

AUTOMATIQUE

Systemes linéaires numériques

(à temps discret)

B. Bergeon, Professeur

janvier 2014.

INTRODUCTION.....	4
I. ORGANES ET STRUCTURE DE LA COMMANDE NUMERIQUE.....	5
I.1. SCHEMA GENERAL.....	5
I.2. LE CONVERTISSEUR ANALOGIQUE-NUMERIQUE.....	5
I.3. LE CONVERTISSEUR NUMERIQUE-ANALOGIQUE.....	5
I.4. SPECTRE FREQUENTIEL DE SIGNAL ECHANTILLONNE.....	6
II. OUTILS DE MODELISATION DES SIGNAUX ET SYSTEMES ECHANTILLONNES.....	9
II.1. SEQUENCES NUMERIQUES ET TRANSFORMATION EN Z.....	9
II.2. THEOREMES FONDAMENTAUX ET PROPRIETES.....	10
1. <i>Linéarité</i>	10
2. <i>Translation</i>	10
3. <i>Valeur initiale</i>	10
4. <i>Valeur finale</i>	10
II.3. SYSTEME A TEMPS DISCRET, EQUATION RECURRENTE ET FONCTION DE TRANSFERT EN Z.....	10
II.4. TRANSMITTANCE EN Z DE SYSTEME ANALOGIQUE DISCRETISE.....	12
II.5. COMBINAISONS DE TRANSMITTANCES.....	14
1. <i>Cascade</i>	14
2. <i>Parallèle</i>	14
3. <i>Système bouclé</i>	15
II.6. REPRESENTATION FREQUENTIELLE ET TRANSFORMATION EN W.....	15
III. ANALYSE ET CARACTERISATION DES SYSTEMES A TEMPS DISCRET.....	19
III.1. STABILITE.....	19
III.2. LES SEQUENCES NUMERIQUES ELEMENTAIRES.....	20
1. <i>Impulsion</i>	20
2. <i>Echelon</i>	21
3. <i>Rampe</i>	21
III.3. SYSTEME DU 1 ^{ER} ORDRE.....	21
1. <i>Réponse impulsionnelle</i>	22
2. <i>Réponse indicielle</i>	22
3. <i>Réponse pseudo-fréquentielle</i>	23
III.4. INTEGRATEUR NUMERIQUE.....	24
1. <i>Réponse impulsionnelle</i>	24
2. <i>Réponse indicielle</i>	24
3. <i>Réponse pseudo-fréquentielle</i>	24
III.5. SYSTEME DU 1 ^{ER} ORDRE AVEC RETARD.....	25
IV. SPECIFICATION DE COMMANDE NUMERIQUE.....	27
IV.1. STABILITE DE BOUCLE FERMEE.....	27
IV.2. PRECISION ASYMPTOTIQUE.....	29
1. <i>Poursuite de consigne</i>	29
2. <i>Rejet de perturbation</i>	30
V. CONCEPTION DE REGULATEURS.....	33
V.1. CORRECTEUR PROPORTIONNEL ET INTEGRAL (PI).....	33
1. <i>Le schéma fonctionnel</i>	33
2. <i>La transmittance en z</i>	33
3. <i>L'équation récurrente</i>	33
4. <i>La transmittance en w et la réponse pseudo-fréquentielle</i>	33
5. <i>Méthode fréquentielle de réglage</i>	34
V.2. CORRECTEUR PROPORTIONNEL ET DERIVEE (PD OU AP).....	36
1. <i>Le schéma fonctionnel</i>	36
2. <i>La transmittance en z</i>	36
3. <i>L'équation récurrente</i>	36
4. <i>La transmittance en w et la réponse pseudo-fréquentielle</i>	36

V.3. LE CORRECTEUR A ACTIONS PROPORTIONNELLE, INTEGRALE ET DERIVEE (PID).....	38
1. <i>Le schéma fonctionnel</i>	38
2. <i>La transmittance en z</i>	38
3. <i>L'équation récurrente</i>	38
4. <i>La transmittance en w et la réponse pseudo-fréquentielle</i>	38
5. <i>Méthode de calcul de PID numérique</i>	40
V.4. PROBLEMES D'IMPLANTATION.....	42
1. <i>Structure série</i>	42
2. <i>Structure série-parallèle</i>	43
V.5. PLACEMENT DE POLES.....	45

INTRODUCTION

Depuis l'apparition et le développement des systèmes informatiques (micro-processeurs, micro-ordinateurs, micro-contrôleurs), leur utilisation en commande et régulation des systèmes industriels ne cesse de s'accroître.

Ce développement résulte essentiellement de la souplesse de réalisation des régulateurs numériques : la mise au point et le réglage consistent essentiellement à déterminer les coefficients d'une équation dite équation récurrente, qui constitue le cœur d'un programme de calcul exécuté en boucle par un processeur. Le coût de développement et de maintenance d'un tel régulateur est donc nettement plus avantageux que la réalisation de cartes analogiques spécifiques, nécessaires à la réalisation de régulateurs analogiques.

Cependant, le traitement numérique présente quelques différences importantes par rapport au traitement analogique:

- les valeurs des grandeurs physiques constituant les signaux analogiques doivent être représentées par des nombres;
- les opérations numériques réalisées par le processeur ne se font pas instantanément: il faut donc introduire la prise en compte de la durée du calcul.

En fait, vu d'un calculateur numérique, le temps ne peut pas s'écouler de façon continue tel qu'on le perçoit dans le monde physique. Le temps se définit sur un ensemble discret (ensemble dénombrable, isomorphe à l'ensemble des entiers) d'instants : les instants d'échantillonnage, séparés par un intervalle de temps régulier : la période d'échantillonnage.

Il est donc nécessaire de définir des outils mathématiques nouveaux, adaptés au temps discret, pour représenter ces signaux et systèmes échantillonnés, puis d'adapter les outils et méthodes de l'automatique analogique (à temps continu) à la conception de régulateurs numériques.

I. ORGANES ET STRUCTURE DE LA COMMANDE NUMERIQUE.

I.1. Schéma général.

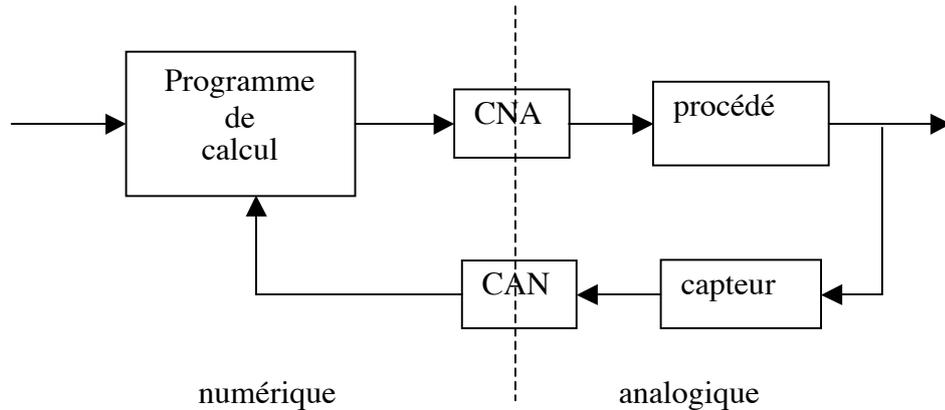


Figure 1- 1 : structure générale de commande numérique.

I.2. Le convertisseur analogique-numérique.

Il n'est pas question de décrire ici le principe de fonctionnement de ce composant, il est décrit dans le cours d'électronique.

On se contentera d'une description de sa fonction par un modèle abstrait idéal : l'échantillonneur.

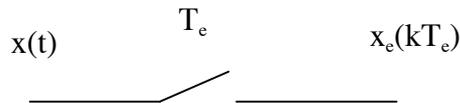


Figure 1- 2: l'échantillonneur.

Dans ce modèle idéal on néglige l'erreur de quantification: l'interrupteur se ferme pendant un temps infiniment court, et le nombre $x_e(kT_e)$ représente exactement la valeur du signal $x(t)$ à l'instant $t = kT_e$. Ce nombre est le poids d'une impulsion de Dirac:

$$x_e(kT_e) = x(t)\delta(t - kT_e) \quad 1- 1$$

Le signal échantillonné est une suite de nombres apparaissant à intervalles de temps réguliers : la période d'échantillonnage T_e . Cette suite de nombres est représentée par une séquence numérique:

$$\{x_e(kT_e)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(t)\delta(t - kT_e) \quad 1- 2$$

I.3. Le convertisseur numérique-analogique.

Pour le principe du fonctionnement, on se reportera au cours d'électronique.

La fonction du CNA est de transformer une suite cadencée de nombres (la séquence numérique) en un signal analogique, défini à temps continu. Le modèle le plus simple et le plus utilisé d'un tel système est le **bloqueur d'ordre zéro** (BOZ): il produit un signal électrique (tension) constant entre 2 instants d'échantillonnage, dont la valeur est celle du dernier nombre présent à l'entrée.



Figure 1- 3: Bloqueur d'ordre zéro.

Le signal $x(t)$ vérifie donc:

$$\forall t \in [kT_e, (k+1)T_e[, x(t) = x_e(kT_e) \quad 1- 3$$

I.4. Spectre fréquentiel de signal échantillonné.

On montre (voir cours d'électronique) que, si le signal analogique $x(t)$ a un spectre fréquentiel $X(\omega)$ de la forme de la figure 4 ci-dessous:

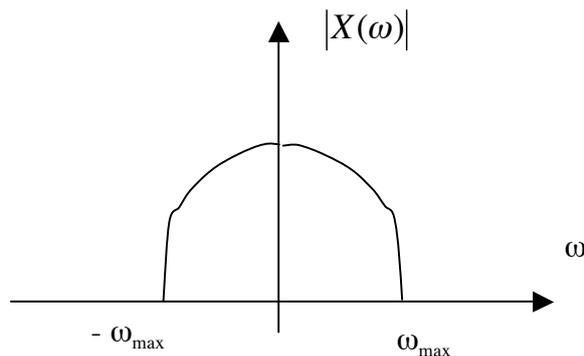


Figure 1- 4: spectre $X(\omega)$ du signal analogique

le spectre du signal échantillonné reproduit ce spectre autour de chaque multiple de la pulsation d'échantillonnage ω_e . Ces lobes multiples ne doivent pas se chevaucher si on veut pouvoir récupérer toute l'information originale du signal analogique: la pulsation d'échantillonnage doit donc respecter le théorème de Shannon.

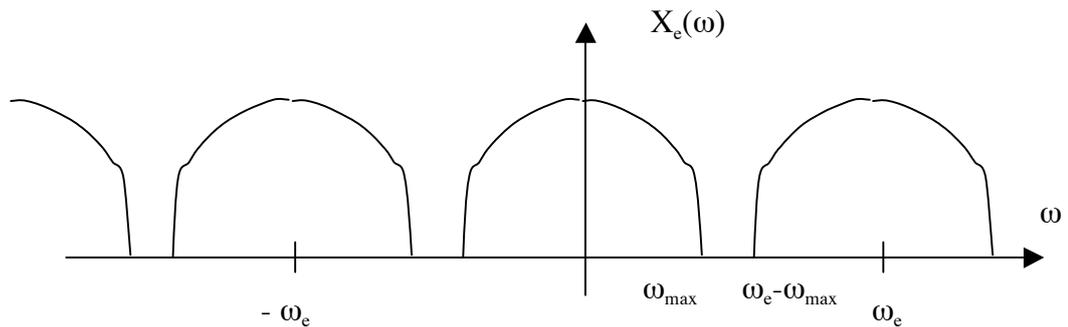


Figure 1- 5: spectre périodisé du signal échantillonné.

Théorème de Shannon: le signal échantillonné contient la même information spectrale que le signal analogique si et seulement si la pulsation (fréquence) d'échantillonnage est strictement supérieure à 2 fois la plus haute pulsation (fréquence) contenue dans le spectre analogique.

On voit en effet sur la figure 1-5, que 2 lobes successifs sont disjoints si et seulement si:

$$\omega_e - \omega_{\max} > \omega_{\max}, \text{ c'est à dire si et seulement si } \omega_e > 2 \omega_{\max} .$$

Il est souvent nécessaire d'utiliser un filtre anti-repliement avant l'échantillonneur (CAN) pour diminuer les recouvrements de spectres.

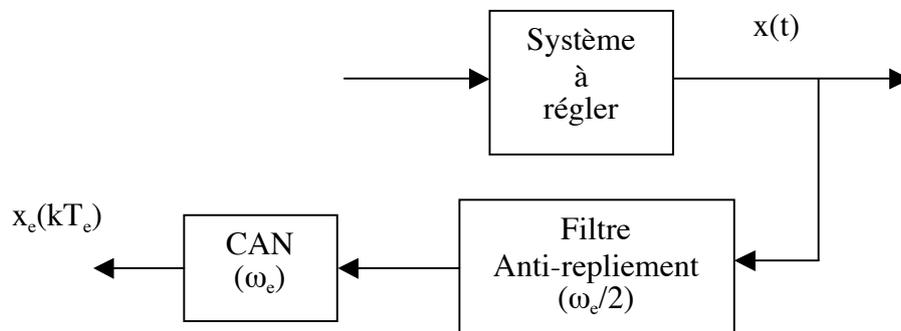


Figure 1- 6: Utilisation de filtre anti-repliement.

