Université Bordeaux 1
Master 1 EAPS-ESA

De la commande à modèle interne au problème standard

Benoît Bergeon
Professeur

2013-2014

Table des matières

I. Introduction

Classiquement, le problème de la commande automatique de systèmes s'est posé en termes de *régulation* et *asservissement*. L'utilisateur final fixe une *consigne* que le système automatisé doit atteindre, malgré la présence de *perturbations* ou bruits divers. Ces objectifs de poursuite de consigne et de rejet de perturbation sont spécifiés dans un cahier des charges soumis au concepteur de la loi de commande.

Le travail de l'automaticien est alors de confronter ce cahier des charges avec le *système physique* dont il doit assurer le contrôle : la première étape consiste à en obtenir un *modèle mathématique* directement utilisable (équation différentielle, fonction ou matrice de transfert, représentation d'état, ...) pour la synthèse du *régulateur* (loi de commande). La démarche générale peut être représentée par le diagramme de la figure 1 ci-dessous.

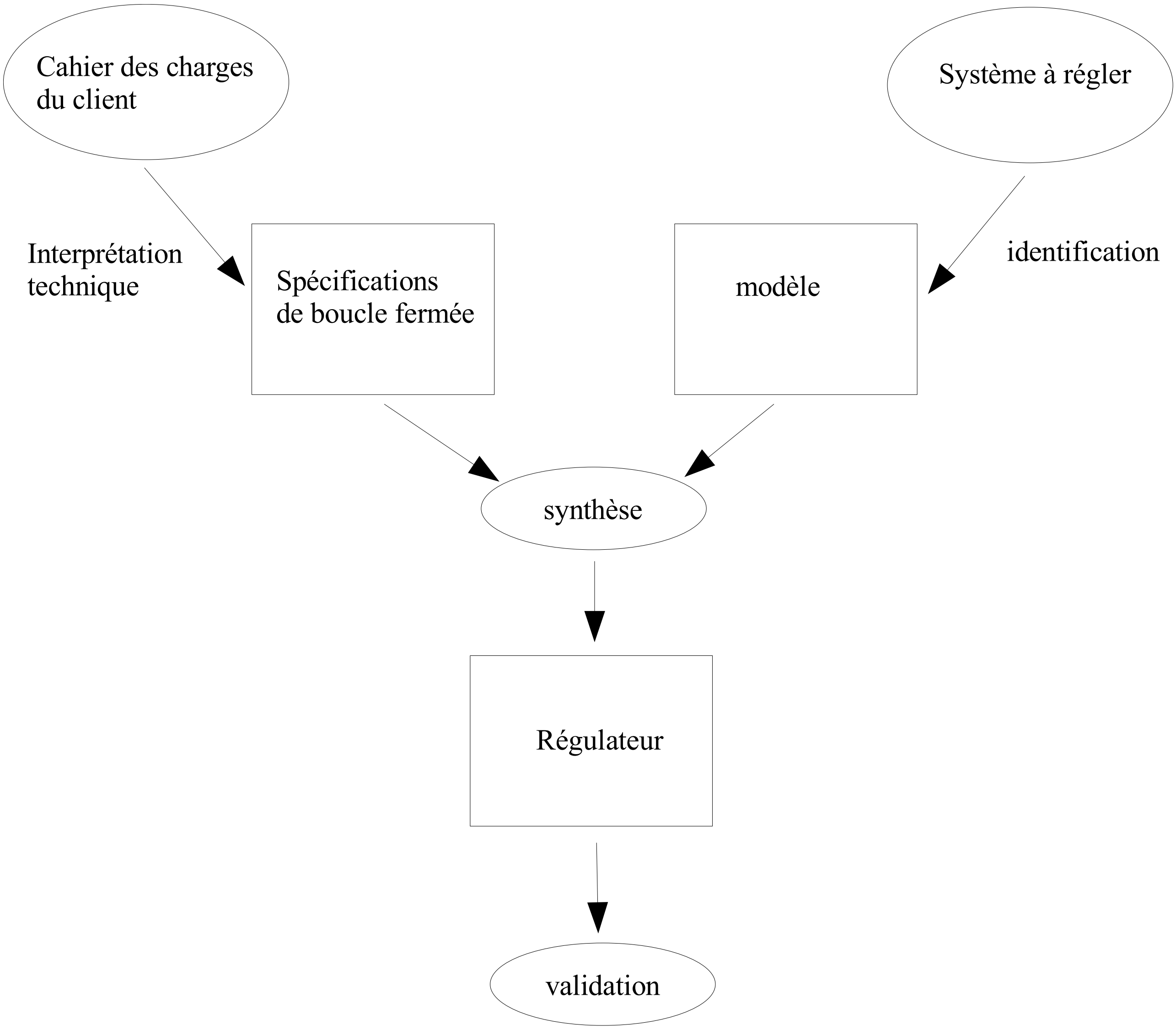

Figure 1

Les développements récents des théories de la commande et des outils informatiques de calcul numérique permettent d’automatiser cette démarche, en définissant un *modèle augmenté* comportant un modèle du système à régler, un modèle de son environnement (bruits, perturbations, consignes, ...) ainsi qu’une description opérationnelle des spécifications.

La synthèse du régulateur se met alors sous la forme d’un *problème standard* défini par un critère sur ce modèle augmenté.

Cette démarche se résume par le diagramme de la figure 2.

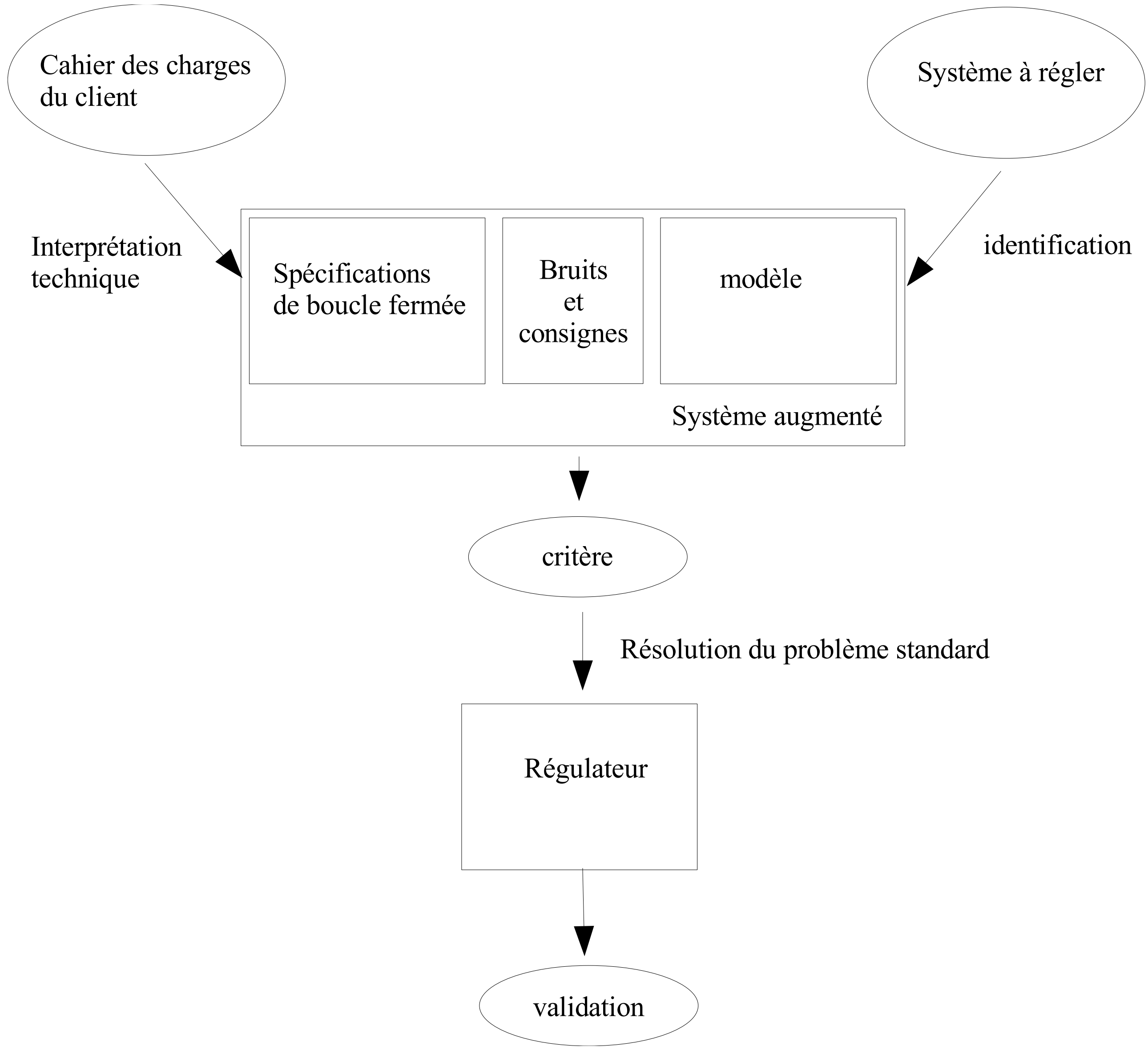

Figure 2

La résolution du problème standard se fait par optimisation sous contrainte du critère.

Ce cours se propose de présenter une vision historique du développement du concept de problème standard.

II. Le modèle interne de Francis et Wonham.

Bibliographie:

- The Internal Model Principle for Linear Multivariable Regulators, Francis & Wonham, *Applied Mathematics & Optimization,* Vol. 2, n° 2, 1975.

... *Linear Multivariable Control, a Geometric Approach,* Wonham, Springer Verlag, New York 1974.

1. Le principe du modèle interne.

"Une synthèse de régulateur n'est *structurellement stable* que si le régulateur utilise en feedback les variables régulées et incorpore, dans la boucle fermée, un modèle convenablement recopié de la structure dynamique du signal exogène que le régulateur est censé contrôler."

