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} |C_{PI}(ju)|_{dB} &\rightarrow \infty \\ \angle C_{PI}(ju) &\rightarrow -90^\circ \end{aligned} \quad (74.)$$

en $u = 3$:

$$\begin{aligned} |C_{PI}(j3)|_{dB} &\approx 20\log K + 1 \\ \angle C_{PI}(j3) &\approx -20^\circ \end{aligned} \quad (75.)$$

en $u \approx 12$

$$\begin{aligned} |C_{PI}(j12)|_{dB} &\approx 20\log K \\ \angle C_{PI}(j12) &\approx -5^\circ \end{aligned} \quad (76.)$$

en $u \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} |C_{PI}(j\infty)|_{dB} &\approx 20\log K & |C_{PI}(ju)|_{dB} &\rightarrow 20\log K \\ \angle C_{PI}(j\infty) &\approx 0^\circ & \angle C_{PI}(ju) &\rightarrow 0^\circ \end{aligned} \quad (77.)$$

2.2 Précision statique de la boucle fermée

On peut calculer l'erreur statique de boucle fermée, en appliquant, par exemple, un échelon unitaire sur l'entrée de consigne :

$$c(t) = c \cdot \Gamma(t)$$

alors :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) &= \lim_{p \rightarrow 0} S(p) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{1}{1 + K \frac{1 + T_i p}{T_i p} F(p)} \right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (78.)$$

L'erreur statique est donc nulle.

2.3 Méthodes fréquentielles de réglage

Le correcteur PI permet d'apporter du gain en basses fréquences, sans augmenter le déphasage en hautes fréquences. Le réglage consiste donc à déterminer les valeurs des paramètres K et T_i telles que la boucle ouverte vérifie les marges de phase ou de gain.

Soit par exemple une **marge de phase désirée de 60°** : il faut

1 chercher (par calcul ou mesure sur un lieu de Bode expérimental) ω_0 telle que

$$\angle F(j\omega_0) \approx -100^\circ$$

2 la relation (75) permet de **calculer** $T_i = \frac{3}{\omega_0}$, pour que le déphasage du PI soit de -20° à la pulsation ω_0 ;

3 calculer (ou mesurer sur un lieu de Bode expérimental) le module $|F(j\omega_0)|$, pour calculer le gain K :

$$K = \frac{1}{|F(j\omega_0)|}$$

On vérifie alors aisément que la pulsation au gain unité est ω_0 et que la marge de phase est de 60°

$$|C_{PI}(j\omega_0)F(j\omega_0)| \approx 1$$

$$\angle [C_{PI}(j\omega_0)F(j\omega_0)] \approx -120^\circ$$

Autre exemple : une **marge de phase désirée de 45°** :

1 chercher (par calcul ou mesure sur un lieu de Bode expérimental) ω_0 telle que

$$\angle F(j\omega_0) \approx -115^\circ$$

2 la relation (75) permet de **calculer** $T_i = \frac{3}{\omega_0}$, pour que le déphasage du PI soit de -20° à la pulsation ω_0 ;

3 calculer (ou mesurer sur un lieu de Bode expérimental) le module $|F(j\omega_0)|$, pour calculer le gain K :

$$K = \frac{1}{|F(j\omega_0)|}$$

On vérifie alors aisément que la pulsation au gain unité est ω_0 et que la marge de phase est de 45° :

$$|C_{PI}(j\omega_0)F(j\omega_0)| \approx 1$$

$$\angle [C_{PI}(j\omega_0)F(j\omega_0)] \approx -135^\circ$$

Méthode pour une **marge de gain désirée (M_G)_{dB}**: il faut

1 chercher (par calcul ou mesure sur un lieu de Bode expérimental) ω_0 telle que

$$\angle F(j\omega_0) \approx -175^\circ$$

2 la relation (76) permet de **calculer** $T_i = \frac{12}{\omega_0}$, pour que le déphasage du PI soit de -5° à la pulsation ω_0 ;

3 **calculer** (ou mesurer sur un lieu de Bode expérimental) le module $|F(j\omega_0)|_{dB}$, pour calculer le gain K :

$$K_{dB} = 20 \log K = -|F(j\omega_0)|_{dB} - (M_G)_{dB}$$

On vérifie alors aisément que la marge de gain est de $(M_G)_{dB}$:

$$|C_{PI}(j\omega_0)F(j\omega_0)|_{dB} \approx -(M_G)_{dB}$$

$$\angle[C_{PI}(j\omega_0)F(j\omega_0)] \approx -180^\circ$$

VI.3 Le régulateur Proportionnel et pseudo-intégral

Il s'agit d'un régulateur de transmittance :

$$C_{PPI}(p) = K \frac{1 + T_i p}{\frac{1}{b} + T_i p}, \text{ où } b > 1 \quad (79.)$$