II. OUTILS DE MODELISATION DES SIGNAUX ET SYSTEMES ECHANTILLONNES.

II.1. Séquences numériques et transformation en z .

Le signal échantillonné est matérialisé, à l'intérieur du système informatique, par une suite de nombres, la séquence numérique $\{x_e(kT_e)\}$.

Remarque: On représentera dorénavant cette séquence par $\{x_k\}$:

$$x_k = x(t) \delta(t - k T_e),$$

$$\{x_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(t) \delta(t - k T_e). \quad 2- 1$$

On définit une transformation (qui est une transformation de Laplace particulière), appelée transformation en z (voir cours de mathématiques) :

$$\{x_k\} \xrightarrow{z} X(z),$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} \quad 2- 2$$

Dans la pratique, on utilise des tables de transformées en z . Celle que nous utilisons comporte 3 colonnes:

- la colonne centrale contient des expressions de fonctions du temps continu, définies pour $t > 0$, représentant des signaux analogiques;
- la colonne de gauche contient des fonctions de Laplace, qui sont les transformées des fonctions de la colonne centrale;
- la colonne de droite contient les transformées en z des séquences numériques obtenues par échantillonnage à période T_e des signaux analogiques représentés dans la colonne centrale.

$G(p)$	$g(t)$	$G(z)$
$e^{-kT_e p}$	$\delta(t - kT_e)$	z^{-k}
1	$\delta(t)$	1
$\frac{1}{p}$	$u(t)$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{p^2}$	t	$\frac{T_e z}{(z-1)^2}$
...

II.2. Théorèmes fondamentaux et propriétés.

Il s'agit de quelques rappels du cours de mathématiques.

1. Linéarité

$$\mathcal{Z}\{a x_k + b y_k\} = a X(z) + b Y(z) \quad 2- 3$$

2. Translation

Avance:

$$\mathcal{Z}\{x_{k+n}\} = z^n X(z) - z^n x_0 - z^{n-1} x_1 - \dots - z x_{n-1} \quad 2- 4$$

Retard

$$\mathcal{Z}\{x_{k-n}\} = z^{-n} X(z) \quad 2- 5$$

3. Valeur initiale

$$\lim_{k \rightarrow 0} x_k = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) \quad 2- 6$$

4. Valeur finale

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) X(z) \quad 2- 7$$

II.3. Système à temps discret, équation récurrente et fonction de transfert en z.

Un système est dit à **temps discret** si les signaux d'entrée et de sortie de ce système sont (ou sont représentables par) des **fonctions discrètes du temps**. C'est le cas, en particulier, des **signaux échantillonnés**.

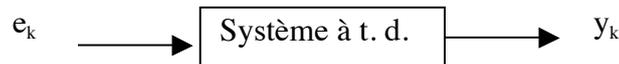


Figure 2- 1: Système à temps discret.

L'équation récurrente joue un rôle équivalent, dans l'étude des système à temps discret, à celui que joue l'équation différentielle dans l'étude des système à temps continu: c'est un **modèle mathématique** de la relation entre le **signal d'entrée à temps discret** et le **signal de sortie à temps discret** du système.

De façon formelle, l'équation récurrente d'un système à temps discret s'écrit:

$$y_{k+n} + a_{n-1} y_{k+n-1} + \dots + a_0 y_k = b_m e_{k+m} + b_{m-1} e_{k+m-1} + \dots + b_0 e_k \quad 2- 8$$

Si on compare cette équation (2-8) avec une équation différentielle on s'aperçoit:

- que les signaux à temps continu $e(t)$ et $s(t)$ sont remplacés par les signaux à temps discret $e(k T_e)$ et $y(k T_e)$;

- que les termes faisant intervenir des **dérivées par rapport au temps** des signaux à temps continu sont remplacés par des termes faisant intervenir des **décalages dans le temps** des signaux à temps discret.

Cette équation récurrente permet de calculer le terme de rang $k + n$ de la séquence de sortie, si on connaît tous les autres termes:

$$y_{k+n} = - a_{n-1} y_{k+n-1} - \dots - a_0 y_k + b_m e_{k+m} + b_{m-1} e_{k+m-1} + \dots + b_0 e_k \quad 2- 9$$

Exemple: programme permettant de calculer des revenus de placements bancaires; le problème des intérêts composés.

Vous disposez, le 1^{er} Janvier 2009, d'un capital de 1000 € à la caisse d'Epargne. Le taux de rémunération annuel étant de 2,5 % ; il s'agit d'écrire une équation permettant de modéliser l'évolution annuelle de votre capital.

La variable à étudier est bien une variable (signal) à temps discret si on cherche à évaluer le capital au 1^{er} Janvier de chaque année; la période d'échantillonnage (T_e) est alors de 1 an. Soit $Y(0 T_e)$ votre capital initial (1000 € au 1/01/2009), soit $Y(k T_e)$ votre capital au 1/01/(2009 + k ans); on peut écrire la relation de récurrence qui exprime votre capital au 1/01/(2009+k+1):

$$Y[(k + 1)T_e] = Y(k T_e) + 0,025 Y(k T_e);$$

ou encore:

$$Y[(k + 1)T_e] = 1,025 Y(k T_e).$$

Il est alors facile de calculer votre capital et son évolution.

La seule chose que nous ayons oubliée est la possibilité que vous apportiez vos économies, toujours le 1/01 de chaque année, ou que, au contraire, vous retiriez de l'argent. Appelons $E(k T_e)$ la somme (en grandeur algébrique: positive pour un apport, négative pour un retrait) correspondant à cette opération, alors:

$$Y[(k + 1)T_e] = 1,025 Y(k T_e) + E[(k+1) T_e].$$

On peut appliquer la transformation en z sur l'équation récurrente 2-8:

$$z^n Y(z) + a_{n-1} z^{n-1} Y(z) + \dots + a_0 Y(z) = b_m z^m E(z) + \dots + b_0 E(z) \quad 2- 10$$

On définit alors la fonction de transfert $G(z)$ du système à temps discret comme le rapport de la transformée en z de la séquence de sortie sur la transformée en z de la séquence d'entrée:

$$G(z) \triangleq \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0} \quad 2- 11$$

Le système à temps discret peut donc être représenté par un schéma fonctionnel:

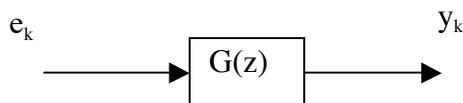


Figure 2- 2: Schéma fonctionnel de système à temps discret.

Remarque sur la causalité:

Le sens des flèches sur la figure 2-2 indique que e_k est la séquence d'entrée, y_k la séquence de sortie. Dans l'équation 2-9, le terme de rang $k+n$ de la séquence de sortie ne peut pas dépendre de termes futurs de la séquence d'entrée. Le terme de rang $k+m$ de la séquence d'entrée doit donc être antérieur à l'instant $k+n$:

$$(k + m \leq k + n) \Leftrightarrow (m \leq n)$$

Par conséquent, le degré du polynôme en z numérateur de la fonction de transfert $G(z)$, m , est toujours inférieur ou égal au degré du polynôme en z dénominateur, n . La fraction rationnelle $G(z)$ doit donc être *propre* pour représenter un système *causal*. Elle est *strictement propre* si $m < n$.

Remarque sur le gain statique:

Si la limite existe, le gain statique d'un système à temps discret est défini par:

$$G_0 = \frac{\lim_{k \rightarrow \infty} y_k}{\lim_{k \rightarrow \infty} e_k};$$

en appliquant le théorème de la valeur finale (relation 2-7), on obtient:

$$G_0 = \frac{\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)Y(z)}{\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) \quad 2-12$$

soit:

$$G_0 = \frac{\sum_{i=0}^m b_i}{1 + \sum_{i=0}^{n-1} a_i}. \quad 2-13$$

II.4. Transmittance en z de système analogique discrétisé.

Il s'agit de calculer la transmittance en z d'un système analogique, vu de l'entrée d'un CNA et de la sortie d'un CAN, selon la figure 2-3.

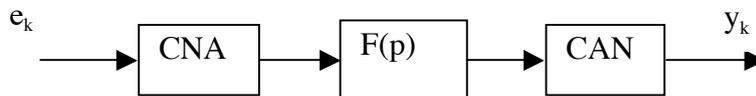


Figure 2- 3: système analogique discrétisé.

Pour calculer cette transmittance, il suffit de calculer la transformée en z de la séquence de sortie lorsque la séquence d'entrée est une impulsion de Dirac.

Le schéma de la figure 2-3 peut se transformer en celui de la figure 2-4:

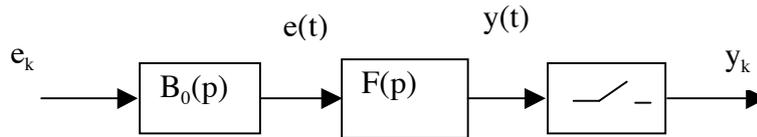


Figure 2- 4: Système analogique discrétisé.

On a vu que le bloqueur d'ordre zéro produit un signal analogique défini par la relation 1-3:

$$\forall t \in [kT_e, (k+1)T_e[, x(t) = x_e(kT_e)$$

ce qui donne ici, puisque e_k est une impulsion de Dirac:

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, T_e[, e(t) &= 1, \\ \forall t \notin [0, T_e[, e(t) &= 0. \end{aligned} \tag{2- 14}$$

soit $e(t) = \Gamma(t) - \Gamma(t - T_e)$, dont on peut déduire la transmittance du bloqueur d'ordre zéro :

$$B_0(p) = \frac{1 - e^{-T_e p}}{p} \tag{2- 15}$$

On peut alors exprimer la transformée de Laplace de la sortie $y(t)$ du système analogique:

$$Y(p) = \frac{1 - e^{-T_e p}}{p} F(p) \tag{2- 16}$$

Soit $y_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{F(p)}{p} \right\}$, alors :

$$\mathcal{L}^{-1} \{ Y(p) \} = y(t) = y_1(t) - y_1(t - T_e) \tag{2- 17}$$

La séquence de sortie du CAN est alors exprimée par:

$$y_k = y_{1k} - z^{-1} y_{1k},$$

où y_{1k} est la séquence qui correspond à l'échantillonnage du signal $y_1(t)$ à la période T_e .

La transmittance en z du système échantillonné s'écrit alors :

$$H(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \{ y_{1k} \}$$

ou encore, puisque y_{1k} est la séquence correspondant à l'échantillonnage de l'originale de $\frac{F(p)}{p}$:

$$H(z) = \left(\frac{z-1}{z} \right) Z \left\{ \frac{F(p)}{p} \right\} \quad 2- 18$$

II.5. Combinaisons de transmittances.

1. Cascade.

La mise en cascade de fonctions de transfert en z :

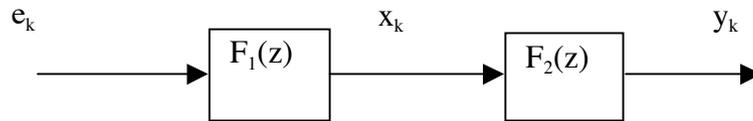


Figure 2- 5: cascade

$$F(z) = F_1(z) F_2(z) \quad 2- 19$$

Par exemple:

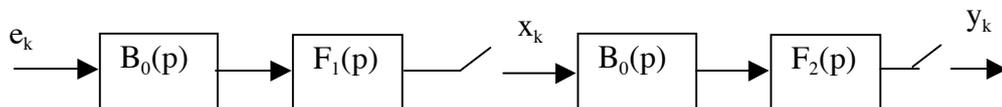


Figure 2- 6: cascade

$$F(z) = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{F_1(p)}{p} \right\} (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{F_2(p)}{p} \right\} \quad 2- 20$$

n Mais attention:

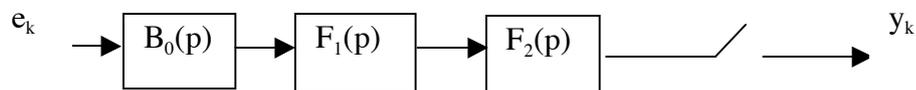


Figure 2- 7: cascade analogique

$$F(z) = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{F_1(p) F_2(p)}{p} \right\} \quad 2- 21$$

2. Parallèle

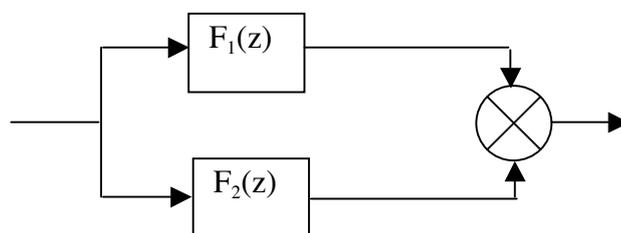


Figure 2- 8: combinaison parallèle

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z) \quad 2- 22$$

3. Système bouclé

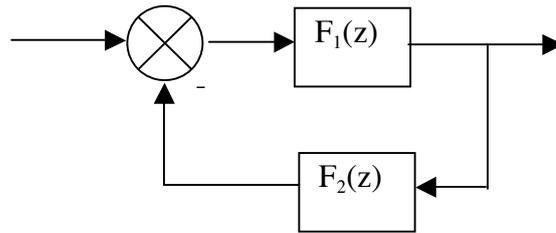


Figure 2- 9: système bouclé

$$G(z) = \frac{F_1(z)}{1 + F_1(z)F_2(z)} \quad 2- 23$$

II.6. Représentation fréquentielle et transformation en w .