Exemple élémentaire:

Soit un système linéaire, stationnaire, monovariable (Single Input Single Output) décrit par une fonction de transfert *F(p)*. L'utilisateur désire que l'effet de la présence éventuelle d'une perturbation constante (offset) sur la commande de ce système n'engendre pas d'erreur asymptotique entre la référence et la sortie.

La structure de la commande en boucle fermée est décrite par la figure 3:

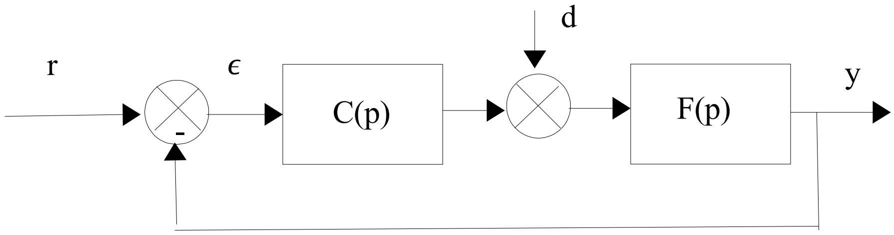

Figure 3

La "structure dynamique" de la perturbation est :

$$D(p)=\frac{1}{p}$$

La synthèse est dite "structurellement stable" si et seulement si :

$$\lim_{t\to\infty} \epsilon(t)=0 \quad .$$

Il est bien connu que cette erreur asymptotique est nulle si et seulement si le régulateur *C(p)* contient (au moins) un intégrateur. Cet intégrateur est le *modèle interne* de la perturbation.

$$C(p)=\frac{1}{p}C'(p), \, avec \lim_{p\to 0} C'(p)\neq 0.$$

2. *Représentation générale.*

Le système à régler (SAR) est représenté par le modèle d'état à temps continu (mais aussi bien à temps discret ou à temps pseudo-continu) linéaire invariant (Linear Time Invariant, LTI):

$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, est le vecteur d'état, comprenant d'une part la partie commandable (stable ou instable) et la partie non commandable stable x_1 ($n_1 \times 1$) et d'autre part la partie non commandable instable (de la perturbation) x_2 ($n_2 \times 1$).

L'équation d'évolution s'écrit:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}u_2+\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} , \qquad 1$$

où:

$\delta(n_1+n_2\times 1)\in\Delta$ est un vecteur d'impulsions de Dirac (ou bien représente les conditions initiales);

$u_2(m\times 1)\in U$ est le vecteur des commandes (issu du régulateur);

$x_1(n_1\times 1)\in X_1$;

$x_2(n_2\times 1)\in X_2$;

L'équation des sorties :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad 2$$

où:

$y_1(p_1\times 1)\in Y_1$ est le vecteur des variables à régler;

$y_2(p_2\times 1)\in Y_2$ est le vecteur des mesures utilisées par le régulateur).

La figure 4 représente le schéma-bloc correspondant:

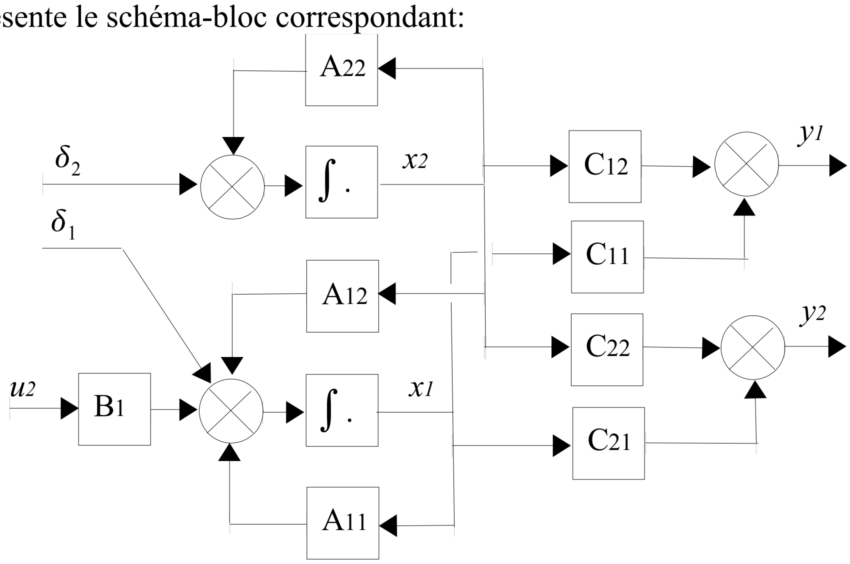

Figure 4

Commentaires:

1. Le sous-système dont le vecteur d'état est x_2 représente les dynamiques des entrées exogènes:
    - les signaux de consigne ou références;
    - les signaux de perturbation et bruits d'état, de sortie, de mesure.
2. Le vecteur δ représente des impulsions de Dirac assurant la mise en conditions initiales non nulles.
3. La matrice d'évolution A_{22} de ce système a toutes ses valeurs propres dans le demi-plan fermé droit. Les éventuelles dynamiques stables (asymptotiquement) des signaux exogènes sont incluses dans le système de matrice d'évolutions A_{11}.

Il faut également représenter le régulateur:

$$\dot{x}_R = A_R x_R + B_R y_2 \qquad 3$$

$$u_2 = C_R x_R + D_R y_2$$

où:

$x_R(n_R \times 1) \in X_R$ est le vecteur d'état du régulateur.

En boucle fermée, l'état du système commandé est défini par :

$$x_{BF} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_R \end{bmatrix} \in X_{BF} = X_1 \oplus X_R$$

et les équations :

$$\dot{x}_{BF} = \begin{bmatrix} A_{11} + B_1 D_R C_{21} & B_1 C_R \\ B_R C_{21} & A_R \end{bmatrix} x_{BF} + \begin{bmatrix} A_{12} + B_1 D_R C_{22} \\ B_R C_{22} \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} \delta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad 4$$

$$y_1 = C_{11} x_1 + C_{12} x_2 \qquad 5$$

$$y_2 = C_{21} x_1 + C_{22} x_2 \quad . \qquad 6$$

La figure 5 représente le système bouclé.

3. Spécifications.

- Stabilité de la boucle:

$$\forall\, x_{BF}(0), x_{BF}(t) \underset{t \to \infty}{\rightarrow} 0, si\, x_2(0) = 0. \qquad 7$$

- Régulation de la sortie:

$$y_1(t) \underset{t \to \infty}{\rightarrow} 0 \,;\, \forall\, x_{BF}(0), \forall\, x_2(0). \qquad 8$$

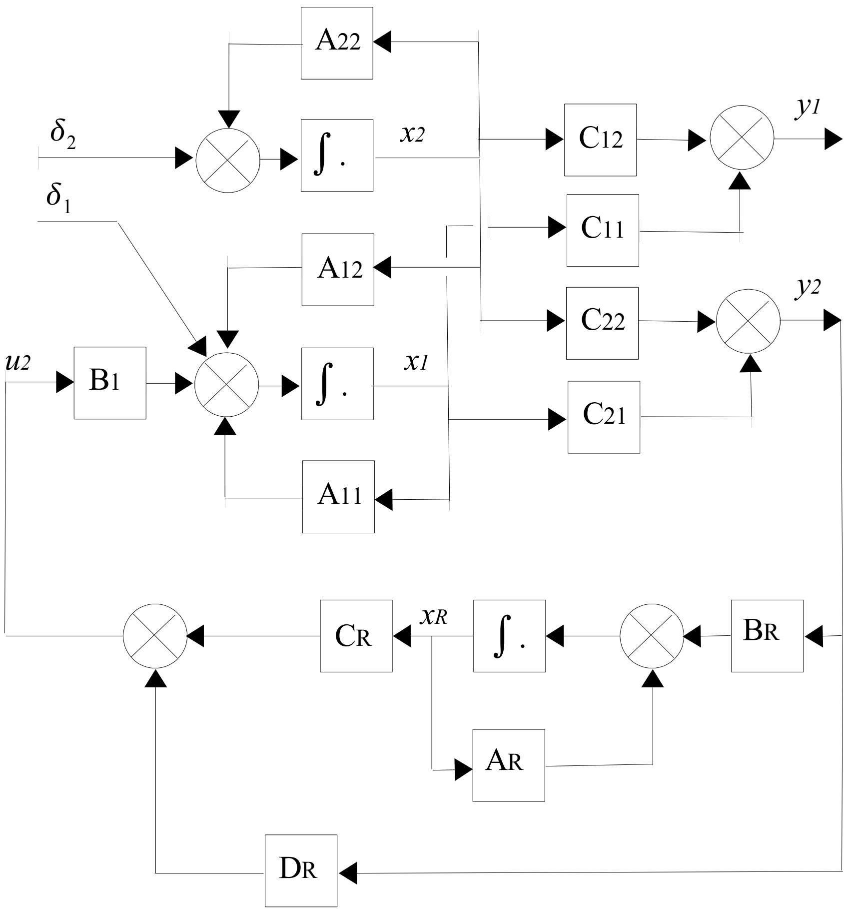

Figure 5

4. Détectabilité

La spécification de régulation porte sur le vecteur $y_1(t)$, qui contient donc les variables à régler. Les entrées du régulateur sont les sorties des capteurs, contenues dans le vecteur $y_2(t)$ des mesures. Il faut donc s'assurer que ces mesures contiennent les informations nécessaires sur les variables à régler, et en particulier que :

$$y_2(t)=0 \Rightarrow y_1(t)=0 \quad . \qquad 9$$

Il faut donc:

$$[C_{21} C_{22}]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=0 \Rightarrow [C_{11} C_{12}]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=0,$$

c'est à dire:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in Ker[C_{21,} C_{22}] \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in Ker[C_{11,} C_{12}]$$

et donc:

$$Ker[C_{21} C_{22}] \subset Ker[C_{11} C_{12}] \qquad 10$$

On dit alors que la paire $([C_{21} C_{22}],[C_{11} C_{12}])$ est détectable.