On peut l'écrire aussi :

$$C_{PPI}(p) = K b \frac{1 + T_i p}{1 + b T_i p}, \text{ où } b > 1$$

3.1 Réponse harmonique

En posant $u = T_i \omega$, on obtient :

$$C_{PPI}(ju) = K b \frac{1 + ju}{1 + jbu}, \text{ où } b > 1$$

et on peut tracer le diagramme de Bode de $b \frac{1 + ju}{1 + jbu}$, ($b > 1$), en pulsation réduite (figure 56).

On remarque que lorsque $b \rightarrow \infty$, le régulateur proportionnel pseudo-intégral tend vers le proportionnel intégral.

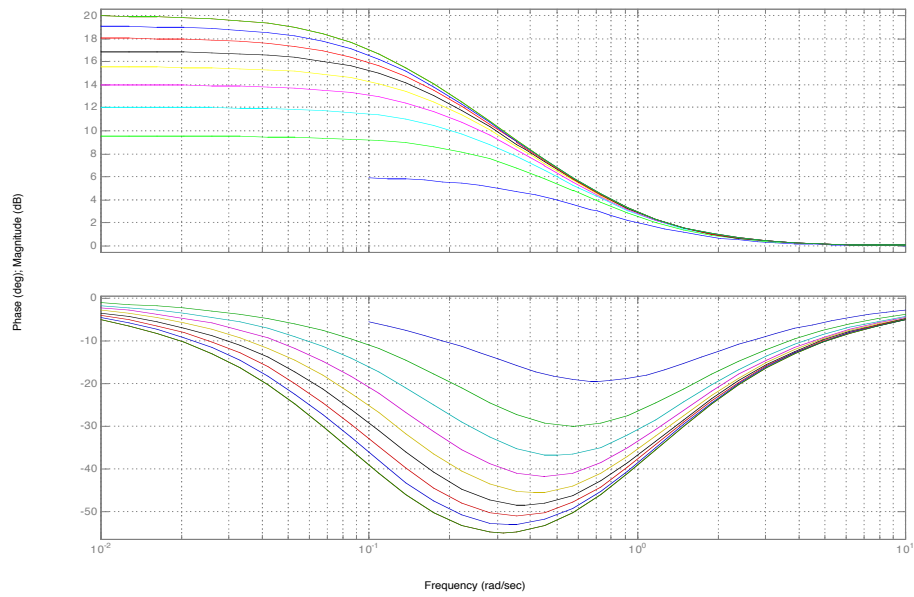


Figure 57: diagramme de Bode de $b \frac{1 + ju}{1 + jbu}$, ($b = 2, 3, \dots, 10$).

3.2 Précision statique de la boucle fermée

L'erreur finale de la réponse à un échelon unitaire s'écrit :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) &= \lim_{p \rightarrow 0} S(p) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{1}{1 + K \frac{1 + T_i p}{\frac{1}{b} + T_i p} F(p)} \right] \\ &= \frac{1}{1 + b K F_0} \end{aligned}$$

La précision est donc d'autant meilleure que b est grand.

VI.4 Le régulateur à actions Proportionnelle et Dérivée, ou à avance de phase.

4.1 Commande à retour tachymétrique

Exemple

Considérons l'exemple de l'antenne orientable, et son modèle que l'on écrit sous la forme :

$$F(p) = \frac{\alpha(p)}{U(p)} = \frac{F_0}{p(1 + \tau p)} \quad (80.)$$

La position angulaire de l'axe de l'antenne est mesurée par un potentiomètre diviseur de tension, et on place une dynamo tachymétrique sur l'axe de rotation de l'antenne. On dispose de mesures de position α et de vitesse Ω . On souhaite utiliser ces 2 mesures pour réaliser une commande selon le schéma fonctionnel de la figure 57 :

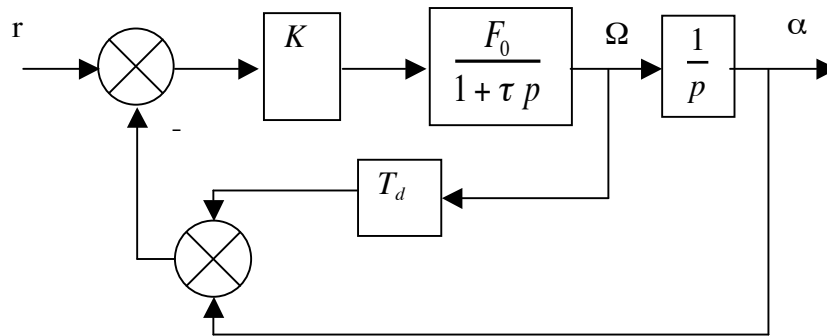


Figure 58: commande à retour tachymétrique.