Sur la table de transformée en z , on remarque que z correspond à un opérateur d'avance d'une période d'échantillonnage T_e , dont la transformée de Laplace en p serait $e^{T_e p}$. On peut donc obtenir une représentation fréquentielle des fonctions de transfert de systèmes à temps discret en remplaçant z par $e^{jT_e \omega}$ dans la fonction de transfert en z . Comme les séquences d'entrée et sortie représentent des signaux échantillonnés respectant le théorème de Shannon, il suffit de faire varier ω de 0 à $\frac{\omega_e}{2}$ pour obtenir la réponse harmonique complète.

Cette représentation n'est pas très commode, car:

- le calcul est relativement complexe,
- on ne retrouve pas les comportements asymptotiques usuels en analogique.

Pour ces raisons, on utilise plutôt une transformation bilinéaire basée sur un changement de variable:

$$w = \frac{2}{T_e} \frac{z - 1}{z + 1} \Leftrightarrow z = \frac{2 + wT_e}{2 - wT_e} \quad 2- 24$$

Cette transformation, connue sous le nom de transformation de Tustin, transforme:

- une fraction rationnelle $F(z)$ en une fraction rationnelle $F(w)$,
- le cercle défini par $z = e^{jT_e \omega}; \omega \in \left] -\frac{\omega_e}{2}, \frac{\omega_e}{2} \right[$ en l'axe imaginaire $w = jv; v \in]-\infty, \infty[$.

La variable v est alors une pseudo-pulsation, qui est reliée à la vraie pulsation ω par la relation:

$$v = \frac{2}{T_e} \tan\left(T_e \frac{\omega}{2}\right) \quad 2- 25$$

On peut établir facilement:

- si $\omega \rightarrow 0, v \rightarrow 0$
- et si $\omega \ll \frac{2}{T_e}$, alors $v \approx \omega$;

- si $\omega \rightarrow \frac{\pi}{T_e}$, alors $\nu \rightarrow \infty$;
- si $\omega = \frac{\omega_e}{4}$, alors $\nu = \frac{\omega_e}{\pi}$.

On peut utiliser cette pseudo-pulsation pour tracer des diagrammes de Bode, de Black ou de Nyquist, et les outils de calculs et de représentation des systèmes à temps continu sont utilisables.

Exemple

Soit un système analogique du 1^{er} ordre:

$$F(p) = \frac{k}{1 + \tau p}$$

échantillonné et bloqué:

$$G(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{k}{(1 + \tau p)p} \right\} = k \frac{z-1}{z} \frac{\left(1 - e^{-\frac{T_e}{\tau}}\right) z}{(z-1) \left(z - e^{-\frac{T_e}{\tau}}\right)}$$

Si on pose

$$a = e^{-\frac{T_e}{\tau}}$$

$$b = \left(1 - e^{-\frac{T_e}{\tau}}\right) k$$

alors:

$$G(z) = \frac{b}{z - a}$$

C'est une fonction de transfert du 1^{er} ordre en z .

En remplaçant z par $\frac{2 + wT_e}{2 - wT_e}$ on obtient après quelques calculs élémentaires:

$$G(w) = k \frac{1 - \frac{T_e}{2} w}{1 + \frac{T_e}{2} \left(\frac{1+a}{1-a}\right) w}$$

Remarques

1. Le gain statique est conservé;

• le système à temps continu:

$$F(0) = \lim_{p \rightarrow 0} F(p) = k$$

- le système échantillonné-bloqué:

$$G(1) = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) = k$$

- la transmittance en w :

$$G(0) = \lim_{w \rightarrow 0} G(w) = k$$

2. L'ordre des fonctions de transfert est conservé;

3. Pour la fonction de transfert en w , le degré du numérateur est égal au degré du dénominateur. C'est un résultat général, qui devra toujours être vérifié.

Réponse pseudo-fréquentielle

On peut calculer:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} G(j\nu) = \frac{b}{1+a} = k \frac{1-a}{1+a}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow \infty} \angle G(j\nu) &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left\{ \text{Arc tan} \left(-\frac{T_e}{2} \nu \right) - \text{Arc tan} \left(\frac{(1+a)T_e}{2(1-a)} \nu \right) \right\} \\ &= -180^\circ \end{aligned}$$

Application numérique :

$$k = 10$$

$$\tau = 2s$$

$$T_e = 0,1s$$

$$F(p) = \frac{10}{1+2p}$$

$$G(z) = \frac{0,04877}{z - 0,9512}$$

$$G(w) = \frac{4,999 - 0,2499w}{w + 0,4999}$$

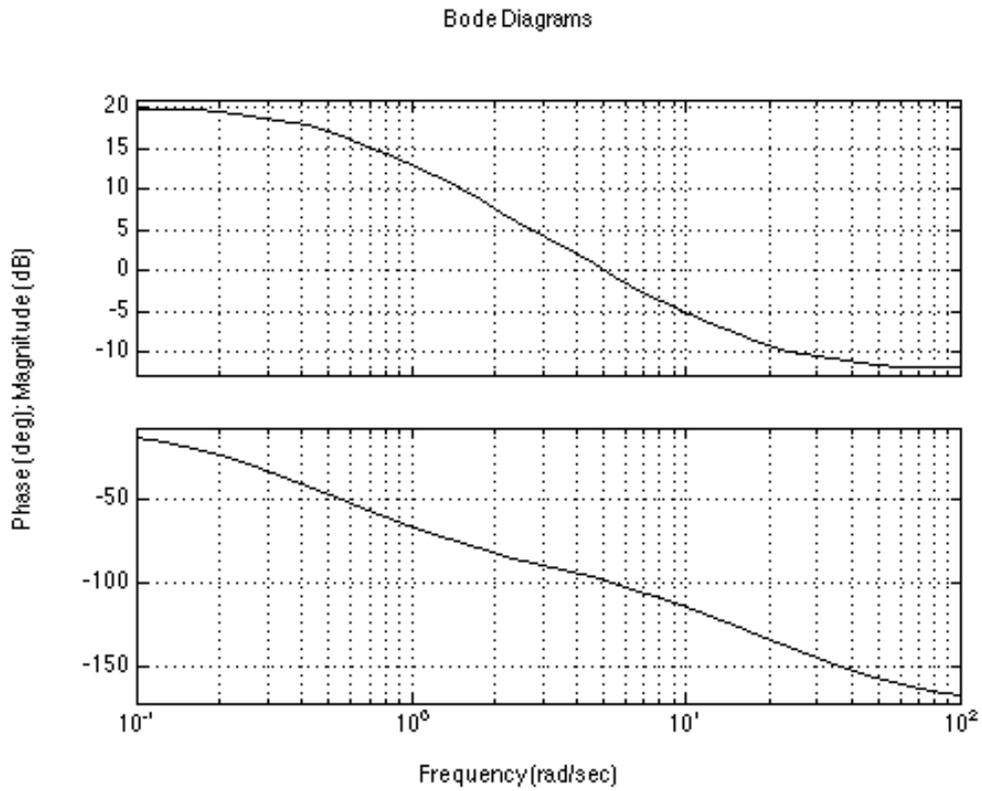


Figure 2- 10: Diagramme de Bode de réponse en pseudo-pulsation d'un système à temps discret du 1^{er} ordre.

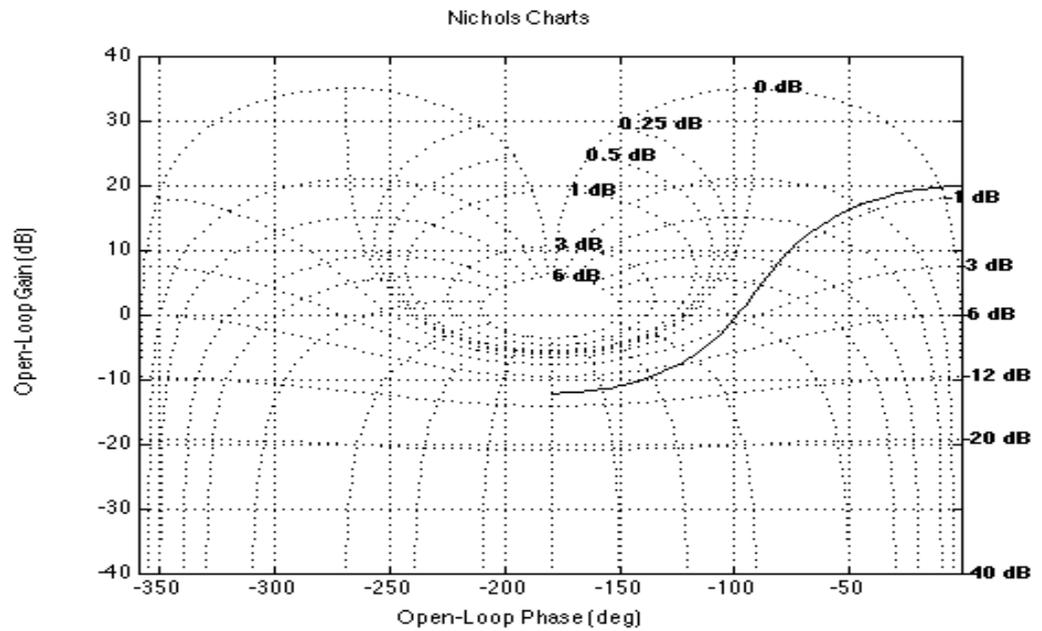


Figure 2- 11 : Diagramme de Black de réponse en pseudo-pulsation d'un système à temps discret du 1^{er} ordre.

III. ANALYSE ET CARACTERISATION DES SYSTEMES A TEMPS DISCRET.

III.1. Stabilité.

Définition

Un système à temps discret est asymptotiquement stable si et seulement si la séquence de sortie en réponse à une impulsion tend asymptotiquement vers zéro.

Soit le système à temps discret du 1^{er} ordre:

$$G(z) = \frac{b}{z - a} \quad 3-1$$

où b est positif. On peut écrire:

$$zY(z) - aY(z) = bE(z) \quad 3-2$$

et en déduire l'équation récurrente:

$$y_{k+1} - ay_k = be_k \quad 3-3$$

ou encore

$$y_{k+1} = ay_k + be_k \quad 3-4$$

En fixant:

$$y_k = 0, \forall k \leq 0,$$

$$e_k = 1 \text{ si } k = 0$$

$$e_k = 0 \text{ si } k \neq 0$$

on peut calculer la réponse impulsionnelle en résolvant l'équation récurrente pas à pas:

$$y_1 = ay_0 + be_0 = a.0 + b.1 = b$$

$$y_2 = ay_1 + be_1 = a.b + b.0 = ab$$

$$y_3 = ay_2 + be_2 = a.ab + b.0 = a^2b$$

...

$$y_{k+1} = ay_k + be_k = a.a^{k-1}b + b.0 = a^k b$$

...

Le système est donc stable si et seulement si:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \lim_{k \rightarrow \infty} a^{k-1} b = 0$$

c'est à dire si et seulement si $|a| < 1$

On en déduit le théorème suivant:

Théorème

Une fonction de transfert en z est asymptotiquement stable si et seulement si tous ses pôles ont un module strictement inférieur à 1.

Dans le plan complexe, le domaine des pôles de module strictement inférieur à 1 est l'intérieur du cercle de rayon 1, centré à l'origine:

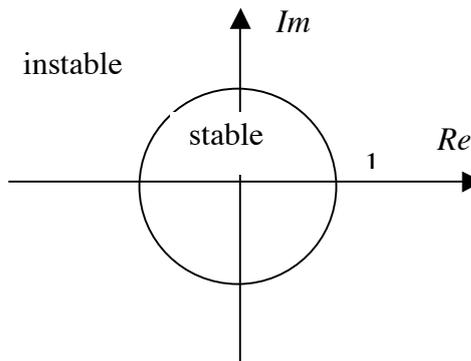


Figure 3- 1: Domaine des pôles stables

Remarque

La transformation en w transforme le cercle de rayon 1, centré à l'origine du plan complexe en axe imaginaire : l'intérieur du cercle devient le 1/2 plan ouvert gauche:

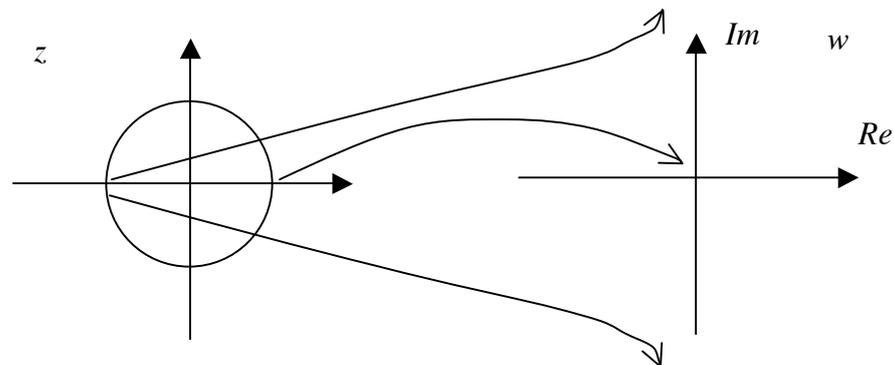


Figure 3- 2: Transformation $z-w$.