Il en résulte qu'il existe une transformation Q telle que:

$$y_1 = Q\, y_2 \quad .$$

La relation (10) implique que la dimension de y_2 est plus grande que celle de y_1. ($p_2 \geqslant p_1$)

Il existe donc un sous-espace W de Y_2, qui vérifie:

$$Y_2 = Y_1 \oplus W \qquad 11$$

La transformation Q est donc une projection de Y_2 sur Y_1, et on peut écrire:

$$[C_{21}, C_{22}] = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 \\ C_{11} & C_{12} \end{bmatrix} \qquad 12$$

$$y_2 = \begin{bmatrix} w \\ y_1 \end{bmatrix} \qquad 13$$

où

$$w = E_1 x_1 + E_2 x_2 \quad . \qquad 14$$

Il est donc clair que le vecteur des mesures doit contenir les informations sur les variables à régler.

5. Le modèle interne.

La figure 6 ci-dessous montre le schéma de synthèse canonique : l'état du régulateur x_R est scindé en 2 parties :

$$x_R = \begin{bmatrix} x_{R1} \\ x_{R2} \end{bmatrix}$$

Le principe du modèle interne est vérifié si:

- les modes de la perturbation instable (les valeurs propres de A_{22}) sont recopiés dans le régulateur, commandables de y_2 et observables de u_2. Il suffit que ces modes correspondent aux valeurs propres de A_{R2}. La dimension de cette matrice doit être au moins égale à la dimension de y_1.

Remarque: Il ne s'agit ici que de condition suffisante. Le théorème énonce une condition nécessaire et suffisante plus technique.

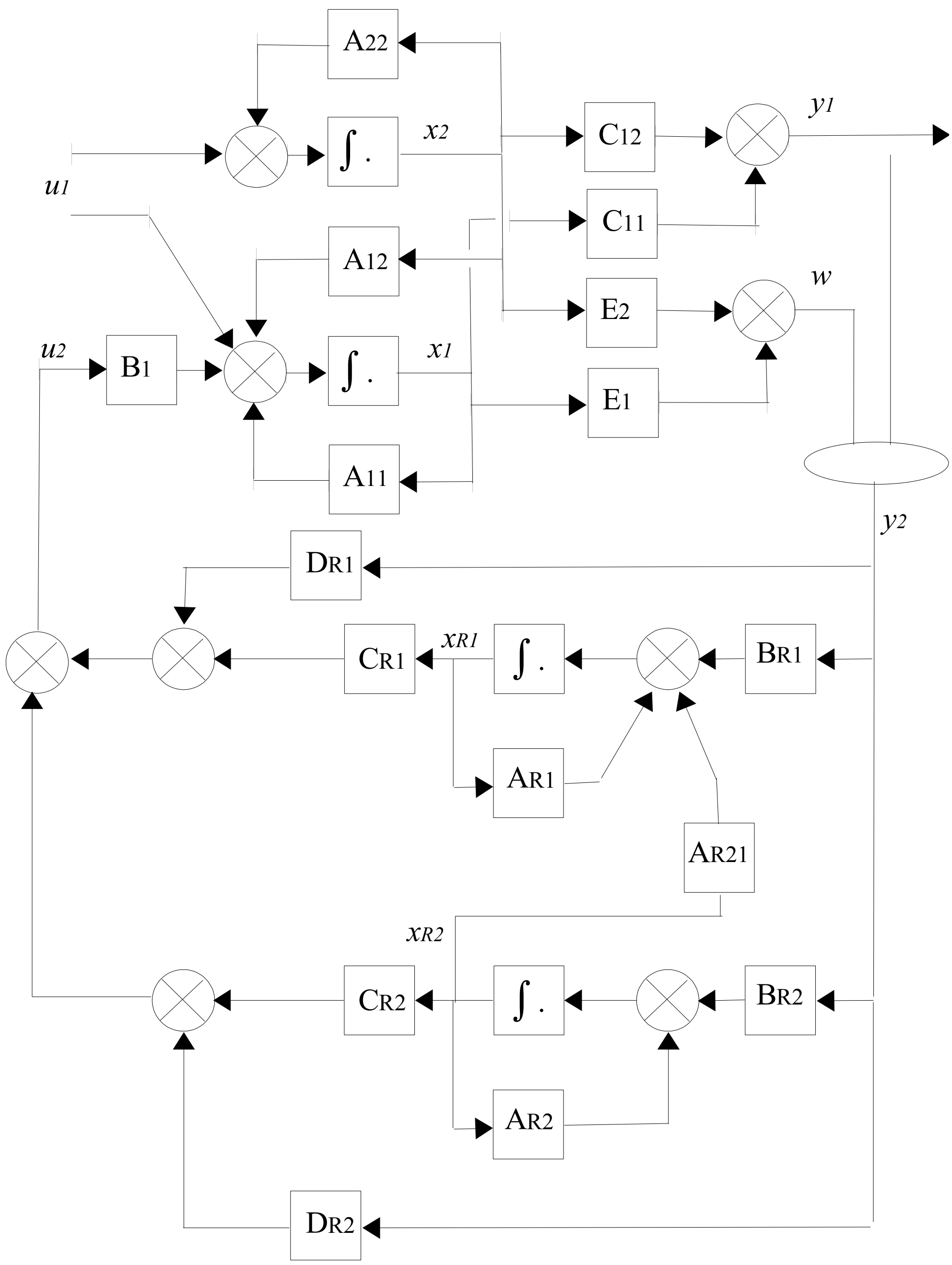

Figure 6

Exemple.

Soit le système:

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_2$$

$$\dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_1$$

$$y_1 = C_1 x_1 + C_2 x_2$$

avec $A_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}, B_1=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}, C_1=[1,0], A_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}, B_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, C_2=[1,0]$

Le signal $C_2 x_2$ est de la forme $\sin(\omega t)$, de pulsation 1 rad/s mais d'amplitude inconnue (qui dépend de la condition initiale).

L'objectif de commande est d'annuler asymptotiquement le signal *$y_1(t)$*.

On suppose par ailleurs (dans un premier temps) que l'on peut mesurer l'état x_1.

On va donc réaliser un système augmenté, comportant un modèle interne du générateur de bruit sinusoïdal, puis calculer la commande optimale LQ sur l'état augmenté.

La figure 7 donne le schéma-bloc.

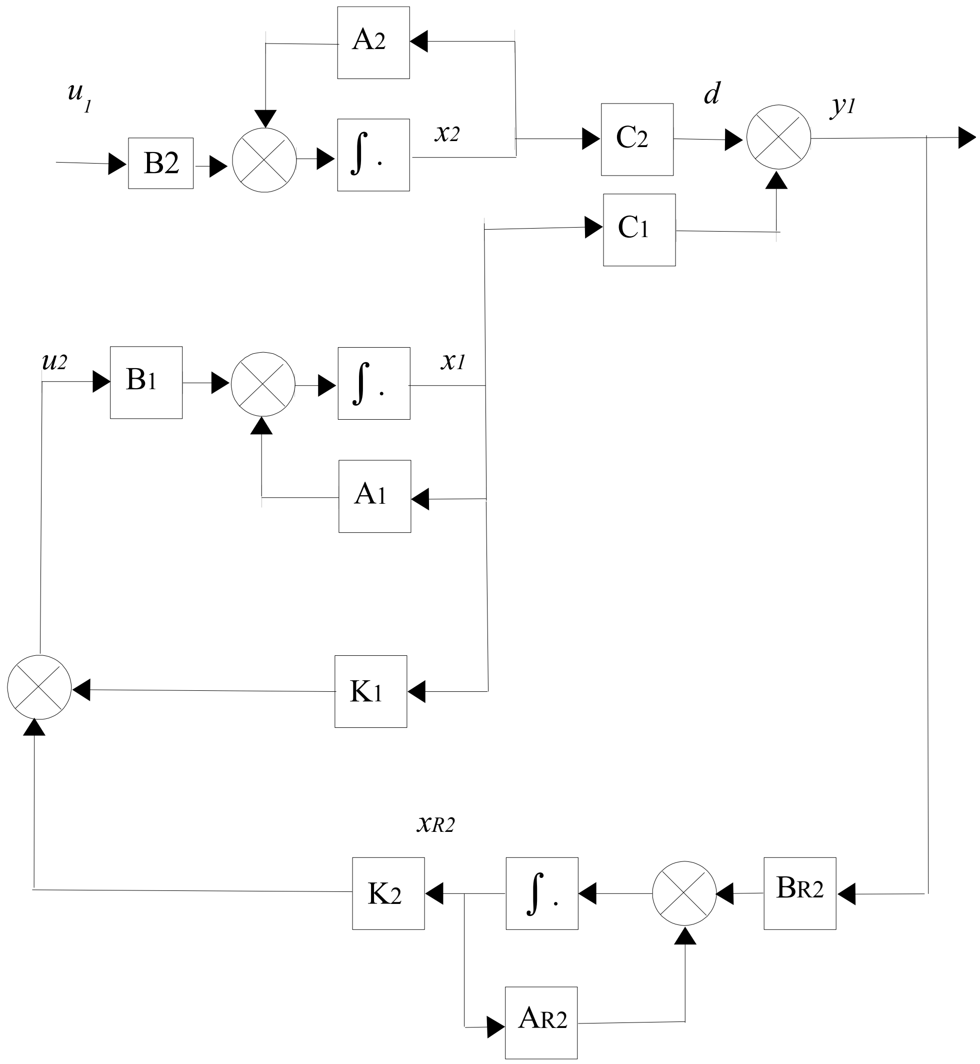

Figure 7

Le modèle interne de la perturbation est ici :

$\dot{x}_{R2}=A_{R2}x_{R2}+B_{R2}y_1, A_{R2}=A_2, B_{R2}=B_2$.