La fonction de transfert de r vers α s'écrit :

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{\alpha(p)}{R(p)} \\ &= \frac{K \frac{F_0}{p(1 + \tau p)}}{1 + K \frac{F_0}{p(1 + \tau p)} (1 + T_d p)} \\ &= \frac{K F_0}{p(1 + \tau p) + K F_0 (1 + T_d p)} \end{aligned} \quad (81.)$$

que l'on peut mettre sous forme canonique :

$$H(p) = \frac{1}{1 + \frac{1 + K T_d F_0}{K F_0} p + \frac{\tau}{K F_0} p^2} \quad (82.)$$

On doit donc trouver les valeurs de K et T_d pour que le comportement dynamique de cette boucle fermée corresponde au cahier des charges.

Si le cahier des charges contient des spécifications sous forme :

d'une valeur souhaitée de pulsation propre ω_{nd} ,

d'une valeur souhaitée de facteur d'amortissement ζ_d ,

on doit réaliser le réglage :

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{K F_0} &= \frac{1}{\omega_{nd}^2} \Rightarrow K = \frac{\omega_{nd}^2 \tau}{F_0} \\ \frac{1 + K T_d F_0}{K F_0} &= \frac{2 \zeta_d}{\omega_{nd}} \Rightarrow T_d = \frac{2 \zeta_d \tau \omega_{nd} - 1}{\tau \omega_{nd}^2} \end{aligned} \quad (83.)$$

4.2 Correcteur à avance de phase

Souvent, il n'est pas possible de mesurer la dérivée de la sortie : on est alors amené à réaliser un (circuit électronique par exemple) qui "fabrique" un signal proche de la dérivée du signal de sortie.

Le régulateur à actions proportionnelle et dérivée que l'on souhaite réaliser vise à reproduire la commande à retour tachymétrique, donc la transmittance :

$$C_{PD\text{idéal}}(p) = K(1 + T_d p) \quad (84.)$$

En fait, seules les fonctions de transfert *propres*, c'est à dire dont le degré du dénominateur est supérieur ou égal au degré du numérateur, sont réalisables par systèmes physiques. Il faut donc incorporer au correcteur $C_{PD\text{idéal}}$ un dénominateur du 1^{er} ordre au moins, qui représente un filtre passe-bas :

$$C_{PD}(p) = K \frac{1 + T_d p}{1 + \tau_f p}, \tau_f < T_d \quad (85.)$$

Pour obtenir une forme connue, on pose :

$$T_d = \frac{\sqrt{a}}{\omega_0}, \tau_f = \frac{1}{\sqrt{a} \omega_0}$$

et on retrouve le correcteur à avance de phase :

$$C_{PD}(p) = K \frac{1 + \frac{\sqrt{a} p}{\omega_0}}{1 + \frac{p}{\omega_0 \sqrt{a}}}, a > 1 \quad (86.)$$

4.3 Méthode fréquentielle de réglage

La réponse harmonique du correcteur :

$$C_{PD}(j\omega) = K \frac{1 + j \frac{\omega \sqrt{a}}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0 \sqrt{a}}} \quad (87.)$$

s'écrit en pulsation réduite $u = \frac{\omega}{\omega_0}$:

$$C_{PD}(ju) = K \frac{1 + ju \sqrt{a}}{1 + j \frac{u}{\sqrt{a}}} \quad (88.)$$

On peut alors tracer un *abaque* des diagrammes de Bode de

$$C_{PD}(ju) = K \frac{1 + ju \sqrt{a}}{1 + j \frac{u}{\sqrt{a}}}, \text{ pour différentes valeurs du paramètre } a \text{ et } K = 1.$$

On peut calculer les valeurs particulières :

en $u = 1$:

$$\begin{aligned} |C_{PD}(j1)| &= K \sqrt{a} \\ |C_{PD}(j1)|_{dB} &= 20 \log(K) + 10 \log(a) \\ \angle C_{PD}(j1) &= \text{Arc tan}(\sqrt{a}) - \text{Arc tan}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) \\ &= 2 \text{Arc tan}(\sqrt{a}) - \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (89.)$$

en $u \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} |C_{PD}(ju)|_{dB} &\rightarrow 20 \log K \text{ dB} \\ \angle C_{PD}(ju) &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (90.)$$

en $u \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} |C_{PD}(ju)|_{dB} &\rightarrow (20 \log K + 20 \log a) \text{ dB} \\ \angle C_{PD}(ju) &\rightarrow 0^\circ \end{aligned} \quad (91.)$$

Le correcteur PD produit donc de l'avance de phase que l'on utilise pour augmenter la fréquence au gain unité de boucle ouverte (donc la bande passante de boucle fermée), tout en assurant une marge de phase spécifiée.