Le système à temps discret représenté par une fonction de transfert en w est stable si et seulement si tous les pôles de cette fonction de transfert en w sont dans le 1/2 plan gauche, donc à partie réelle négative.

Tous les théorèmes et critères de stabilité des systèmes à temps continu sont donc utilisables sur les fonctions de transfert en w des systèmes à temps discret.

III.2. Les séquences numériques élémentaires.

1. Impulsion

Il s'agit de la séquence résultant de l'échantillonnage d'une impulsion de Dirac. D'après la relation 1-1:

$$\delta_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases} \quad 3- 5$$

D'après la définition 2-2 de la transformation en z on peut écrire:

$$\begin{aligned} Z\{\delta_k\} &= \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k z^{-k} \\ &= 1 \end{aligned} \quad 3- 6$$

2. Echelon

D'après 2-1:

$$\begin{aligned}\{\Gamma_k\} &= \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma(t) \delta(t - k T_e) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k T_e)\end{aligned}\tag{3-7}$$

c'est à dire:

$$\Gamma_k = 1 \text{ si } k \geq 0\tag{3-8}$$

La transformée en z de l'échelon:

$$\begin{aligned}Z\{\Gamma_k\} &= \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma_k z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \\ &= \frac{z}{z-1}, \text{ si } |z| > 1.\end{aligned}\tag{3-9}$$

3. Rampe

$$\begin{aligned}\{r_k\} &= \sum_{k=0}^{\infty} r(t) \delta(t - k T_e) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} t \delta(t - k T_e)\end{aligned}\tag{3-10}$$

$$r_k = k T_e \text{ si } k \geq 0\tag{3-11}$$

$$\begin{aligned}Z\{r_k\} &= \sum_{k=0}^{\infty} r_k z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k T_e) z^{-k} \\ &= \frac{T_e z}{(z-1)^2}, \text{ si } |z| > 1.\end{aligned}\tag{3-12}$$

III.3. Système du 1^{er} ordre.

C'est un système dont la fonction de transfert en z est de la forme:

$$F(z) = \frac{b}{z-a}\tag{3-13}$$

stable si et seulement si $|a| < 1$.

Il peut s'agir du résultat de l'échantillonnage d'un système analogique du 1^{er} ordre, ou d'un système purement numérique (équation récurrente programmée sur ordinateur, ...).

L'équation récurrente décrivant l'évolution de la séquence de sortie en fonction de la séquence d'entrée:

$$y_{k+1} = ay_k + be_k \quad 3- 14$$

1. Réponse impulsionnelle

C'est la séquence de sortie résultant d'une entrée en impulsion. On peut la calculer de façon itérative à partir de l'équation de récurrence (§ III.1.) ou par la transformation en z :

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{b}{z-a} \\ &= bz^{-1} \frac{z}{z-a} \end{aligned}$$

$$y_k = ba^{k-1} \text{ si } k > 0 \quad 3- 15$$

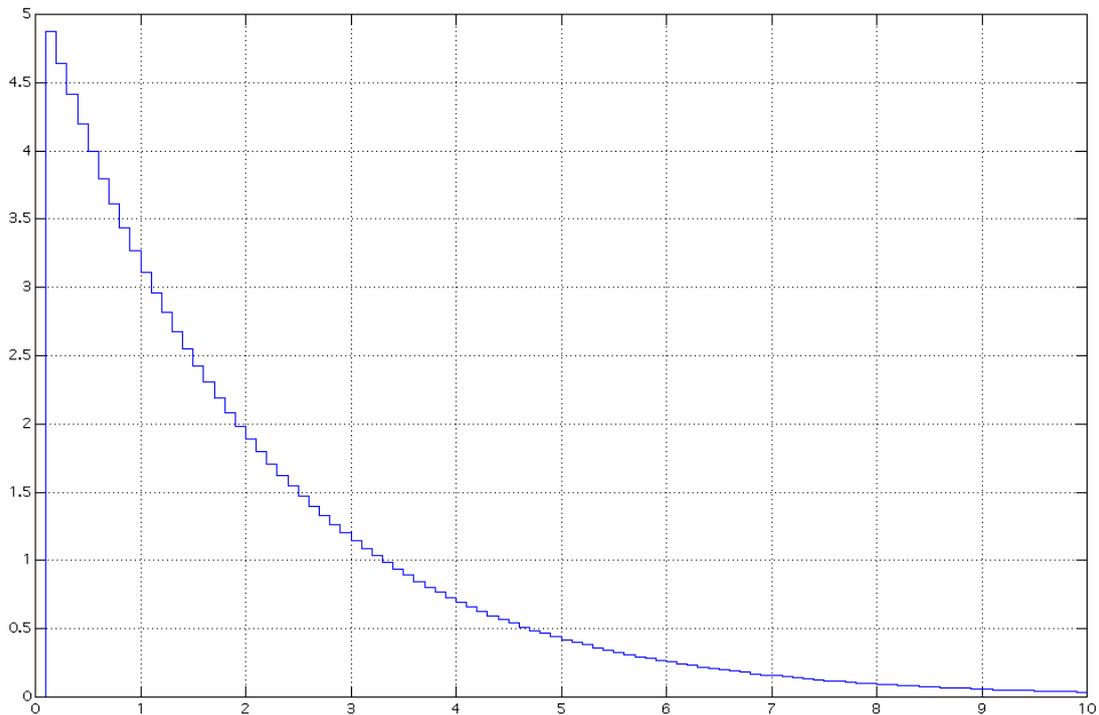


Figure 3- 3: Réponse impulsionnelle pour $b = 0.4877$ et $a = -0.9512$.

2. Réponse indicielle

$$Y(z) = \frac{b}{z-a} \frac{z}{z-1} \quad 3- 16$$

$$y_k = \frac{b}{1-a}(1-a^k); k > 0 \quad 3-17$$

ou par récurrence:

$$y_1 = ay_0 + be_0 = a.0 + b.1 = b$$

$$y_2 = ay_1 + be_1 = a.b + b.1 = (1+a)b$$

$$y_3 = ay_2 + be_2 = a(1+a)b + b.1 = (1+a+a^2)b$$

...

3-18

$$y_k = ay_{k-1} + be_{k-1} = \frac{b(1-a^k)}{1-a}$$

...

On remarque que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \frac{b}{1-a}$$

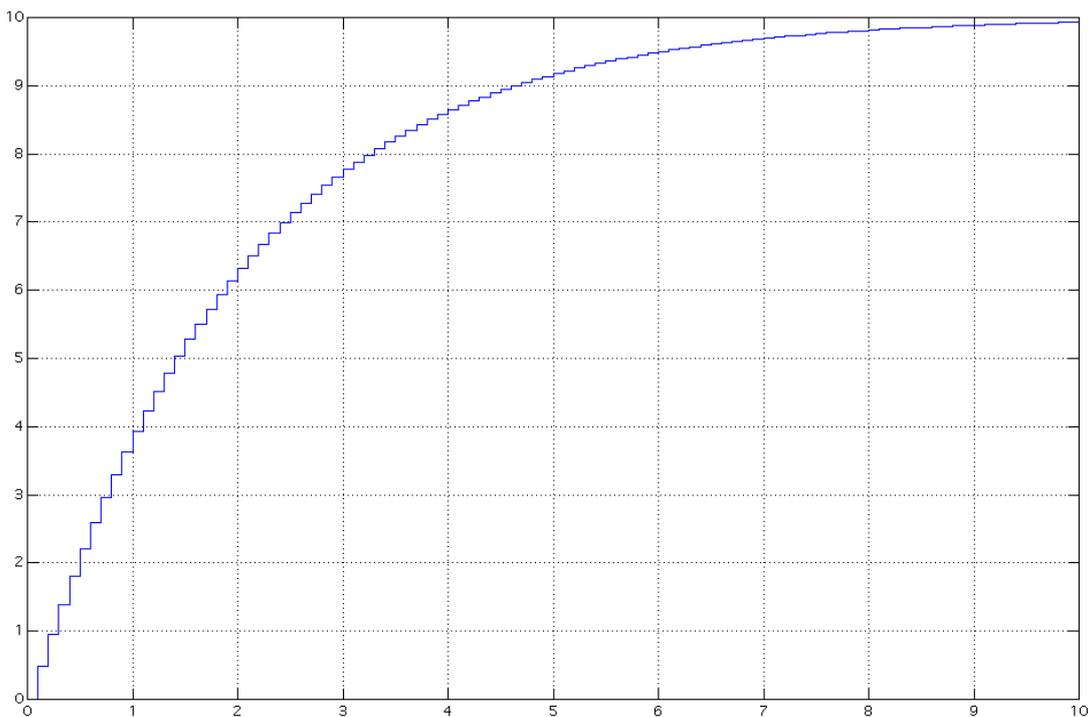


Figure 3- 4: Réponse indicielle pour $b = 0.4877$ et $a = -0.9512$.

3. Réponse pseudo-fréquentielle.

En appliquant le changement de variable de la relation 2-24, on obtient :

$$G(w) = \frac{4,999 - 0,2499w}{w + 0,4999},$$

et le diagrammes de Bode et Black des figures 2-10 et 2-11.

III.4. Intégrateur numérique.

C'est un cas particulier de système du 1^{er} ordre pour lequel $a = 1$:

$$G(z) = \frac{b}{z - 1} \quad 3- 19$$

L'équation récurrente s'écrit:

$$y_k = y_{k-1} + b e_{k-1} \quad 3- 20$$

La solution générale:

$$y_k = \sum_{n=0}^{k-1} b e_n \quad 3- 21$$

1. Réponse impulsionnelle

$$y_k = b; \forall k > 0 \quad 3- 22$$

2. Réponse indicielle

$$y_k = \sum_{n=0}^{k-1} b = (k - 1)b \quad 3- 23$$

3. Réponse pseudo-fréquentielle

$$G(w) = \frac{b \left(1 - \frac{T_e}{2} w \right)}{T_e w} \quad 3- 24$$

Le diagramme de Bode pour $b = 1$:

$$G(j\nu) = \frac{10 - 0,5j\nu}{j\nu}$$

Bode Diagrams

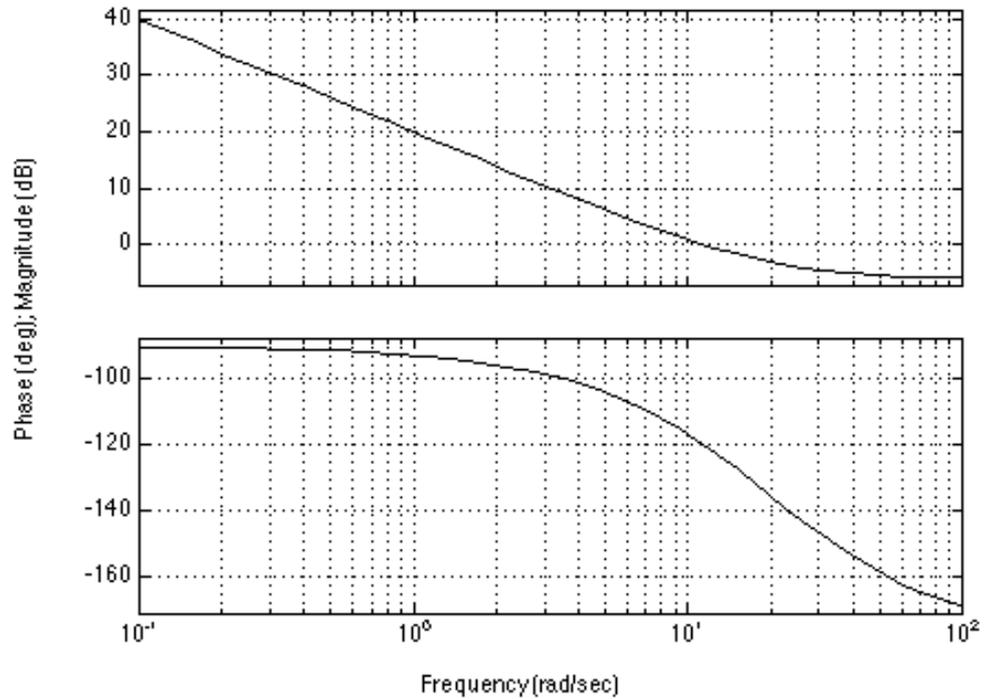


Figure 3- 5: Diagramme de Bode d'un intégrateur numérique, en pseudo-pulsation.

III.5. Système du 1^{er} ordre avec retard.