Le modèle d'état du système augmenté s'écrit donc:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_{R2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_1] & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ [B_{R2}.C_1] & [A_{R2}] \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_{R2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [B_1] \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} . [u_2]$$

On peut alors se donner le critère LQ sur cet état augmenté:

$$J_{LQ} = \int_0^\infty \{[x_1^T, x_{R2}^T] Q \begin{bmatrix} x_1 \\ x_{R2} \end{bmatrix} + R u_2^2\} dt, \; Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 2.$$

Le résultat donne alors les matrices de retour de l'état augmenté:

$$K_1 = [\sqrt{2}, \sqrt{2}/2], K_2 = [-0,6933, 0,7207].$$

Les simulations numériques montrent:

1. L'évolution de y_1:

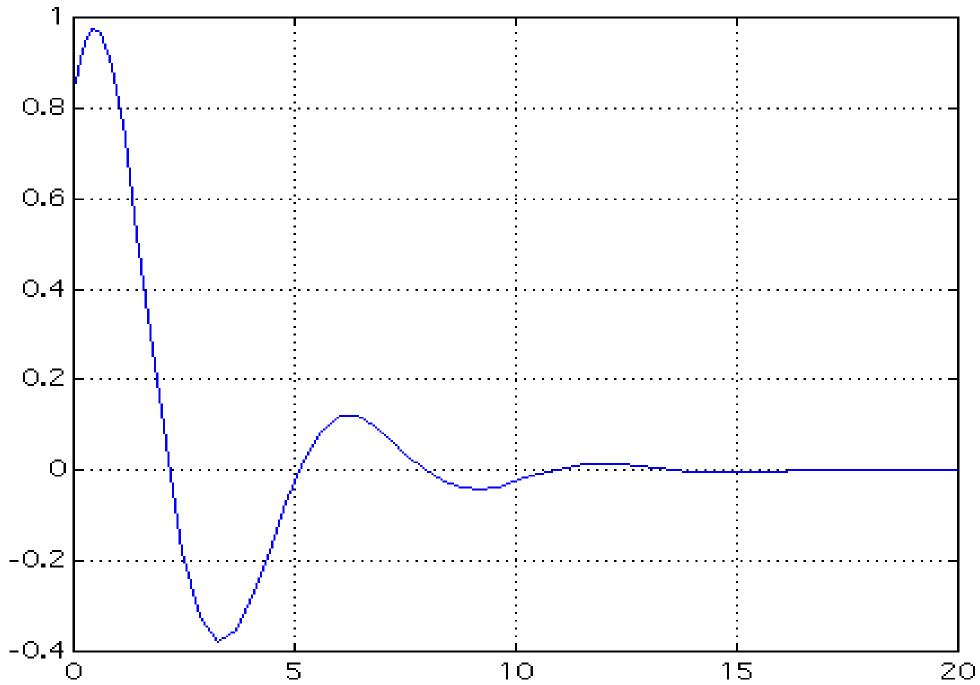

Figure 8

2. l'évolution de la commande u_2:

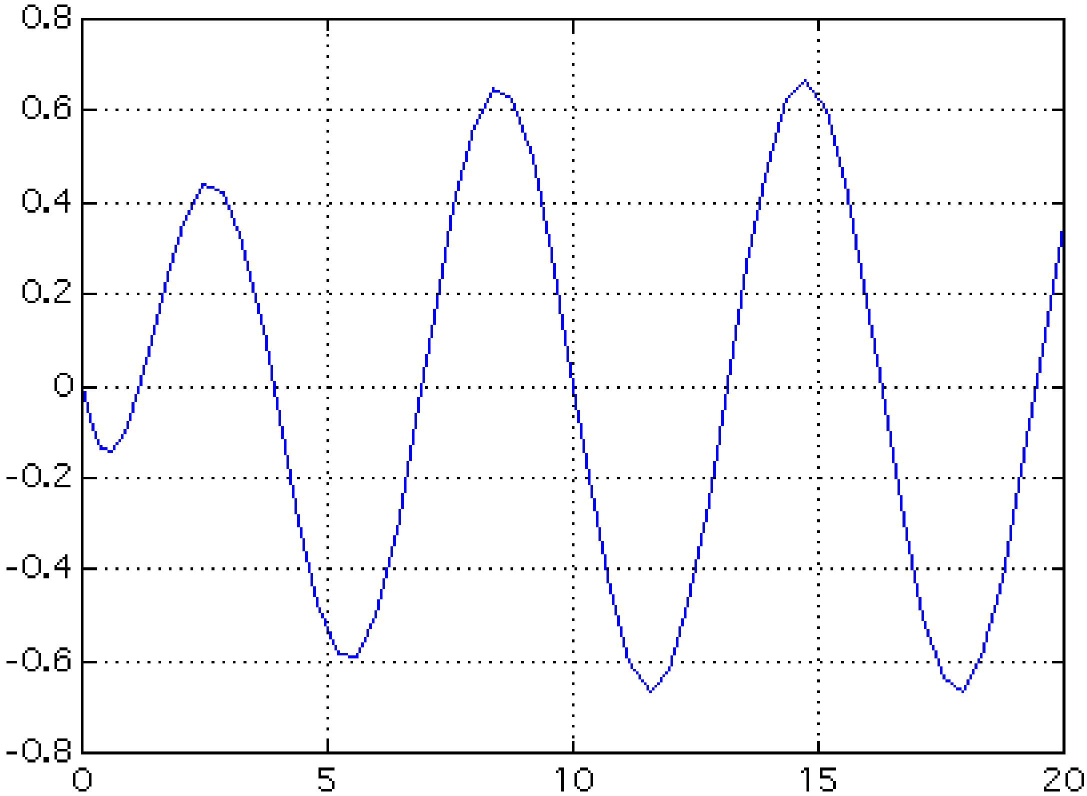

Figure 9

Cette dernière figure 9 montre que la commande ne tend pas asymptotiquement vers zéro, mais reproduit un signal sinusoïdal.

On peut également tracer le diagramme de Bode de la boucle fermée entre le signal de bruit d et la sortie y_1 . On constate un "trou" dans cette réponse fréquentielle à la pulsation 1 rad/s, pulsation correspondant au bruit à rejeter.

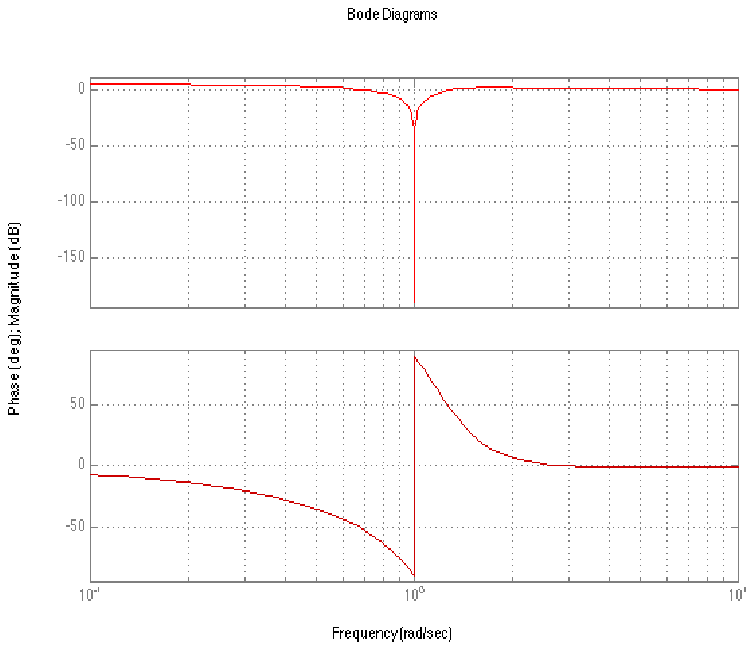

Figure 10

L'incorporation du modèle interne de la perturbation a généré les zéros de transmission dans la boucle fermée, nécessaires à la simplification des pôles instables du générateur de bruit. Les modes oscillants de ce générateur sont donc rendus inobservables de la sortie.

Cependant, la figure 9 montre que ce signal de bruit est reproduit sur la commande : dans le cas de bruits instables divergents (de type exponentiel) la commande est également divergente. Ce qui conduit (éventuellement) à la saturation des actionneurs.

Toutefois, ce schéma de commande à modèle interne est intéressant du point de vue de poursuite asymptotique de consigne.

III. Commandes LQG sur modèle augmenté.

Bibliographie:

... *Linear Optimal Control Systems,* Kwakernaak & Sivan, Wiley 1972.

... *Linear Systems,* Kailath, Englewoods Cliffs, NJ, Prentice-Hall 1979.

... *Multivariable feedback design,* J. M. Maciejowski, Addison Wesley 1989.

1 . Rappels

Le problème Linéaire Quadratique Gaussien consiste à trouver le retour d'état et l'observateur optimaux vis à vis d'un critère stochastique. L'hypothèse fondamentale est que les bruits sont blancs et gaussiens.

Soit le système :

$$\dot{x}=A\,x+B\,u+w \qquad 15$$
$$y=C\,x+v$$

Les bruits *w* et *v* sont supposés indépendants, blancs et gaussiens, c'est à dire :

$$E\left\{\begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix}\left[w^T(\tau),\, v^T(\tau)\right]\right\}=\begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix}\delta(t-\tau) \qquad 16$$

Les matrices W (n x n) et V (l x l) sont les matrices de covariance de l'intensité instantanée des bruits, donc symétriques, définies positives.

La commande LQG stationnaire (à horizon infini) consiste à calculer le retour d'état K et le gain d'observateur L tel que le critère

$$J_{LQG}=E\{\int_0^\infty [x^T Q\,x+u^T R\,u]dt\}$$

soit minimisé.