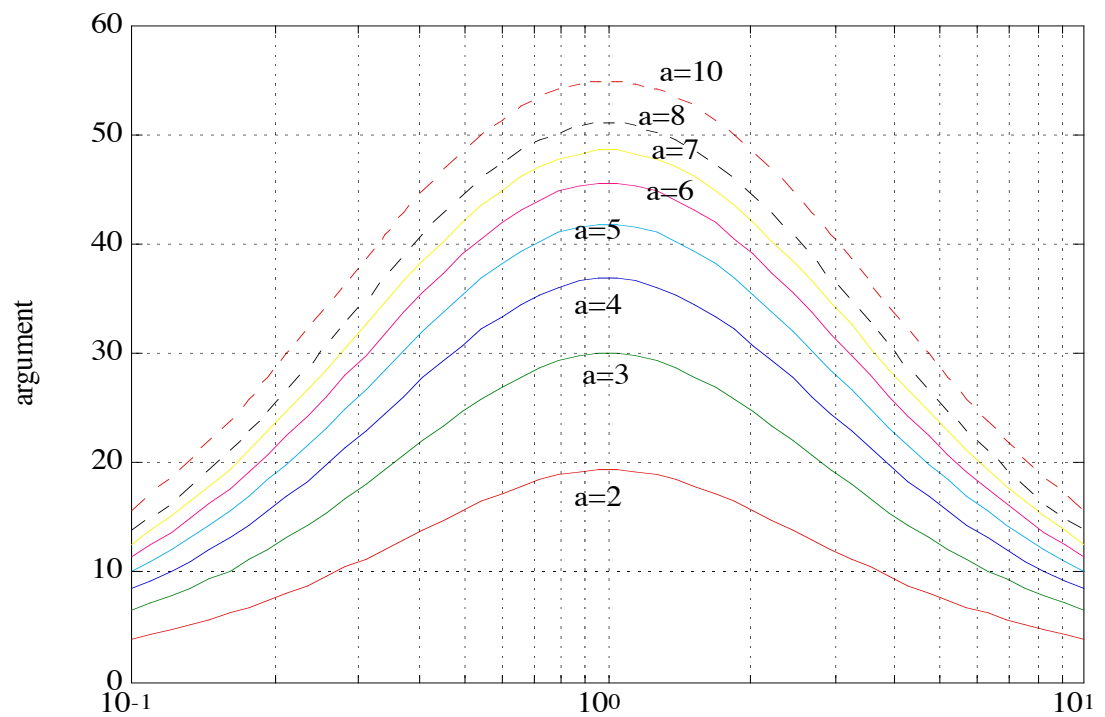
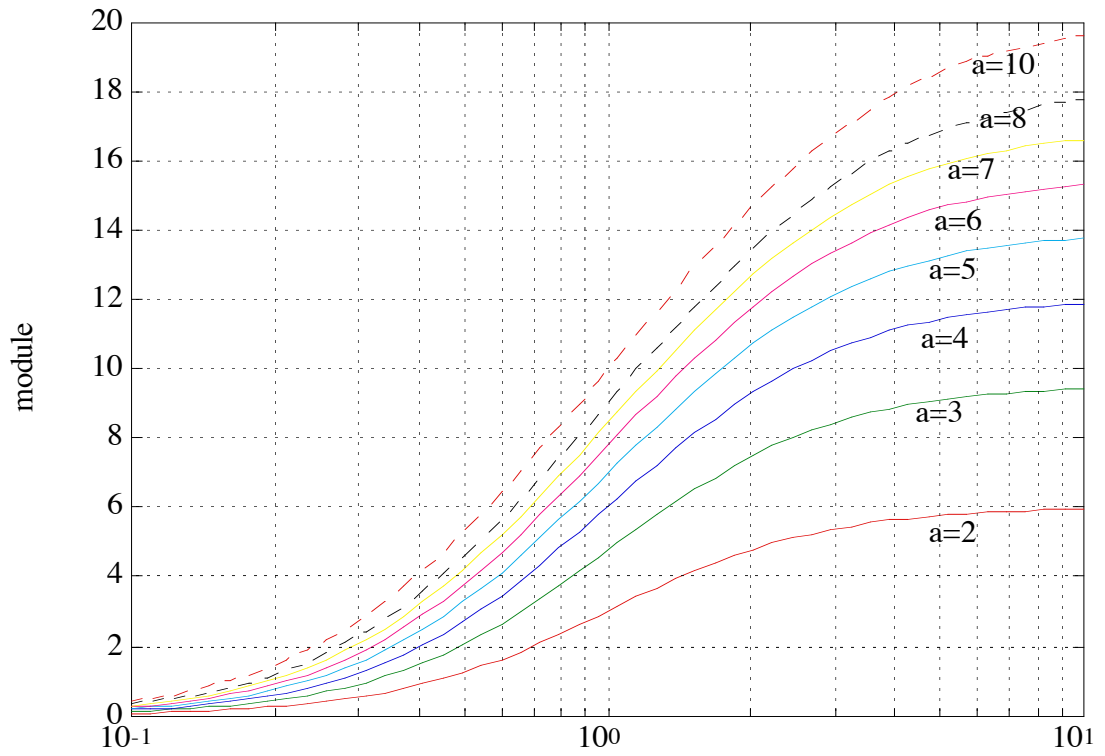