Soit un système à temps continu, du 1^{er} ordre et retardé de θ secondes:

$$F(p) = \frac{k}{1 + \tau p} e^{-\theta p} \quad 3- 25$$

Ce système est discrétisé par un CNA et un CAN, de période T_e :

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{k e^{-\theta p}}{p(1 + \tau p)} \right\} \quad 3- 26$$

On suppose que le retard est un multiple de la période d'échantillonnage:

$$\theta = r T_e; r \in \mathbb{N}$$

alors:

$$G(z) = z^{-r} \frac{b}{z - a} \quad 3- 27$$

La réponse en pseudo-pulsation:

$$G(w) = \left(\frac{1 - \frac{T_e}{2} w}{1 + \frac{T_e}{2} w} \right)^r k \frac{1 - \frac{T_e}{2} w}{1 + \frac{T_e}{2} \frac{1+a}{1-a} w} \quad 3-28$$

or, si $w = jv$:

$$\left| \frac{1 - \frac{T_e}{2} jv}{1 + \frac{T_e}{2} jv} \right|^r = 1, \quad 3-29$$

$$\angle \left(\frac{1 - \frac{T_e}{2} jv}{1 + \frac{T_e}{2} jv} \right)^r = -2r \operatorname{Arctan} \left(\frac{T_e}{2} v \right)$$

d'où le diagramme de Bode suivant, pour $r = 3$:

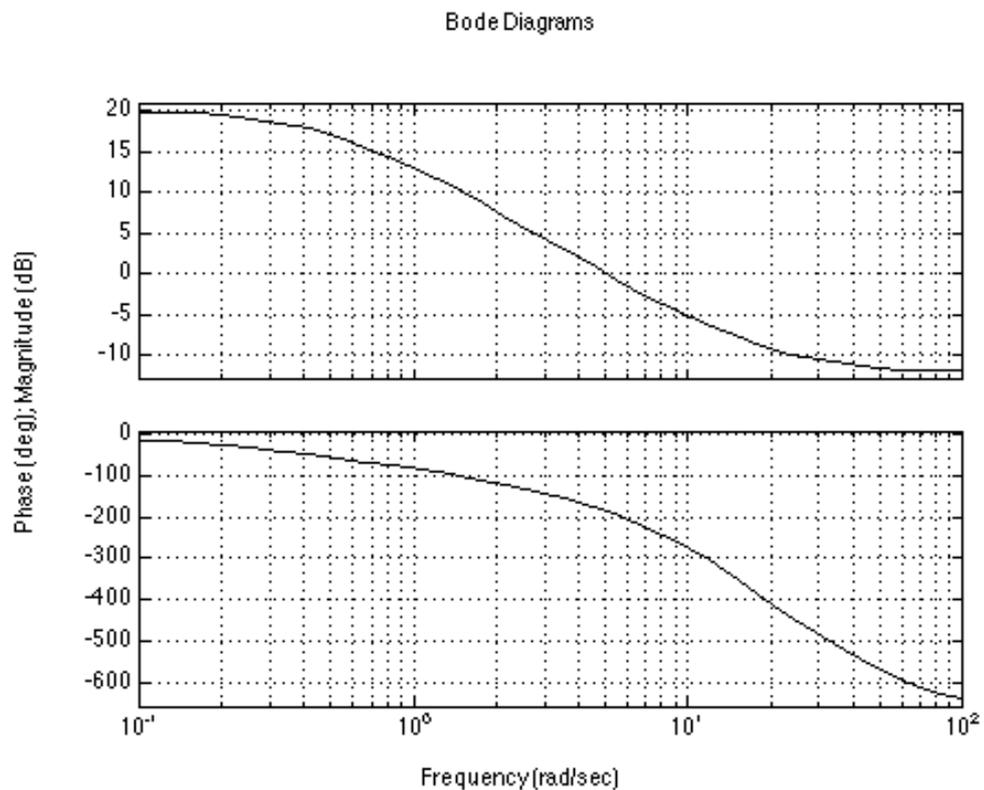


Figure 3- 6: Diagramme de Bode de 1^{er} ordre retardé de 3 périodes.

IV. SPECIFICATION DE COMMANDE NUMERIQUE.

IV.1. Stabilité de boucle fermée

Le système à régler est un système analogique, donc à temps continu, discrétisé par CNA et CAN, et commandé par un calculateur numérique sur lequel est exécuté, en temps réel, un programme de calcul, sous la forme d'une équation récurrente, représentée par une transmittance en z , selon le schéma de la figure 4-1 ci-dessous:

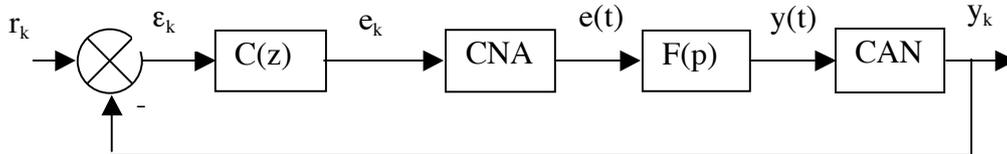


Figure 4- 1: Schéma de commande numérique en boucle fermée.

Le système à régler échantillonné est représenté par sa transmittance en z , calculée selon la relation 2-18 :

$$G(z) = \left(\frac{z-1}{z} \right) Z \left\{ \frac{F(p)}{p} \right\} \quad 4- 1$$

On dessine le schéma fonctionnel équivalent:

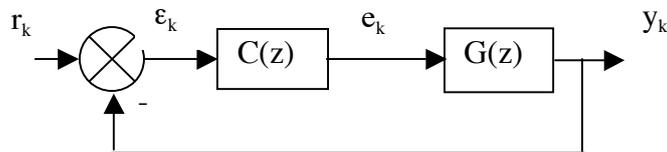


Figure 4- 2: Schéma équivalent de commande numérique en boucle fermée.

Et on calcule la fonction de transfert en z entre la consigne r_k et la variable à régler y_k :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)} \quad 4- 2$$

Cette transmittance est stable si et seulement si ses pôles ont un module strictement inférieur à 1 ($|z| < 1$).

Pour la transmittance en w :

$$H(w) = \frac{C(w)G(w)}{1 + C(w)G(w)} \quad 4- 3$$

elle est stable si et seulement si ses pôles ont une partie réelle strictement négative. On peut donc appliquer le critère du revers sur la boucle ouverte si celle-ci est stable:

On trace le lieu de Black (respectivement Nyquist) de la réponse en pseudo-pulsation ν de la boucle ouverte $C(j\nu) G(j\nu)$, et on le parcourt dans le sens des pseudo-pulsations croissantes: la boucle fermée est :

- stable si on laisse le point critique (0 dB, -180°) à droite (resp. à gauche pour Nyquist);
- oscillante si on passe sur le point critique;
- instable si on laisse le point critique (0 dB, -180°) à gauche (resp. à droite pour Nyquist).

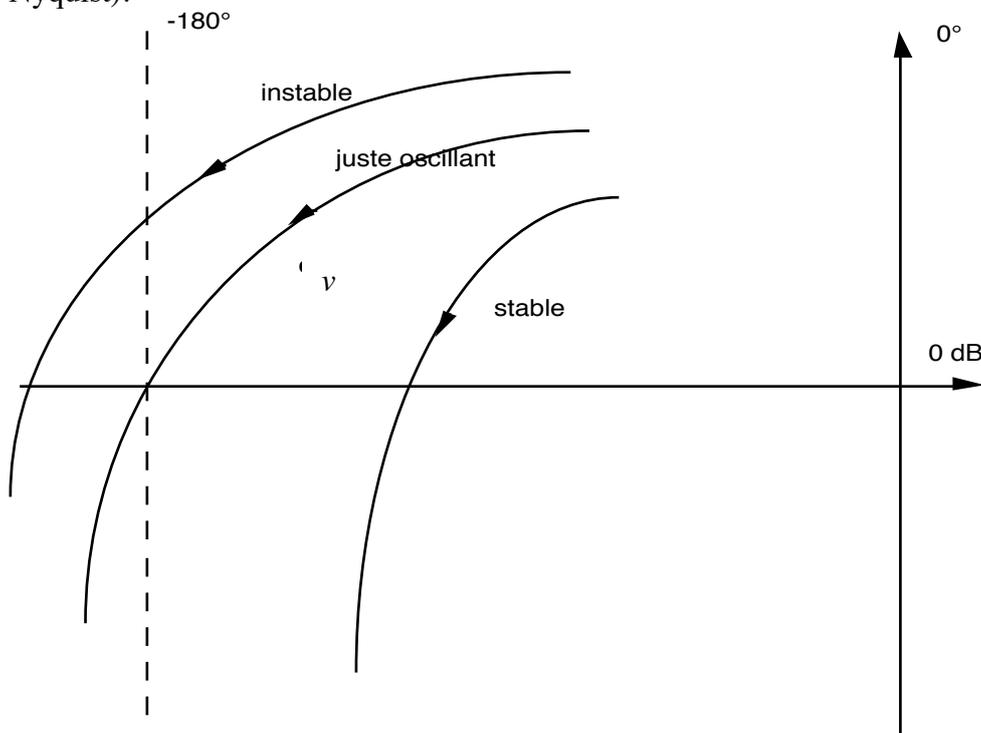


Figure 4- 3: Critère du revers dans le plan de Black.

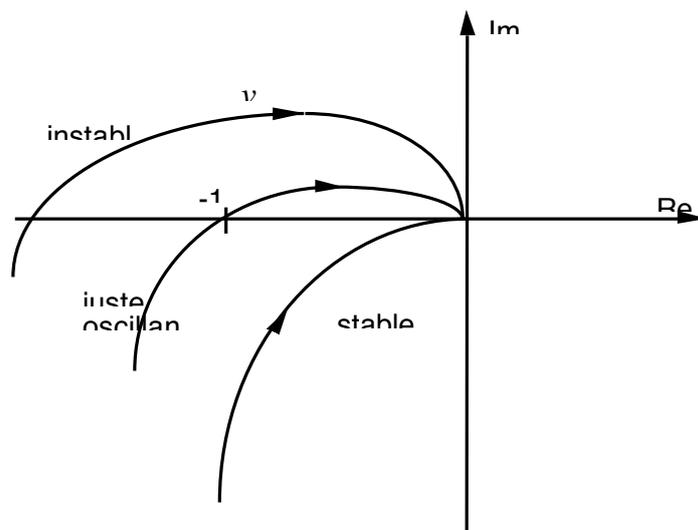


Figure 4- 4: Critère du revers dans le plan de Nyquist.

IV.2. Précision asymptotique.

1. Poursuite de consigne.

Soit un système de commande numérique, à retour unitaire, dont la chaîne directe possède n intégrations:

$$G(z) = \frac{1}{(z-1)^n} F(z)$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} F(z) = F(1) \begin{cases} \neq 0 \\ < \infty \end{cases}$$

4- 4

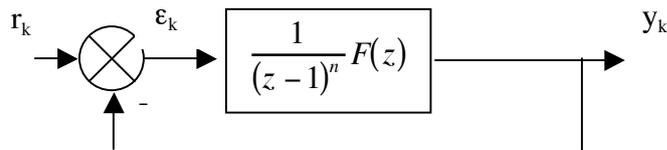


Figure 4- 5: Schéma fonctionnel de boucle fermée à retour unitaire, dont la chaîne directe possède n intégrations.

La précision asymptotique est décrite par le comportement asymptotique de la séquence d'erreur ε_k pour différents types de consigne r_k . Il faut donc calculer successivement:

- la transmittance entre la consigne et l'erreur:

$$S(z) = \frac{\varepsilon(z)}{R(z)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{(z-1)^n} F(z)}$$

4- 5

- l'erreur asymptotique par le théorème de la valeur finale:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \varepsilon(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) S(z) R(z) \end{aligned}$$

4- 6

- si la consigne est un échelon, on calcule l'**erreur statique** :

$$\begin{aligned} R(z) &= \frac{z}{z-1} R, R > 0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{1}{1 + \frac{1}{(z-1)^n} F(z)} \frac{z}{z-1} R \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)^n R}{(z-1)^n + F(z)} \\ &= \begin{cases} \frac{R}{1 + F(1)} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

4- 7

- si la consigne est une rampe on calcule l'**erreur de traînage** :

$$R(z) = \frac{T_e z}{(z-1)^2} R, R > 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{1}{1 + \frac{1}{(z-1)^n} F(z)} \frac{z T_e}{(z-1)^2} R$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)^{n-1} R}{(z-1)^n + F(z)} \quad 4-8$$

$$= \begin{cases} \infty & \text{si } n = 0 \\ R & \text{si } n = 1 \\ F(1) & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

2. Rejet de perturbation.

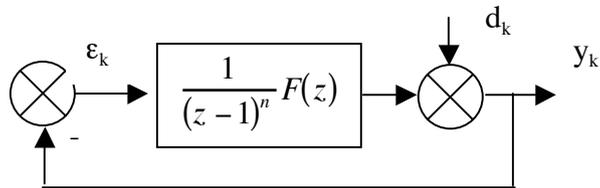


Figure 4- 6 : Schéma fonctionnel de boucle fermée à retour unitaire, dont la chaîne directe possède n intégrations, rejet de perturbation.