Le schéma-bloc est :

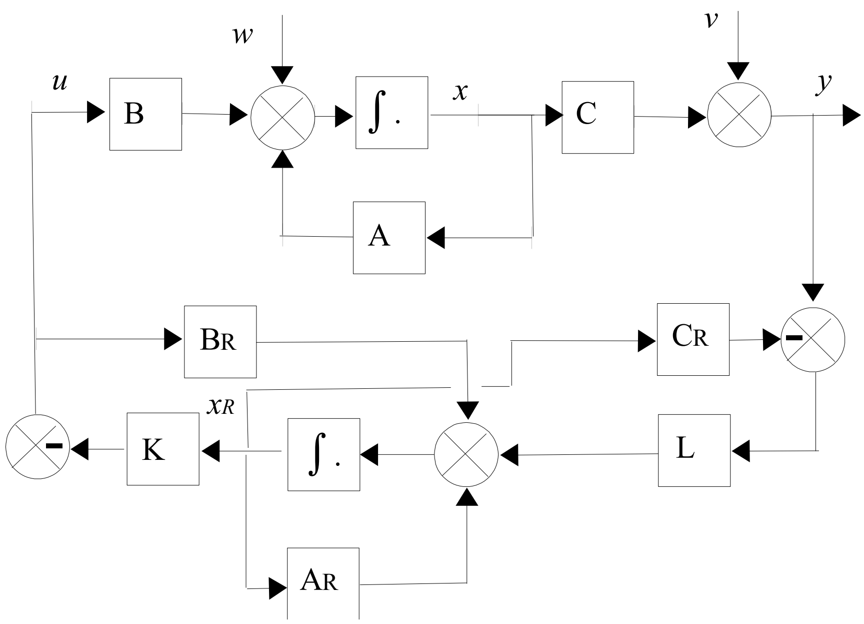

Figure 11

2 . LQG à modèle interne

Lorsque l'état de la partie commandable n'est pas mesurable et/ou bruité, il convient d'implanter un observateur optimal.

Soit le système:

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_2 + G w$$

$$\dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_1$$

$$y_1 = C_1 x_1 + C_2 x_2 + v$$

avec

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C_1 = [1,0], A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_2 = [1,0] \quad .$$

Comme précédemment, le modèle d'état du système, augmenté du modèle interne, s'écrit:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_{R2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_1] & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ [B_{R2}.C_1] & [A_{R2}] \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_{R2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [B_1] \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} . [u_2]$$

On construit l'observateur de la partie commandable :

$$\dot{x}_{R1} = A_{R1} x_{R1} + B_{R1} u_2 + L_1 \epsilon$$

$$\epsilon = y_1 - C_{R1} x_{R1}$$

avec

$$A_{R1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, B_{R1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

La matrice L_1 minimise la variance:

$$J_{obs} = E\{\int_0^\infty [x_1 - x_{R1}]^T [x_1 - x_{R1}] dt\},$$

avec :

$$E\left\{\begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix} [w(\tau), v(\tau)]\right\} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix} \delta(t-\tau)$$

On obtient ainsi les matrices de gain:

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1{,}423 \\ 0{,}513 \end{bmatrix}, K_1 = [1{,}4140\,;\, 0{,}7071], K_2 = [-0{,}6933\,;\, 0{,}7207] \quad .$$

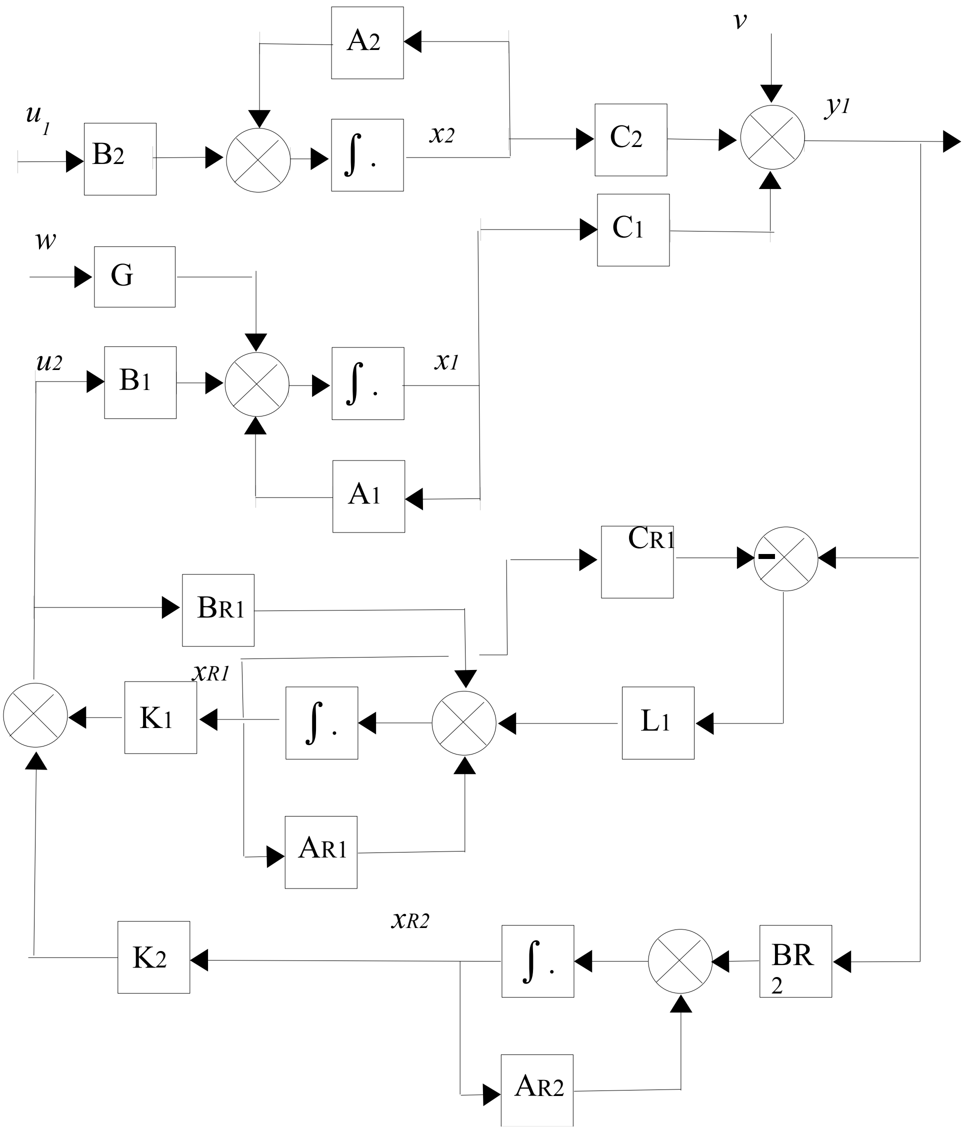
A2
v
u1
B2
∫ .
x2
C2
y1
w
G
C1
u2
B1
∫ .
x1
A1
CR1
BR1
xR1
K1
∫ .
L1
AR1
xR2
K2
∫ .
BR 2
AR2

Figure 12

Les résultats de simulation:

1. L'évolution de y_1:

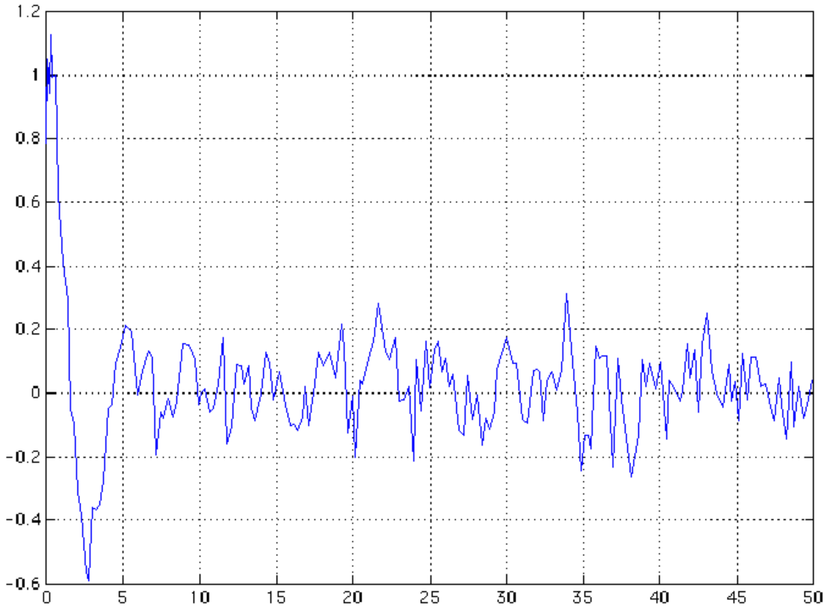

Figure 13

2. l'évolution de la commande u_2:

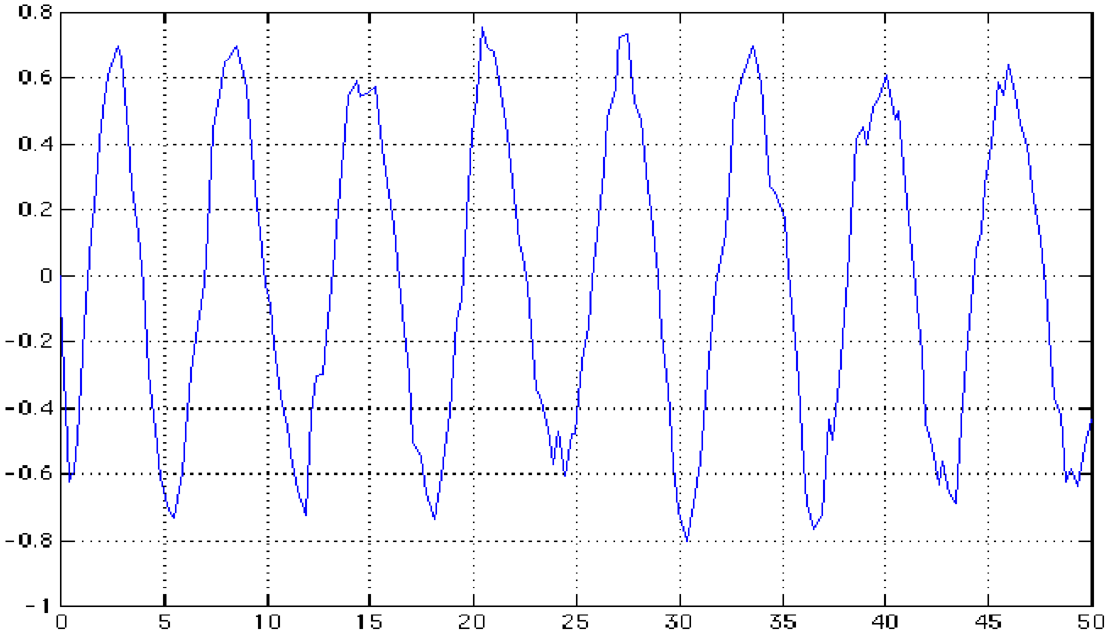

Figure 14

3 . Bruit coloré.