Figure 59: abaque des diagrammes de Bode de correcteurs à avance de phase, pour différentes valeurs de a ($a = 2, 3, \dots, 10$).

Soit par exemple à calculer les paramètres K , ω_0 et a d'un régulateur PD, pour que la boucle fermée ait **une bande passante supérieure à ω_{min}** , et que **la marge de phase soit M_φ** .

1. Pour que la bande passante soit supérieure à ω_{min} , on peut choisir ω_{min} comme pulsation au gain unité de boucle ouverte. On calcule (ou on mesure sur la réponse fréquentielle expérimentale) :

- le module $|F(j\omega_{min})|$
- l'argument $\angle F(j\omega_{min})$

2. Le correcteur à avance de phase devra apporter le maximum d'avance de phase à cette pulsation : on choisit donc $\omega_0 = \omega_{min}$.

Le coefficient a est déterminé en fonction de l'avance de phase nécessaire :

$$\begin{aligned}
 -\pi + M_\varphi &= \angle F(j\omega_{min}) + \angle C_{AP}(j\omega_{min}) \\
 \Rightarrow \angle C_{AP}(j\omega_{min}) &= M_\varphi - \pi - \angle F(j\omega_{min}) \quad (92.) \\
 \Rightarrow a &= \tan^2 \left[\frac{M_\varphi - \angle F(j\omega_{min}) - \frac{\pi}{4}}{2} \right]
 \end{aligned}$$

En général, il est plus simple et plus rapide de déterminer a en utilisant l'abaque de la figure 58.

Il faut enfin déterminer K :

$$K = \frac{1}{|F(j\omega_{min})|\sqrt{a}} \quad (93.)$$

VI.5 Le régulateur à action Proportionnelle, Intégrale et Dérivée (PID)

5.1 Structure et transmittance

Il s'agit de combiner les avantages des correcteurs PI et PD. La commande est donc :

$$e(t) = K \left[\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\theta) d\theta + T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right], K > 0, T_i > 0, T_d > 0 \quad (94.)$$

et sa transformée de Laplace :

$$E(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right) \varepsilon(p) \quad (95.)$$

En fait la dérivation pure ($T_d p$) n'est pas réalisable : il faut donc ajouter un filtre passe-bas pour pouvoir réaliser ce correcteur :

$$E(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i p} + \frac{T_d p}{1 + \tau_f p} \right) \varepsilon(p) \quad (96.)$$

Le schéma fonctionnel est donné à la figure 60.

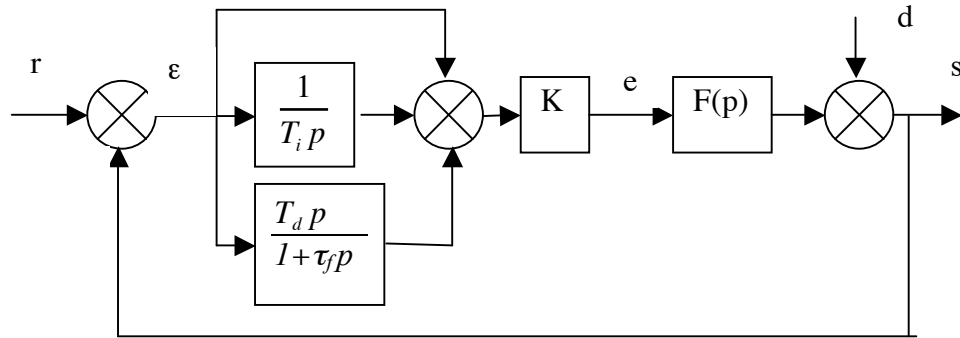


Figure 60: structure de régulateur PID.