On suppose que la chaîne directe de la figure 4-6 vérifie les relations 4-4. Le rejet de perturbation asymptotique est décrit par le comportement asymptotique de la séquence de sortie y_k pour différents types de perturbation de sortie d_k . Il faut donc calculer successivement:

- la transmittance entre la perturbation et la sortie:

$$S(z) = \frac{Y(z)}{D(z)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{(z-1)^n} F(z)} \quad 4-9$$

- la sortie par le théorème de la valeur finale:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)y(z)$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)S(z)D(z) \quad 4-10$$

- si la perturbation est un échelon,

$$D(z) = \frac{z}{z-1} D, D > 0$$

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow \infty} y_k &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{1}{1 + \frac{1}{(z-1)^n} F(z)} \frac{z}{z-1} D \\
&= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)^n D}{(z-1)^n + F(z)} \\
&= \begin{cases} D & \text{si } n = 0 \\ 1 + F(1) & \\ 0 & \text{si } n > 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

4- 11

- si la perturbation est une rampe:

$$\begin{aligned}
D(z) &= \frac{T_e z}{(z-1)^2} D, D > 0 \\
\lim_{k \rightarrow \infty} y_k &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{1}{1 + \frac{1}{(z-1)^n} F(z)} \frac{z T_e}{(z-1)^2} D \\
&= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)^{n-1} D}{(z-1)^n + F(z)} \\
&= \begin{cases} \infty & \text{si } n = 0 \\ D & \\ F(1) & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n > 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

4- 12

V. CONCEPTION DE REGULATEURS

V.1. Correcteur Proportionnel et Intégral (PI).

C'est un correcteur numérique décrit par:

1. Le schéma fonctionnel

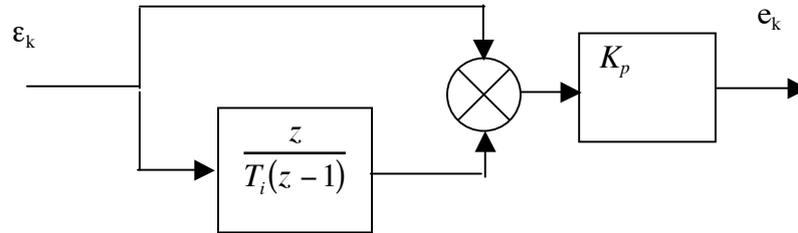


Figure 5- 1 : Schéma fonctionnel du correcteur PI numérique.

2. La transmittance en z

$$C_{PI}(z) = K_p \left[1 + \frac{z}{T_i(z-1)} \right] \quad 5- 1$$

$$= K_p \left[\frac{(1 + 1/T_i)z - 1}{z - 1} \right]$$

qui est de la forme :

$$C_{PI}(z) = \frac{b_1 z + b_0}{z - 1} \quad 5-1 \text{ bis}$$

3. L'équation récurrente.

$$e_k = e_{k-1} + K_p \left[\frac{1 + T_i}{T_i} \varepsilon_k - \varepsilon_{k-1} \right] \quad 5- 2$$

$$e_k = e_{k-1} + b_1 \varepsilon_k + b_0 \varepsilon_{k-1} \quad 5-2 \text{ bis}$$

4. La transmittance en w et la réponse pseudo-fréquentielle.

$$C_{PI}(w) = K_p \frac{1 + w T_e (T_i + 1/2)}{T_i T_e w} \quad 5- 3$$

Sur la figure 5-2, on a remplacé:

- la pseudo-pulsation v par la pseudo-pulsation réduite $u = v(1 + 2T_i)T_e / 2 = \frac{v}{v_i}$;

- le module pour la pseudo-pulsation infinie par 1, soit 0dB.:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} |C_{PI}(ju)| = K_p \frac{T_i + 1/2}{T_i} = K_i \quad 5- 4$$

On peut écrire la transmittance en w :

$$C_{PI}(jv) = K_i \frac{1 + \frac{jv}{v_i}}{jv}$$

5- 5

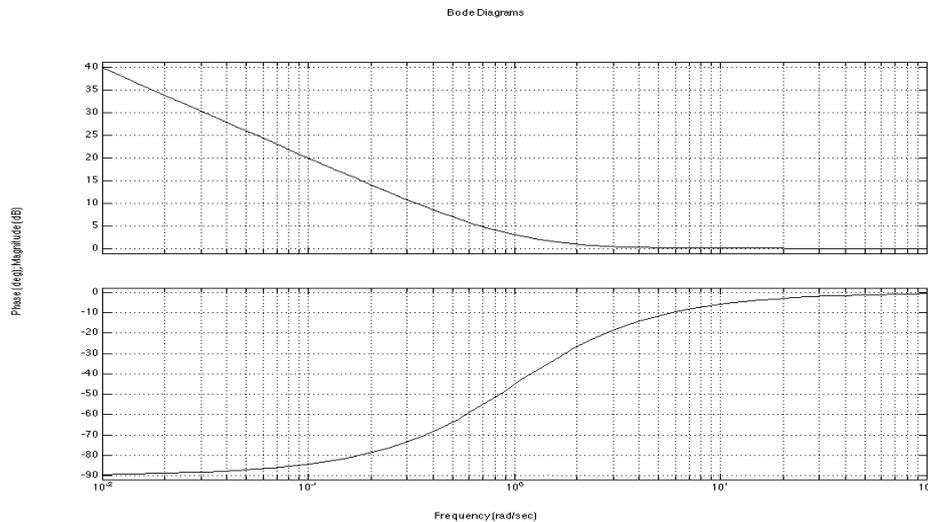


Figure 5-2 : Diagramme de Bode en pseudo-pulsation réduite d'un correcteur PI pour $K_i = 1$.

5. Méthode fréquentielle de réglage.

Le correcteur PI permet d'apporter du gain en basses fréquences, sans augmenter le déphasage en hautes fréquences. Le réglage consiste donc à déterminer les valeurs des paramètres K_i et v_i telles que la boucle ouverte vérifie les marges de phase ou de gain.

Soit par exemple une **marge de phase désirée de 60°** : il faut

- 1 **chercher** (par calcul) v_0 telle que $\angle F(jv_0) \approx -100^\circ$
- 2 la relation (5-5) permet de **calculer** $v_i = \frac{v_0}{3}$, pour que le déphasage du PI soit de -20° à la pseudo-pulsation v_0 ; (on peut aussi le mesurer sur la figure 5-2) ;
- 3 **calculer** le module $|F(jv_0)|$, pour calculer le gain K_i :

$$K_i = \frac{1}{|F(jv_0)|}$$

On vérifie alors aisément que la pseudo-pulsation au gain unité est v_0 et que la marge de phase est de 60°

$$\begin{aligned} |C_{PI}(jv_0)F(jv_0)| &\approx 1 \\ \angle [C_{PI}(jv_0)F(jv_0)] &\approx -120^\circ \end{aligned}$$

4 calculer $C_{PI}(z)$ puis l'équation de récurrence:

$$C_{PI}(z) = \frac{b_1 z + b_0}{z - 1}$$

$$b_1 = K_i \frac{T_e v_i}{2} \left(1 + \frac{2}{T_e v_i} \right)$$

$$b_0 = K_i \frac{T_e v_i}{2} \left(1 - \frac{2}{T_e v_i} \right)$$

Si par exemple le cahier des charges impose une **marge de phase désirée de M_ϕ** , et une **pseudo-pulsation v_0** : il faut

1 chercher (par calcul) la valeur de l'argument $\angle F(jv_0)$

2 Calculer l'argument que doit apporter le régulateur PI à la pseudo-pulsation v_0 :

$$\angle C_{PI}(jv_0) = -180^\circ + M_\phi - \angle F(jv_0)$$

3 Calculer la valeur de v_i :

$$v_i = \frac{v_0}{\tan(\angle C_{PI}(jv_0) + 90^\circ)}$$

4 Calculer le module $|F(jv_0)|$, pour calculer le gain K_i :

$$K_i = \frac{1}{|F(jv_0)| \frac{\left| 1 + j \frac{v_0}{v_i} \right|}{\left| j \frac{v_0}{v_i} \right|}}$$

On vérifie alors aisément que la pseudo-pulsation au gain unité est v_0 et que la marge de phase est de 60°

$$\begin{aligned} |C_{PI}(jv_0)F(jv_0)| &\approx 1 \\ \angle [C_{PI}(jv_0)F(jv_0)] &\approx -120^\circ \end{aligned}$$

5 calculer $C_{PI}(z)$ puis l'équation de récurrence:

$$C_{PI}(z) = \frac{b_1 z + b_0}{z - 1}$$

$$b_1 = K_i \frac{T_e v_i}{2} \left(1 + \frac{2}{T_e v_i} \right)$$

$$b_0 = K_i \frac{T_e v_i}{2} \left(1 - \frac{2}{T_e v_i} \right)$$

V.2. Correcteur Proportionnel et Dérivée (PD ou AP).

1. Le schéma fonctionnel.

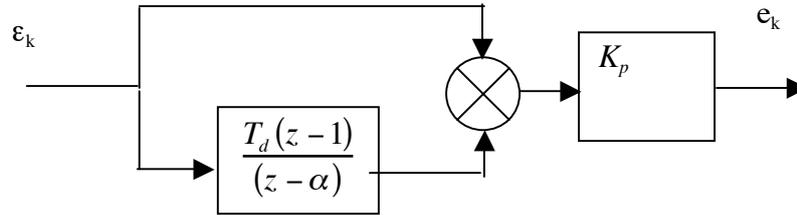


Figure 5- 2: Schéma fonctionnel du correcteur PD numérique.

2. La transmittance en z .

$$C_{PD}(z) = K_p \left[1 + \frac{T_d(z-1)}{(z-\alpha)} \right]$$

$$= K_p(1+T_d) \left[\frac{z - \frac{T_d + \alpha}{T_d + 1}}{z - \alpha} \right] \quad 5- 6$$

3. L'équation récurrente.

$$e_k = \alpha e_{k-1} + K_p(1+T_d) \left[\varepsilon_k - \frac{T_d + \alpha}{T_d + 1} \varepsilon_{k-1} \right] \quad 5- 7$$

4. La transmittance en w et la réponse pseudo-fréquentielle.

$$C_{PD}(w) = K_p \frac{1 + w \frac{T_e}{2} \frac{1 + 2T_d + \alpha}{1 - \alpha}}{1 + w \frac{T_e}{2} \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}} \quad 5- 8$$

soit, en posant:

$$v_0 = \frac{2(1-\alpha)}{T_e \sqrt{(1+\alpha)(1+2T_d+\alpha)}} \quad 5- 9$$

$$a = \frac{1+2T_d+\alpha}{1+\alpha}$$

on obtient:

$$C_{PD}(w) = K_p \frac{1 + \sqrt{a} \frac{w}{v_0}}{1 + \frac{w}{\sqrt{a} v_0}} \quad 5- 10$$

qui est la transmittance d'un correcteur à avance de phase en pseudo-pulsation.