On appelle *bruit coloré* le signal de sortie d'un système dynamique (linéaire stationnaire): le *filtre formeur* du bruit, dont l'entrée est un bruit blanc.

Ainsi, on peut généraliser la notion de système bruité selon le schéma de la figure 15, où w est un bruit coloré de sortie et v un bruit de mesure :

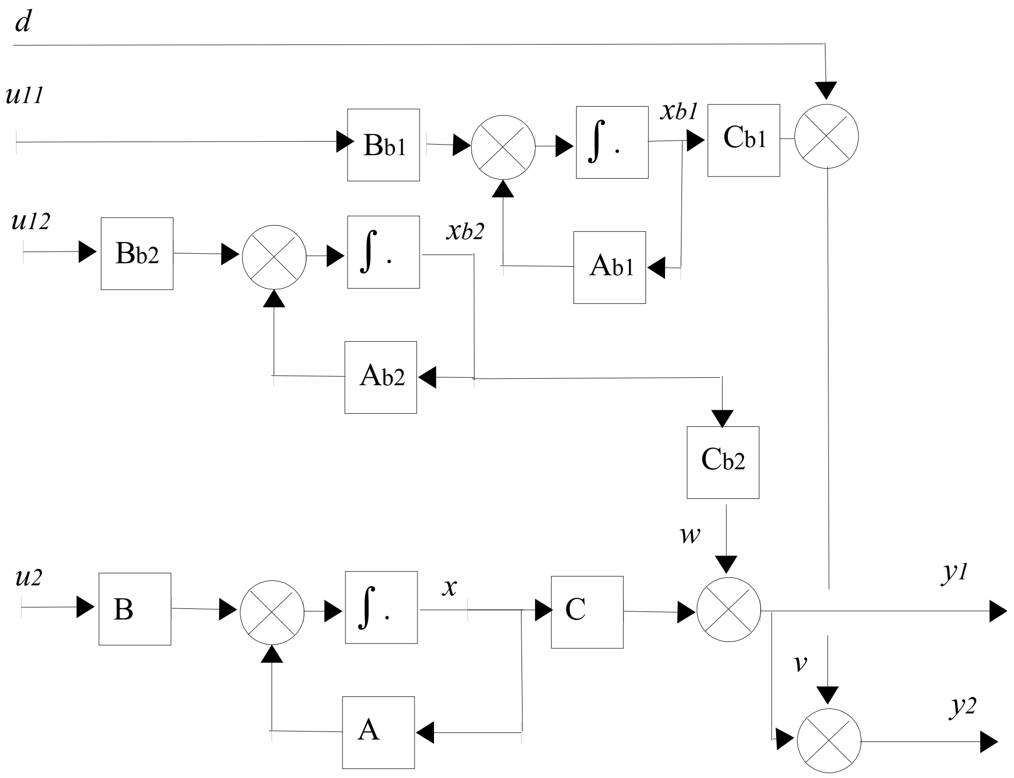

Figure 15

Ce schéma-bloc représente le *modèle augmenté* du système à régler et des bruits. Les entrées d, u_{11} et u_{12} sont supposées être des bruits blancs gaussiens (indépendants), tels que :

$$E\left\{\begin{bmatrix} d(t) \\ u_{11}(t) \\ u_{12}(t) \end{bmatrix}\left[d^T(\tau), u_{11}^T(\tau), u_{12}^T(\tau)\right]\right\} = \begin{bmatrix} V & 0 & 0 \\ 0 & U_{11} & 0 \\ 0 & 0 & U_{12} \end{bmatrix}\delta(t-\tau) \qquad 17$$

Ce modèle augmenté a pour équations d'état :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{b1} \\ \dot{x}_{b2} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{b1} & 0 & 0 \\ 0 & A_{b2} & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{b1} \\ x_{b2} \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{bmatrix} u_2 + \begin{bmatrix} B_{b1} & 0 \\ 0 & B_{b2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix} \qquad 18$$

$$y_1=[0, C_{b2}, C]\begin{bmatrix} x_{b1} \\ x_{b2} \\ x \end{bmatrix} \qquad 19$$

$$y_2=[C_{b1}, C_{b2}, C]\begin{bmatrix} x_{b1} \\ x_{b2} \\ x \end{bmatrix}+d \qquad 20$$

On écrit donc ce modèle sous la forme condensée :

$$\dot{x}_{aug}=A_{aug}\,x_{aug}+B_{aug\,1}\,u_1+B_{aug\,2}\,u_2$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C_{aug\,1} \\ C_{aug\,2} \end{bmatrix}x_{aug}+\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}d \qquad 21$$

Le critère LQG :

$$J_{LQG}=E\{\int_0^\infty [y_1^T\,Q\,y_1+u_2^T\,R\,u_2]\,dt\} \qquad 22$$

ou encore:

$$J_{LQG}=E\{\int_0^\infty [x_{aug}^T Q_c\,x_{aug}+u_2^T\,R\,u_2]\,dt\}$$

avec :

$$x_{aug}=\begin{bmatrix} x_{b1} \\ x_{b2} \\ x \end{bmatrix}, Q_c=C_{aug1}^T\,Q\,C_{aug\,1}$$

où Q_c est symétrique définie positive si Q l'est,
permet de calculer:

- la matrice K de retour d'état :

$$K=R^{-1}\,B_{aug\,2}^T P_c \qquad 23$$

où P_c est solution de l'équation algébrique de Riccati :

$$P_c\,A_{aug}+A_{aug}^T\,P_c+Q_c-P_c\,B_{aug\,2}\,R^{-1}\,B_{aug\,2}^T P_c=0 \qquad 24$$

- la matrice L de gain de l'observateur :

$$L=P_f\,C_{aug\,2}^T\,V^{-1} \qquad 25$$

où P_f est solution de l'équation algébrique de Riccati :

$$A_{aug} P_f + P_f A_{aug}^T + Q_f - P_f C_{aug\,2}^T V^{-1} C_{aug\,2} P_f = 0 \qquad 26$$

dans laquelle :

$$Q_f = B_{aug\,1} \begin{bmatrix} U_{11} & 0 \\ 0 & U_{12} \end{bmatrix} B_{aug\,1}^T \quad . \qquad 27$$

Le régulateur est de la forme représentée à la figure 16:

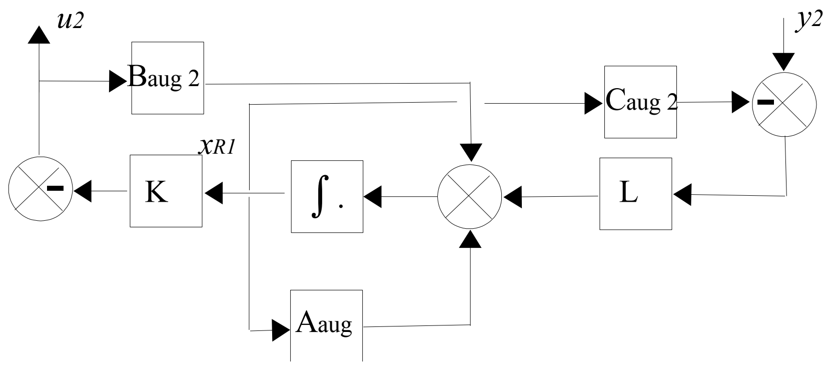

Figure 16

On peut alors écrire :

$$u_2(p) = -K[pI - A_{aug} + L C_{aug\,2} + B_{aug\,2} K]^{-1} L y_2(p) \qquad 28$$

IV. Optimisation L_2 du problème standard.

1. Rappels sur la norme L_2.

Soit *x(t)* un vecteur de signaux. Alors on appelle *norme L_2* de ce vecteur la quantité :

$$\|x\|_2 = [\int_{-\infty}^{\infty} [x^T(t) x(t)] dt]^{1/2} \qquad 29$$

si l'intégrale converge. Par le théorème de Parseval-Bessel, si $x(j\omega)$ est la transformée de Fourier de *x(t)* on obtient également :

$$\|x\|_2 = [\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [x^T(-j\omega) x(j\omega)] d\omega]^{1/2} \qquad 30$$

Le vecteur *x* est dit L_2 si ces intégrales convergent, c'est à dire que le vecteur de signaux a une "énergie" finie.