On peut écrire cette transmittance sous la forme équivalente :

$$C_{PID}(p) = C_0 \frac{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}{p(1 + \tau_f p)}$$

5.2 Réponse harmonique

En régime sinusoïdal permanent :

$$C_{PID}(j\omega) = C_0 \frac{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_1}\right) \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_2}\right)}{(j\omega) \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_f}\right)} \quad (97.)$$

où :

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= 1/\tau_1 \\ \omega_2 &= 1/\tau_2 \\ \omega_f &= 1/\tau_f \end{aligned} \right\} ; \omega_1 < \omega_2 < \omega_f \quad (98.)$$

On remarque que cette transmittance peut s'écrire :

$$C_{PID}(j\omega) = C_1 \frac{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_i}\right) \left(1 + j \frac{\sqrt{a}\omega}{\omega_d}\right)}{\left(j \frac{\omega}{\omega_i}\right) \left(1 + j \frac{\omega}{\sqrt{a}\omega_d}\right)} \quad (99.)$$

où on a posé :

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{C_0}{\omega_i} \\ \omega_d &= \sqrt{a} \omega_2 \\ a &= \frac{\omega_f}{\omega_d} \end{aligned} \quad (100.)$$

Le régulateur PID peut donc s'écrire sous la forme de la mise en cascade d'un correcteur PI et d'un correcteur à avance de phase.

Le diagramme de Bode a l'allure de la figure 60 ci-dessous.

5.3 Réglage des paramètres.

Il faut donc régler successivement un PI et un AP. Un cas typique est :

- le système à régler est décrit par une fonction de transfert $F(p)$ ou un relevé expérimental de réponse fréquentielle (Bode),
- les spécifications de la boucle fermée sont :

précision statique parfaite en poursuite de consigne et en rejet de perturbation constante, donc le correcteur doit avoir une action intégrale,

bande passante supérieure à la valeur spécifiée, ω_{\min} ,

marge de phase supérieure à M_p .

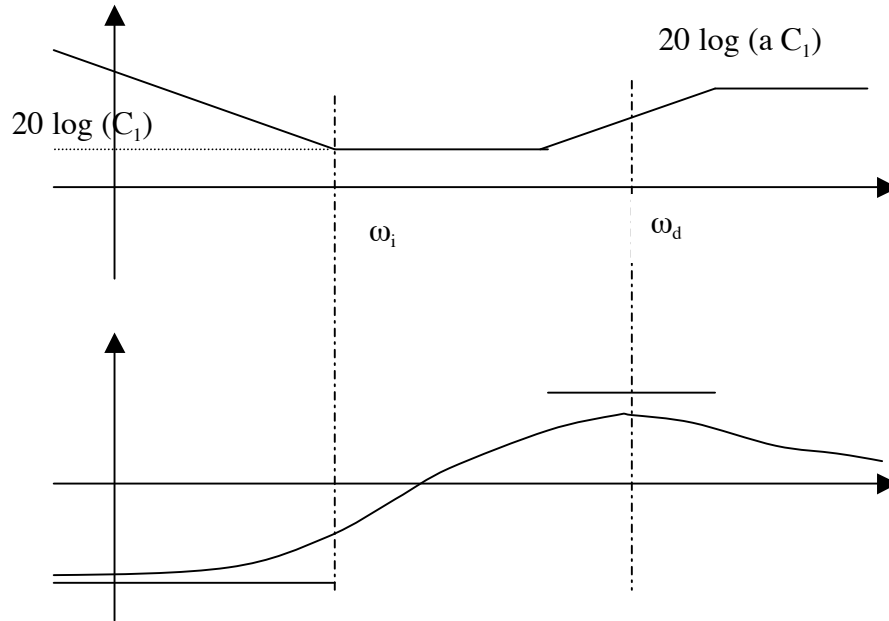


Figure 61: diagramme de Bode d'un PID.

La méthode de réglage se déroule en 5 étapes :

1^{ère} étape : On choisit ω_{\min} comme pulsation au gain unité de boucle ouverte, en s'assurant que le déphasage de $F(j\omega)$ ne dépasse pas (-180° à -200°), sinon le régulateur PID ne permettra pas d'atteindre les objectifs.