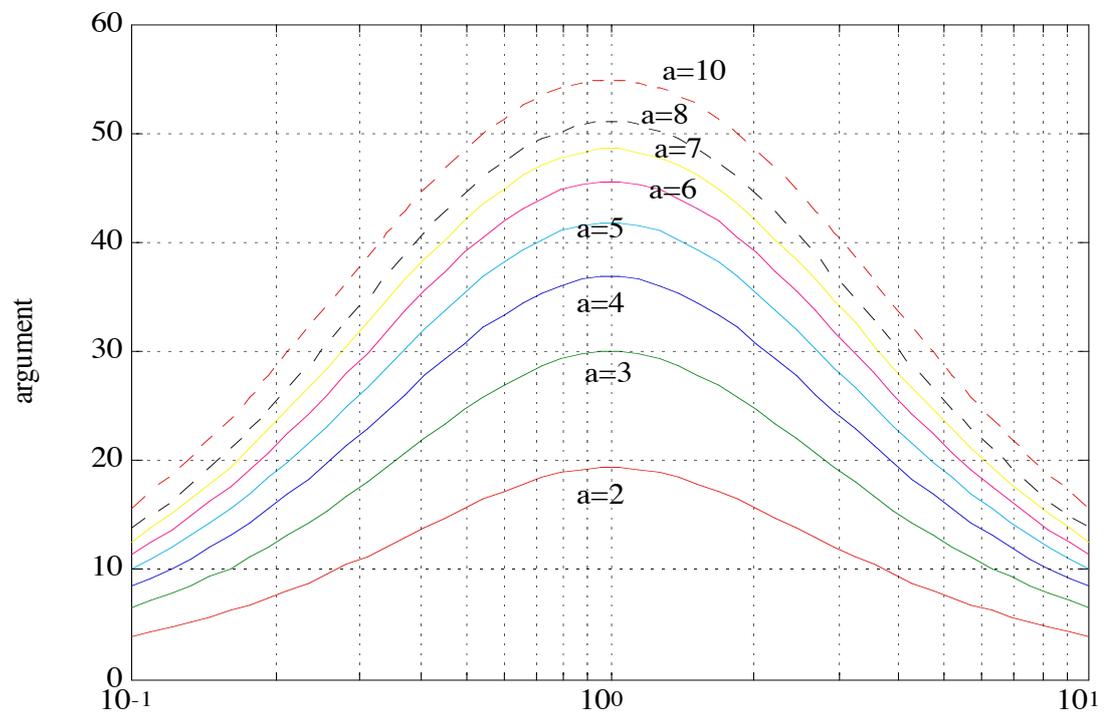
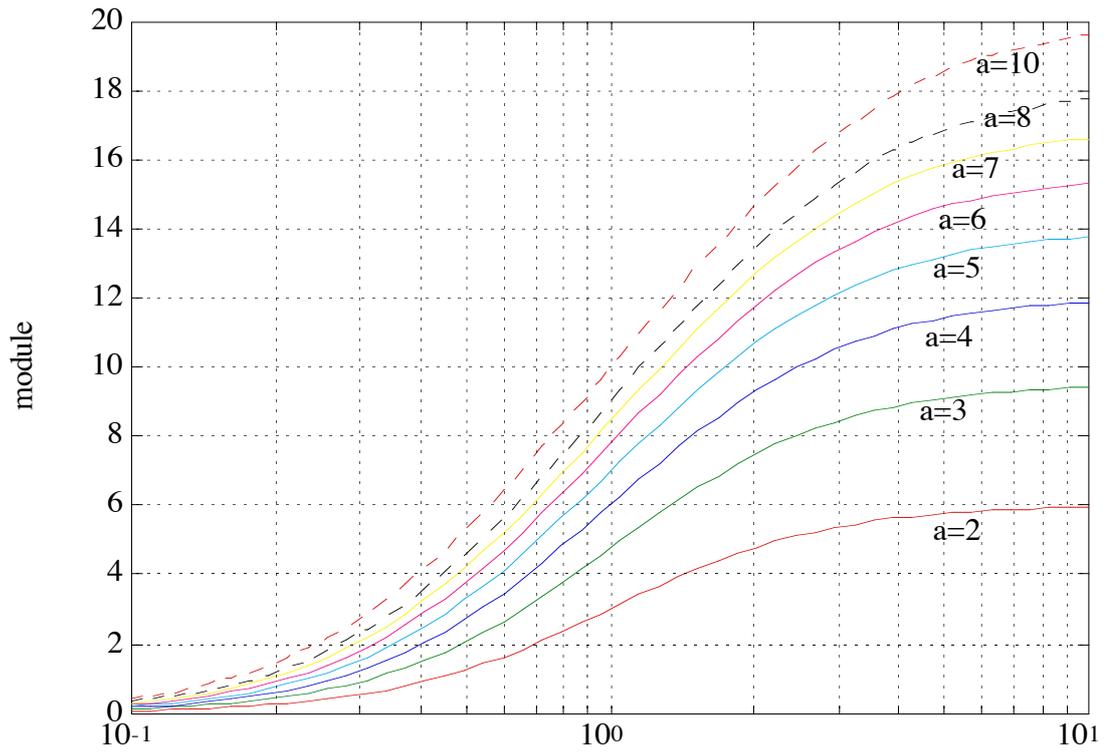


Figure 5- 3: Diagramme de Bode en pseudo-pulsation (réduite) d'un correcteur PD.

V.3. Le correcteur à actions Proportionnelle, Intégrale et Dérivée (PID).

1. Le schéma fonctionnel.

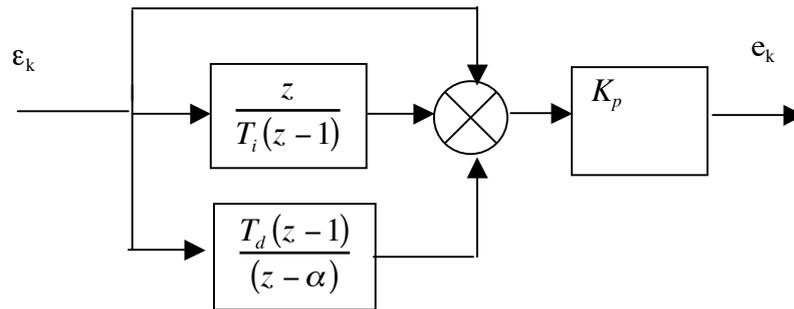


Figure 5- 4: Schéma fonctionnel du correcteur PID numérique.

2. La transmittance en z .

$$C_{PID}(z) = K_p \left[1 + \frac{z}{T_i(z-1)} + \frac{T_d(z-1)}{(z-\alpha)} \right] \quad 5- 11$$

que l'on peut écrire sous la forme:

$$C_{PID}(z) = \frac{r_2 z^2 + r_1 z + r_0}{(z-1)(z-\alpha)} \quad 5- 12$$

en introduisant les changements de variables:

$$r_2 = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i} + T_d \right) \quad 5- 13$$

$$r_1 = -K_p \left(1 + \alpha + 2 T_d + \frac{\alpha}{T_i} \right) \quad 5- 14$$

$$r_0 = K_p (\alpha + T_d) \quad 5- 15$$

3. L'équation récurrente.

$$e_k = (1 + \alpha)e_{k-1} - \alpha e_{k-2} + r_2 \varepsilon_k + r_1 \varepsilon_{k-1} + r_0 \varepsilon_{k-2} \quad 5- 16$$

4. La transmittance en w et la réponse pseudo-fréquentielle.

$$C_{PID}(w) = K \frac{\left(1 + \frac{w}{v_i} \right) \left(1 + \frac{\sqrt{a}w}{v_0} \right)}{\frac{w}{v_i} \left(1 + \frac{w}{\sqrt{a}v_0} \right)} \quad 5- 17$$

obtenue en posant:

$$\alpha = \frac{1 - \frac{T_e}{2} v_0 \sqrt{a}}{1 + \frac{T_e}{2} v_0 \sqrt{a}} \quad (0 < \alpha < 1) \quad 5-18$$

$$r_2 = K \frac{v_0 v_i \sqrt{a} \frac{T_e^2}{4} + (v_0 \sqrt{a} + v_i a) \frac{T_e}{2} + a}{1 + v_0 \sqrt{a} \frac{T_e}{2}} \quad 5-19$$

$$r_1 = K \frac{2 \left[v_0 v_i \sqrt{a} \frac{T_e^2}{4} - a \right]}{1 + v_0 \sqrt{a} \frac{T_e}{2}} \quad 5-20$$

$$r_0 = K \frac{v_0 v_i \sqrt{a} \frac{T_e^2}{4} - (v_0 \sqrt{a} + v_i a) \frac{T_e}{2} + a}{1 + v_0 \sqrt{a} \frac{T_e}{2}} \quad 5-21$$

En fixant $v_i < \frac{v_0}{\sqrt{a}} < v_0 \sqrt{a}$ on trace le diagramme de Bode par addition des diagrammes de PI et de PD:

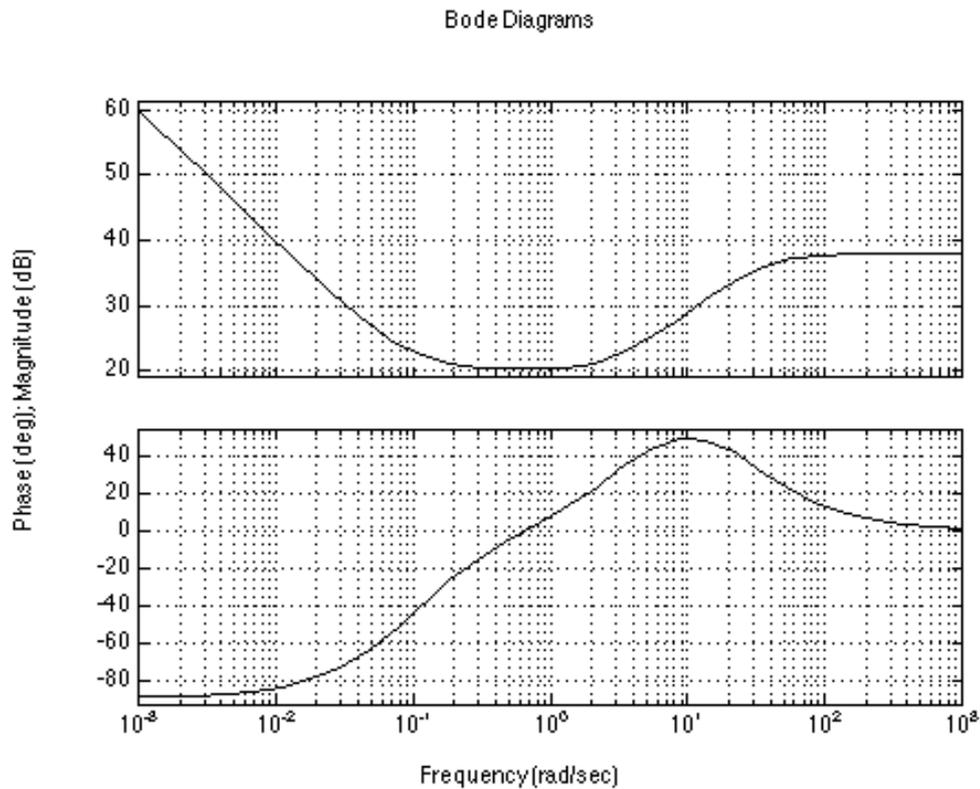


Figure 5- 5: Diagramme de Bode en pseudo-pulsation d'un correcteur PID.

La figure 5-6 représente le diagramme de Bode de la transmittance 5-17, avec les valeurs numériques:

$$K = 10$$

$$v_i = 0,1$$

$$v_0 = 10$$

$$a = 8$$

5. Méthode de calcul de PID numérique.

Il faut donc régler successivement un PI et un AP. Un cas typique est :

- le système à régler est décrit par une fonction de transfert $F(p)$,
- les spécifications de la boucle fermée sont :

1 précision statique parfaite en poursuite de consigne et en rejet de perturbation constante, donc le correcteur doit avoir une action intégrale,

2 marge de phase supérieure à M_φ .

La méthode de réglage se déroule en 6 étapes :

1^{ère} étape :

Le système de transmittance $F(p)$ doit être représenté par sa transmittance en z , correspondant au système discret obtenu par échantillonneur et bloqueur d'ordre zéro (relation 2-18):

$$G(z) = \left(\frac{z-1}{z} \right) Z \left\{ \frac{F(p)}{p} \right\}.$$

Eventuellement on ajoute un retard d'une période, qui sera utilisée dans le correcteur, comme temps de calcul:

$$G'(z) = z^{-1} G(z);$$

puis on calcule la transmittance en w , $G(w)$.

2^{ème} étape

Sur le diagramme de Bode en pseudo-pulsation de $G(jv)$, on cherche la valeur v_0 pour laquelle l'argument vaut environ -180° .

3^{ème} étape :

On détermine la pseudo-pulsation v_i telle que le PI n'apporte pas plus de -5° de déphasage à la pulsation v_0 , c'est à dire :

$$v_i \approx \frac{v_0}{12} ;$$

4^{ème} étape :

On calcule le paramètre a du correcteur à avance de phase, en choisissant $v_d = v_0$.
On doit alors vérifier :

$$-180^\circ + M_\varphi = \angle G(jv_0) + \angle C_{PI}(jv_0) + \angle C_{AP}(jv_0) \quad 5-22$$

c'est à dire :

$$\angle C_{AP}(jv_0) = -180^\circ + M_\varphi - \angle G(jv_0) + 5^\circ \quad 5- 23$$

On lit la valeur de a sur l'abaque des correcteurs à avance de phase, ou on calcule selon la formule :

$$a = \tan^2 \left(\frac{M_\varphi - \angle G(jv_0) + 5^\circ}{2} - 45^\circ \right) \quad 5- 24$$

5^{ème} étape :

On détermine le gain K tel que u_0 soit la pulsation au gain unité, c'est à dire :

$$|G(jv_0)| |C_{PI}(jv_0)| |C_{AP}(jv_0)| K = 1 \quad 5- 25$$

donc

$$K = \frac{1}{|G(jv_0)| \sqrt{a}} \quad 5- 26$$

6^{ème} étape :

Il reste à calculer les paramètres r_2 , r_1 , r_0 et α selon les relations 5-18 à 5-21.

Remarques:

- Le passage de la forme 5-17 à la forme 5-12, qui permet de retrouver l'équation récurrente du régulateur PID, est obtenu sous Matlab par la fonction C2D, option 'tustin'.

- Sur le choix de la période d'échantillonnage T_e .