2. *Transmission de signaux aléatoires.*

On suppose maintenant que le vecteur *x(t)* est un vecteur de signaux aléatoires centrés dont les propriétés sont :

$E\{x(t)\}=0$

$E\{x(t)x^T(t)\}$ est la variance et $\Phi_{xx}(\omega)$ est la densité spectrale de puissance (DSP), définie comme la transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation :

$$\Phi_{xx}(\omega)=F\{E\{x(t)x^T(t+\tau)\}\}$$

Par ailleurs :

$$x^T x=tr(x x^T)\Rightarrow tr(E\{x x^T\})=E\{x^T x\} \quad . \qquad 31$$

Soit un système linéaire SISO (monovariable) défini par :

$$y(p)=G(p)u(p)$$

et soit $\Phi_{uu}(\omega)$ la DSP de *u(t)*, on calcule alors la DSP de *y(t)* :

$$\Phi_{yy}(\omega)=|G(j\omega)|^2\Phi_{uu}(\omega) \quad .$$

Dans le cas MIMO:

$$E\{y y^T\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_{yy}(\omega)d\omega \quad ,$$

$$E\{y^T y\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}tr[\Phi_{yy}(\omega)]d\omega \quad .$$

Si *W* est une matrice symétrique définie positive de dimension adéquate,

$$E\{y^T W y\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}tr[W\Phi_{yy}(\omega)]d\omega \quad . \qquad 32$$

Si *G(p)* est une matrice de transfert stable, alors :

$$y(p)=G(p)u(p)\Rightarrow\Phi_{yy}(\omega)=G(j\omega)\Phi_{uu}(\omega)G^T(-j\omega) \quad .$$

Comme :

$$tr[W\Phi_{yy}(\omega)]=tr[W^{1/2}\Phi_{yy}(\omega)W^{1/2}]=tr[W^{1/2}G(j\omega)\Phi_{uu}(\omega)G^T(-j\omega)W^{1/2}] \qquad 33$$

on déduit que :

$$E\{y^T W y\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}tr[W^{1/2}G(j\omega)\Phi_{uu}(\omega)G^T(-j\omega)W^{1/2}]d\omega \quad . \qquad 34$$

On définit les valeurs singulières d'une matrice A à coefficients complexes par :

$\sigma_i(A)=\sqrt{\lambda_i(A^A A)}$, où $A^A(j\omega)=A^T(-j\omega)$.

On a donc $tr[A^A A]=\sum_i \sigma_i^2(A)$

et

$$E\{y^T W y\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_i \sigma_i^2[\Phi_{uu}^{1/2}(\omega)G(j\omega)W^{1/2}]d\omega \qquad 35$$

Définition:

La norme L_2 d'une matrice de transfert $G(j\omega)$ est définie par :

$$\|G\|_2=[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} tr[G(j\omega)G^T(-j\omega)]d\omega]^{1/2} \qquad 36$$

Remarque:

Si $\Phi_{uu}(\omega)=I$, alors :

$$E\{y^T W y\}=\|G W^{1/2}\|_2^2 \qquad 37$$

3. *Interprétation fréquentielle de LQG.*

Soit le système des équations (15) et (16):

$$\dot{x}=Ax+Bu+w \qquad 38$$

$$y=Cx+v$$

Les bruits w et v sont supposés indépendants, blancs et gaussiens, c'est à dire :

$$E\left\{\begin{bmatrix} w(t)\\ v(t)\end{bmatrix}\left[w^T(\tau), v^T(\tau)\right]\right\}=\begin{bmatrix} W & 0\\ 0 & V\end{bmatrix}\delta(t-\tau) \qquad 39$$

Les matrices W (n x n) et V (l x l) sont les matrices de covariance des amplitudes instantanées des bruits, donc symétriques, définies positives.

La commande LQG stationnaire (à horizon infini) consiste à calculer le retour d'état K et le gain d'observateur L tel que le critère

$$J_{LQG}=E\{\int_0^{\infty}[x^T Q x+u^T R u]dt\}$$

soit minimisé.

Soient $z=\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$ et $M=\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$ symétrique définie positive; alors

$$J_{LQG}=E\{\int_0^{\infty}[z^T(t)\,M\,z(t)]dt\} \qquad 40$$

Comme $[z^T(t)\,M\,z(t)]$ est une forme quadratique (donc positive) ce critère LQG est minimum si et seulement si la quantité $J=E\{z^T(t)\,M\,z(t)\}$ est minimisée, $\forall\, t>0$:

$$J=E\{z^T(t)\,M\,z(t)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} tr[M\,\Phi_{zz}(\omega)]d\omega \qquad 41$$

Soit $H(j\omega)$ la matrice de transfert du système d'entrée $\begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix}$ et de sortie $z=\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$, alors:

$$\Phi_{zz}(\omega)=H(j\omega)\begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix}H^T(-j\omega) \qquad 42$$

donc:

$$J=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} tr[M^{1/2}H(j\omega)\begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix}H^T(-j\omega)\,M^{1/2}]d\omega \qquad 43$$

$$J=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} tr\left[\begin{bmatrix} Q^{1/2} & 0 \\ 0 & R^{1/2} \end{bmatrix}H(j\omega)\begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix}H^T(-j\omega)\begin{bmatrix} Q^{1/2} & 0 \\ 0 & R^{1/2} \end{bmatrix}\right]d\omega \qquad 44$$

En développant le calcul selon la relation (35):

$$J=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\begin{bmatrix} \sum\sigma_i^2(Q^{1/2}H_{11}(j\omega)W^{1/2}) \\ +\sum\sigma_i^2(Q^{1/2}H_{12}(j\omega)V^{1/2}) \\ +\sum\sigma_i^2(R^{1/2}H_{21}(j\omega)W^{1/2}) \\ +\sum\sigma_i^2(R^{1/2}H_{22}(j\omega)V^{1/2}) \end{bmatrix}d\omega \qquad 45$$

Si δ_1 et δ_2 sont des bruits blancs gaussiens de variance unitaire, le schéma-bloc du système est :

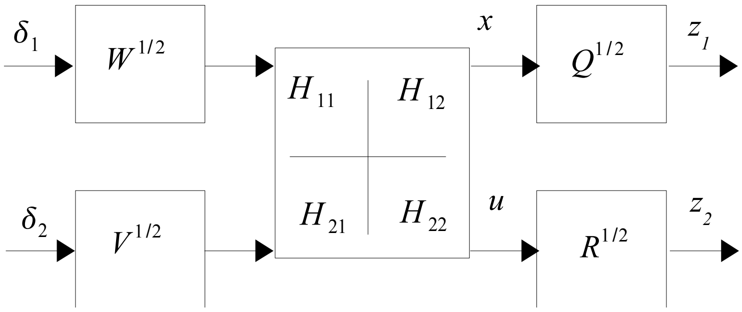

Figure 17

Soit $T(j\omega)$ la matrice de transfert de $\begin{bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\end{bmatrix}$ vers $z=\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}$, la commande optimale (*u = f(y)*) minimise le critère :

$$J=\|T(j\omega)\|_2^2 \qquad 46$$

4 . Optimisation L_2 et modelage de transfert de boucle (Loop Shaping)

Reprenons le système du chap. III, § 3, figure 15, équations (17) à (21). Soient les matrices de transfert :

$$F(p)=C[pI-A]^{-1}B\,,F_v(p)=C_{b1}[pI-A_{b1}]^{-1}B_{b1}\,,F_w(p)=C_{b2}[pI-A_{b2}]^{-1}B_{b2}\quad .$$

Soit *K(p)* la matrice de transfert du régulateur à calculer. Le système bouclé peut se représenter selon la figure 18 :

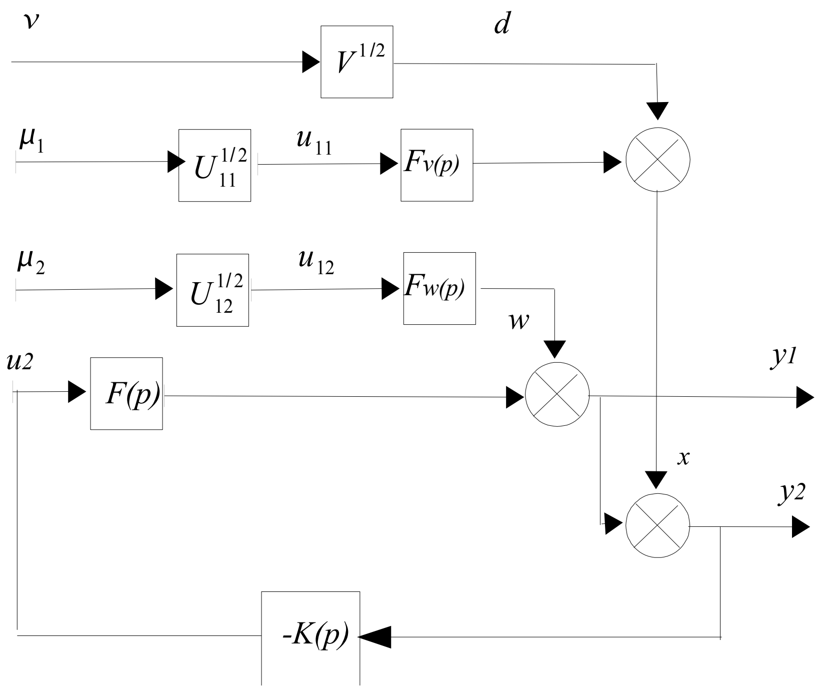

Figure 18

Les entrées exogènes (ν,μ_1,μ_2) vérifient :

$$E\left\{\begin{bmatrix}\nu(t)\\ \mu_1(t)\\ \mu_2(t)\end{bmatrix}\left[\nu^T(\tau),\mu_1^T(\tau),\mu_2^T(\tau)\right]\right\}=\begin{bmatrix}I&0&0\\0&I&0\\0&0&I\end{bmatrix}\delta(t-\tau) \qquad 47$$

On peut écrire les matrices de transfert de sensibilité et sensibilité complémentaire en boucle fermée:

$$S_i=[I+KF]^{-1};\qquad S_o=[I+FK]^{-1}$$
$$T_i=KF[I+KF]^{-1}\qquad T_o=[I+FK]^{-1}FK \qquad 48$$

et exprimer les vecteurs u_2 et y_1 :

$$\begin{aligned} u_2 &= -S_i K V^{1/2} \nu - S_i K F_v U_{11}^{1/2} \mu_1 - S_i K F_w U_{12}^{1/2} \mu_2 \\ y_1 &= -T_o V^{1/2} \nu - T_o F_v U_{11}^{1/2} \mu_1 + S_o F_w U_{12}^{1/2} \mu_2 \end{aligned} \qquad 49$$

La commande LQG qui minimise le critère de l'équation (22) minimise également :

$$J = E\{ y_1^T Q y_1 + u_2^T R u_2 \} \qquad 50$$

En appliquant les relations (41) à (45), on trouve:

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \sum \sigma_i^2 (Q^{1/2} T_o V^{1/2}) \\ + \sum \sigma_i^2 (Q^{1/2} T_o F_v U_{11}^{1/2}) \\ + \sum \sigma_i^2 (Q^{1/2} S_o F_w U_{12}^{1/2}) \\ + \sum \sigma_i^2 (R^{1/2} S_i K F_v U_{11}^{1/2}) \\ + \sum \sigma_i^2 (R^{1/2} S_i K V^{1/2}) \\ + \sum \sigma_i^2 (R^{1/2} S_i K F_w U_{12}^{1/2}) \end{bmatrix} d\omega \qquad 51$$

Ce critère représente donc le carré de la norme L_2 de la matrice de transfert des entrées exogènes ν, μ_1, μ_2 vers les sorties u_2 *et* y_1 .