2^{ème} étape : On détermine la pulsation ω_i de telle façon que le PI n'apporte pas plus de -5° de déphasage à la pulsation ω_{\min} , c'est à dire, d'après la relation (76) :

$$\omega_i \approx \frac{\omega_{\min}}{12} ; \quad (101.)$$

3^{ème} étape : On calcule le paramètre a du correcteur à avance de phase, en choisissant $\omega_d = \omega_{\min}$. On doit alors vérifier :

$$-180^\circ + M_\varphi = \angle F(j\omega_{\min}) + \angle C_{PI}(j\omega_{\min}) + \angle C_{AP}(j\omega_{\min}) \quad (102.)$$

c'est à dire :

$$\angle C_{AP}(j\omega_{\min}) = -180^\circ + M_\varphi - \angle F(j\omega_{\min}) + 5^\circ \quad (103.)$$

On lit la valeur de a sur l'abaque de la figure 58, ou on calcule selon la formule :

$$a = \tan^2 \left(\frac{M_\varphi - \angle F(j\omega_{\min}) + 5^\circ}{2} - 45^\circ \right) \quad (104.)$$

4^{ème} étape : On détermine le gain C_1 tel que ω_{\min} soit la pulsation au gain unité, c'est à dire :

$$|F(j\omega_{\min})||C_{PI}(j\omega_{\min})||C_{AP}(j\omega_{\min})|C_1 = 1 \quad (105.)$$

donc

$$C_1 = \frac{1}{|F(j\omega_{\min})|\sqrt{a}} \quad (106.)$$

5^{ème} étape : Il reste à calculer les paramètres K , T_i , T_d et τ_f :

$$\begin{aligned} \tau_f &= \frac{1}{\omega_d \cdot \sqrt{a}} \\ T_i &= \frac{1}{\omega_i} + \frac{\sqrt{a}}{\omega_d} - \tau_f \\ T_d &= \frac{\sqrt{a}}{\omega_d \cdot \omega_i \cdot T_i} - \tau_f \\ K &= C_1 \cdot \omega_i \cdot T_i \end{aligned} \quad (107.)$$

5.4 Implantation des régulateurs PID

a. PID série

L'implantation se fait selon le schéma de la figure 62 :

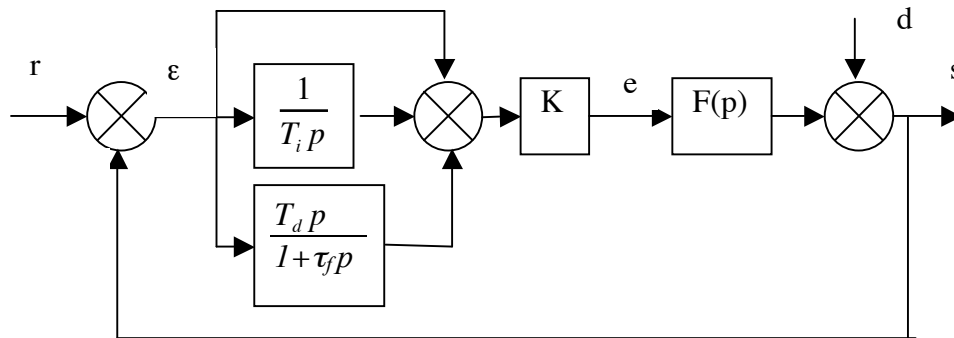


Figure 62:structure de PID série

b. PID série-parallèle

Pour ne pas introduire de « pics » de commande résultant de la dérivation des changements de consignes, on dispose le correcteur à avance de phase dans la chaîne de retour, selon la figure 63.

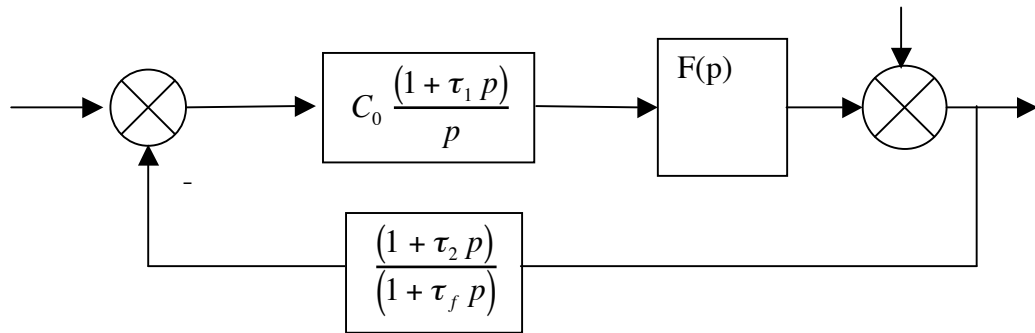


Figure 63: PID série-parallèle

c. autre structure :