Pour que le correcteur soit stable et n'introduise pas d'oscillations inutiles, il faut que $0 < \alpha < 1$:

$$0 < \frac{1 - \frac{T_e}{2} v_0 \sqrt{a}}{1 + \frac{T_e}{2} v_0 \sqrt{a}} < 1 \quad 5- 27$$

c'est à dire:

$$0 < \frac{T_e}{2} v_0 \sqrt{a} < 1 \quad 5- 28$$

or, la vraie pulsation correspondant à v_0 est ω_0 :

$$v_0 = \frac{2}{T_e} \tan \left(\frac{T_e}{2} \omega_0 \right) \quad 5- 29$$

il faut donc assurer :

$$0 < \tan\left(\frac{T_e}{2}\omega_0\right) < \frac{1}{\sqrt{a}} \quad 5- 30$$

Soient $f_e = 1/T_e$, et $f_0 = \omega_0/2\pi$. Il faut alors que :

$$f_e > \frac{\pi f_0}{\text{Arc tan}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)} \quad 5- 31$$

Comme f_0 est proche de la bande passante de la boucle fermée, cette relation permet de fixer la fréquence d'échantillonnage en fonction de la spécification de bande passante de boucle fermée. En effet, pour un coefficient a de 5, soit une avance de phase de 40° , on obtient:

$$f_e > 7,5 f_0,$$

soit pratiquement

$$f_e \approx 10 f_0 \quad 5- 32$$

V.4. Problèmes d'implantation.

1. Structure série.

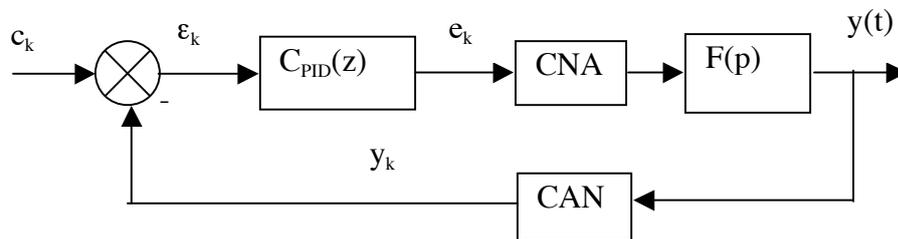


Figure 5- 6: Régulateur PID série.

Le régulateur PID peut s'écrire:

$$C_{PID}(z) = \frac{r_2 z^2 + r_1 z + r_0}{(z-1)(z-\alpha)} = \frac{r_2 + r_1 z^{-1} + r_0 z^{-2}}{(1-z^{-1})(1-\alpha z^{-1})} \quad 5- 33$$

d'où on tire:

$$(1-\alpha z^{-1})(1-z^{-1})E(z) = (r_2 + r_1 z^{-1} + r_0 z^{-2})\varepsilon(z)$$

or

$$(1-z^{-1})E(z) = Z\{e_k - e_{k-1}\} = Z\{\Delta e_k\} \quad 5- 34$$

où Δe_k est l'incrément de commande à l'instant k , selon l'équation récurrente:

$$\Delta e_k = \alpha \Delta e_{k-1} + r_2 \varepsilon_k + r_1 \varepsilon_{k-1} + r_0 \varepsilon_{k-2}. \quad 5- 35$$

La commande est donc:

$$e_k = e_{k-1} + \Delta e_k \quad 5- 36$$

Remarque

Pour réduire le temps de calcul, on calcule avant l'instant kT_e :

$$\Delta e_{k-1} = e_{k-1} - e_{k-2}$$

$$e_k^0 = e_{k-1} + \alpha \Delta e_{k-1} + r_1 \varepsilon_{k-1} + r_0 \varepsilon_{k-2}$$

puis, dès que l'on connaît $\varepsilon_k = c_k - y_k$:

$$e_k = e_k^0 + r_2 \varepsilon_k$$

Ce calcul peut se faire en introduisant un léger décalage entre l'horloge du CAN et celle du CNA.

2. Structure série-parallèle.

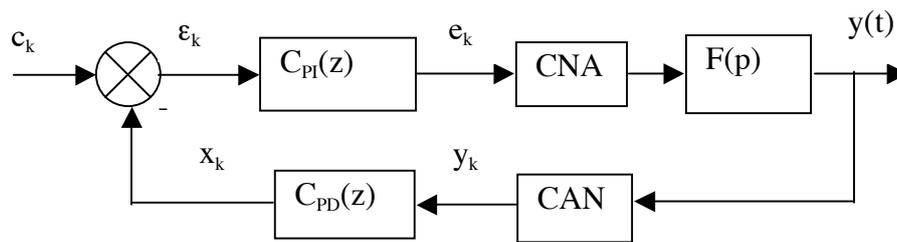


Figure 5- 7: Régulateur PID série-parallèle.

En revenant à la forme en w de la relation 5-17, on peut séparer les parties PI et PD:

$$C_{PI}(w) = K \frac{1 + \frac{w}{v_i}}{\frac{w}{v_i}}$$

$$C_{PD}(w) = \frac{1 + \frac{\sqrt{a} w}{v_0}}{1 + \frac{w}{\sqrt{a} v_0}}$$

en remarquant que le correcteur PD est de gain statique unitaire. Les transmittances en z peuvent s'écrire:

$$C_{PI}(z) = \frac{r_1 z + r_0}{z - 1} = \frac{r_1 + r_0 z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

$$C_{PD}(z) = \frac{d_1 z + d_0}{z - \alpha} = \frac{d_1 + d_0 z^{-1}}{1 - \alpha z^{-1}}$$
5- 37

avec:

$$r_1 = K \left(v_i \frac{T_e}{2} + 1 \right)$$

$$r_0 = K \left(v_i \frac{T_e}{2} - 1 \right)$$

$$d_1 = \frac{\sqrt{a} v_0 T_e + 2a}{\sqrt{a} v_0 T_e + 2}$$

$$d_0 = \frac{\sqrt{a} v_0 T_e - 2a}{\sqrt{a} v_0 T_e + 2}$$

$$\alpha = \frac{2 - \sqrt{a} v_0 T_e}{2 + \sqrt{a} v_0 T_e}$$
5- 38

Les équations récurrentes sont alors:

$$x_k = \alpha x_{k-1} + d_1 y_k + d_0 y_{k-1}$$

$$\varepsilon_k = c_k - x_k$$

$$\Delta e_k = r_1 \varepsilon_k + r_0 \varepsilon_{k-1}$$

$$e_k = e_{k-1} + \Delta e_k$$
5- 39

Remarque:

On peut calculer, avant l'instant kT_e :

$$e_k^0 = e_{k-1} + r_0 \varepsilon_{k-1} - r_1 \alpha x_{k-1} - r_1 d_0 y_{k-1}$$

et, dès $t = kT_e$:

$$e_k = e_k^0 + r_1 c_k - r_1 d_1 y_k$$
5- 40

V.5. Placement de pôles.

Quelle que soit la forme d'implantation du régulateur PID (série ou série-parallèle), les pôles de la boucle fermée sont inchangés, et sont les racines d'une équation du type:

$$A(z)S(z) + B(z)R(z) = 0, \quad 5- 41$$

où $A(z)$, $B(z)$, $R(z)$ et $S(z)$ sont des polynômes correspondant à:

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

$$C_{PID}(z) = \frac{R(z)}{S(z)}$$

Le degré de l'équation 5-41 est:

$$d^\circ[AS + BR] = \text{Max}\{d^\circ[AS], d^\circ[BR]\} \quad 5- 42$$

Pour des raisons de causalité,

$$d^\circ[A] \geq d^\circ[B]$$

$$d^\circ[S] \geq d^\circ[R]$$

et donc, dans le cas d'un PID et d'un système à régler du second ordre:

$$d^\circ[AS + BR] = d^\circ[AS] = 4. \quad 5- 43$$

Il faut donc choisir 4 pôles pour la boucle fermée.

Généralement, on les choisit stables, donc de module strictement inférieur à 1, 2 proches de 1 ("lents", ce sont les pôles de commande), 2 proches de 0 ("rapides", ce sont les pôles de filtrage).

Si les 4 pôles sont réels, la boucle fermée ne présentera pas de modes oscillants.

Soient par exemple:

$$G(z) = \frac{b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0}, \quad 5- 44$$

$$C_{PID}(z) = \frac{r_2 z^2 + r_1 z + r_0}{(z-1)(z-\alpha)}$$

et soient z_1 , z_2 , z_3 et z_4 les 4 pôles choisis, on forme:

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4) \quad 5- 45$$

$$= z^4 + p_3 z^3 + p_2 z^2 + p_1 z + p_0$$

On calcule par ailleurs:

$$\begin{aligned}
A(z)S(z) + B(z)R(z) &= z^4 + [a_1 - (1 + \alpha) + b_1 r_2]z^3 \\
&\quad + [r_2 b_0 + r_1 b_1 + a_0 + \alpha - a_1 - \alpha a_1]z^2 \\
&\quad + [r_1 b_0 + r_0 b_1 + \alpha a_1 - a_0 - \alpha a_0]z \\
&\quad + [r_0 b_0 + \alpha a_0]
\end{aligned}
\tag{5-46}$$

Par identification, on peut écrire l'équation matricielle:

$$\begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 \\ a_1 - a_0 & b_1 & b_0 & 0 \\ 1 - a_1 & 0 & b_1 & b_0 \\ -1 & 0 & 0 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -a_0 \\ a_0 - a_1 \\ a_1 - 1 \end{bmatrix}
\tag{5-47}$$

d'où on calcule les paramètres r_2, r_1, r_0 et α :

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 \\ a_1 - a_0 & b_1 & b_0 & 0 \\ 1 - a_1 & 0 & b_1 & b_0 \\ -1 & 0 & 0 & b_1 \end{bmatrix}^{-1} \left[\begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -a_0 \\ a_0 - a_1 \\ a_1 - 1 \end{bmatrix} \right]
\tag{5-48}$$

$G(p)$	$g(t)$	$G(z)$
e^{-kTp}	$\delta(t - kT)$	z^{-k}
$\frac{1}{p}$	$\delta(t)$	$1 \text{ ou } z^{-0}$
$\frac{1}{p}$	$u(t)$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{p^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{p^3}$	$\frac{1}{2!} t^2$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
$\frac{1}{p - \frac{1}{T} \ln a}$	$a \frac{t}{T}$	$z/(z-a)$
$\frac{1}{p+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z - e^{-aT}}$
$\frac{1}{(p+a)^2}$	$t e^{-at}$	$\frac{Tz e^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2}$
$\frac{1}{(p+a)^3}$	$\frac{t^2}{2} e^{-at}$	$\frac{T^2 e^{-aT} z}{2(z - e^{-aT})^2} + \frac{T^2 e^{-2aT} z}{(z - e^{-aT})^3}$
$\frac{a}{p(p+a)}$	$1 - e^{-at}$	$\frac{(1 - e^{-aT}) z}{(z-1)(z - e^{-aT})}$
$\frac{a}{p^2(p+a)}$	$t - \frac{1 - e^{-at}}{a}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{(1 - e^{-aT}) z}{a(z-1)(z - e^{-aT})}$
$\frac{a}{p^3(p+a)}$	$\frac{1}{2!} \left(t^2 - \frac{2}{a} t + \frac{2}{a^2} - \frac{2}{a^2} e^{-at} \right)$	$\frac{T^2 z}{(z-1)^3} + \frac{(aT-2) Tz}{2a(z-1)^2} + \frac{z}{a^2(z-1)} - \frac{z}{a^2(z - e^{-aT})}$
$\frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$	$\sin \omega_0 t$	$\frac{z \sin \omega_0 T}{z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1}$
$\frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$	$\cos \omega_0 t$	$\frac{z(z - \cos \omega_0 T)}{z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1}$
$\frac{\omega_0}{p^2 - \omega_0^2}$	$\text{sh } \omega_0 t$	$\frac{z \text{sh } \omega_0 T}{z^2 - 2z \text{ch } \omega_0 T + 1}$
$\frac{p}{p^2 - \omega_0^2}$	$\text{ch } \omega_0 t$	$\frac{z(z - \text{ch } \omega_0 T)}{z^2 - 2z \text{ch } \omega_0 T + 1}$
$\frac{\omega_0^2}{p(p^2 - \omega_0^2)}$	$\text{ch } \omega_0 t - 1$	$\frac{z(z - \text{ch } \omega_0 T)}{z^2 - 2z \text{ch } \omega_0 T + 1} - \frac{z}{z-1}$
$\frac{\omega_0^2}{p(p^2 + \omega_0^2)}$	$1 - \cos \omega_0 t$	$\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1}$
$\frac{a^2}{p(p+a)^2}$	$1 - (1+at)e^{-at}$	$\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-aT}} - \frac{aT e^{-aT} z}{(z - e^{-aT})^2}$
$\frac{a^2(p+b)}{p(p+a)^2}$	$b - b e^{-at} + a(a-b)t e^{-at}$	$\frac{bz}{z-1} - \frac{bz}{z - e^{-aT}} + \frac{a(a-b)T e^{-aT} z}{(z - e^{-aT})^2}$
$\frac{\omega_0}{(p+a)^2 + \omega_0^2}$	$e^{-at} \sin \omega_0 t$	$\frac{z e^{-aT} \sin \omega_0 T}{z^2 - 2z e^{-aT} \cos \omega_0 T + e^{-2aT}}$
$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega_0^2}$	$e^{-at} \cos \omega_0 t$	$\frac{z^2 - z e^{-aT} \cos \omega_0 T}{z^2 - 2z e^{-aT} \cos \omega_0 T + e^{-2aT}}$