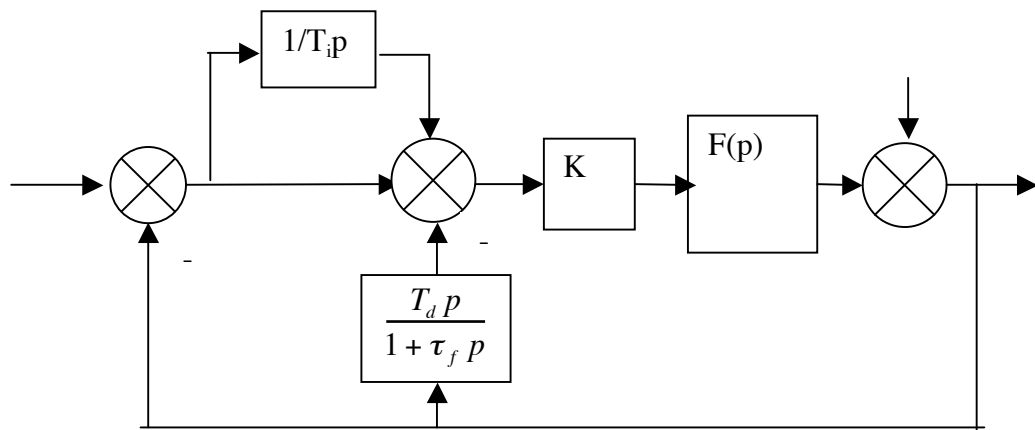


Figure 64: autre structure de PID

VI.6 Réglages empiriques de Ziegler-Nichols.

Soit le cas d'un système représenté par un premier ordre avec retard, c'est à dire une fonction de transfert du type :

$$F(p) = F_0 \frac{e^{-Tp}}{1 + \tau p} \quad (108.)$$

On peut effectuer une identification en boucle fermée à retour unitaire et régulateur proportionnel. En effet, le lieu de Black a l'allure de la figure 64, et on peut donc trouver une valeur du gain K pour lequel le lieu de boucle ouverte passe sur le point critique : la boucle fermée entre en oscillation.

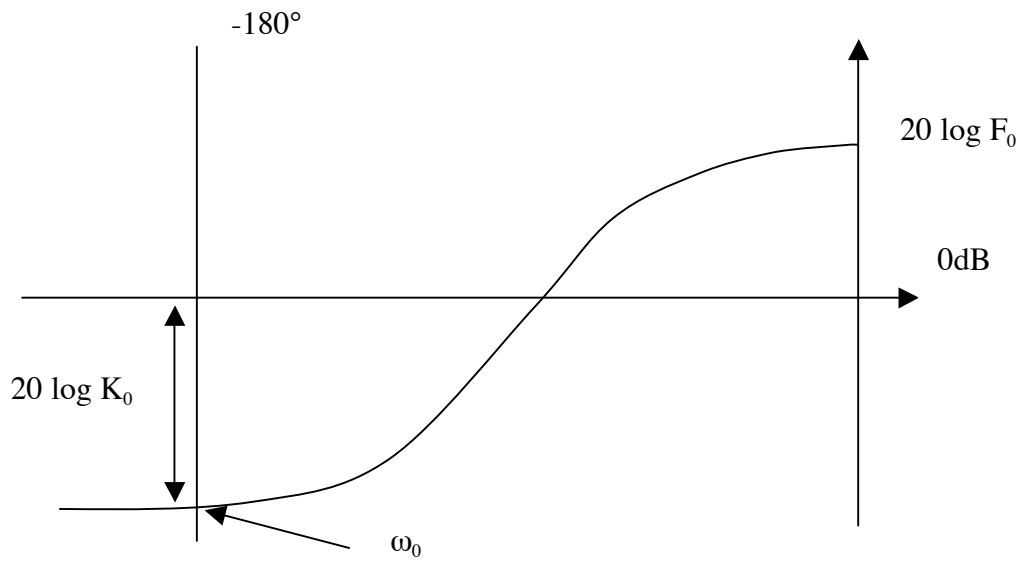


Figure 65: lieu de Black de système de 1^{er} ordre et retard.

On peut mesurer le gain K_0 , qui amène la boucle fermée en oscillation, et la période T_0 des oscillations.

On peut utiliser un régulateur PI, de la forme de l'équation (70), avec les réglages :

$$K = \frac{K_0}{2},$$

et

$$T_i = 0,8 T_0.$$

On obtient ainsi un réglage d'environ 45° de marge de phase et 6 dB de marge de gain.