On peut remarquer que si on force $V \to 0$ et $R \to 0$, il reste :

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum \sigma_i^2 (Q^{1/2} T_o F_v U_{11}^{1/2}) + \sum \sigma_i^2 (Q^{1/2} S_o F_w U_{12}^{1/2}) \right] d\omega \qquad 52$$

Il s'agit alors de minimiser la norme L_2 des matrices de sensibilité et sensibilités complémentaires, pondérées en fréquences. C'est la procédure *de modelage de sensibilités* (Loop Shaping).

Dans le cas SISO, ce critère porte sur les modules des fonctions de sensibilité et sensibilité complémentaire :

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (Q \; |T|^2 |F_v|^2 U_{11} + \; Q \; |S|^2 \; |F_w|^2 U_{12}) \; d\omega \qquad 53$$

Le module de S est rendu *petit* dans les plages de fréquences où le module de F_w est *grand,* alors que le module de T est rendu *petit* dans les plages de fréquences où le module de F_v est *grand.*

Bien entendu les contraintes habituelles persistent:

- en basses fréquences:
  - $|T|\approx 1$ quel que soit $|F_v|$
  - $|S|\approx 1/|F_w|$

- en hautes fréquences:
  - $|T|\rightarrow 0$ mais il faut que $|F_v|<\infty$ pour que l'intégrale converge,
  - $|S|\rightarrow 1$ mais il faut que $|F_w|\rightarrow 0$ pour que l'intégrale converge.

Exemple

Soient les fonctions de transfert:

$$F(p)=\frac{30}{p^2+p+1}$$

$$F_v(p)=\frac{1000\text{p}+3000}{p^2+60\text{p}+900}$$

$$F_w(p)=\frac{100}{p^2+0{,}1\,p}$$

Le critère LQG:

$$J_{LQG}=E\{\int_0^\infty [y_1^T\,y_1+u_2^T\,R\,u_2]\,dt\}$$

avec

$$\begin{bmatrix} U_{11} & 0 \\ 0 & U_{12} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad R=0{,}001\,;\,V=0{,}001$$

donne le régulateur :

$$K(p)=\frac{4{,}34\,e4\,p^5+2{,}75\,e6\,p^4+4{,}78\,e7\,p^3+1{,}37\,e8\,p^2+1{,}35\text{e}8\,p+9\text{e}7}{p^6+3{,}16\text{e}4\,p^5+1{,}68\text{e}6\,p^4+4{,}33\text{e}7\,p^3+2{,}68\text{e}8\,p^2+2{,}64\text{e}7\,p+3001}$$

le diagramme de Black de la boucle ouverte :

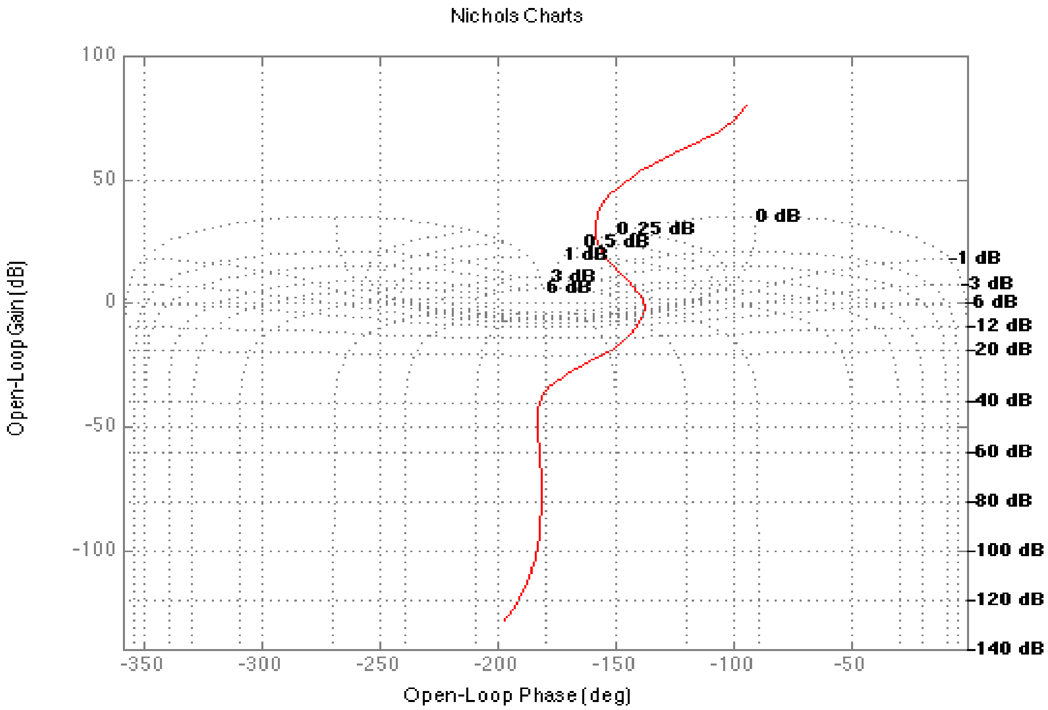

Figure 19

le diagramme de Bode des fonctions de sensibilité et des pondérations (module):

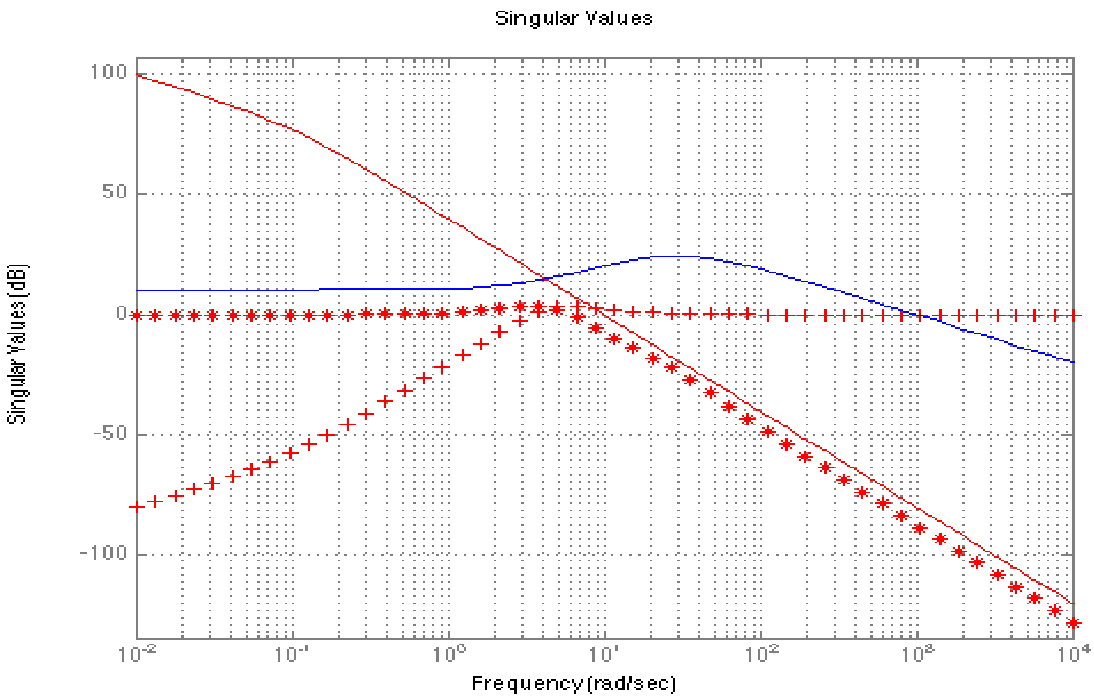

Figure 20

(+ : S ; --- : F_w; * : T ; --- F_v)

5 . Le problème standard.

On peut généraliser les procédures précédentes pour donner une formulation générique du problème de commande optimale: c'est le problème standard.

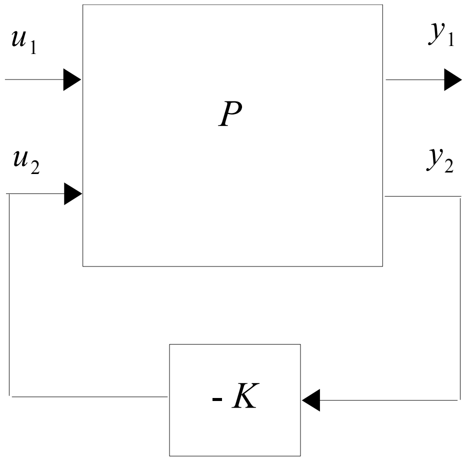

Figure 21

Le système P contient :

- le modèle du système à régler;
- les modèles de bruit et des références ou consigne;
- les pondérations représentant les objectifs de commande.

Les vecteurs exogènes sont :

- u_1 : contient les entrées ;
- y_1 : contient les variables à régler, les erreurs à minimiser, etc : doivent vérifier la propriété de *détectabilité* depuis le vecteur des mesures.

Les vecteurs endogènes sont :

- u_2 : vecteur des commandes qui doivent rester bornées, si possible inférieures aux niveau des saturation d'actionneur ;
- y_2 : vecteur des mesures.

Le problème standard d'optimisation L_2 consiste à calculer le régulateur K tel que $\|T\|_2$ soit minimisée., où T est la matrice de transfert de boucle fermée :

$$y_1 = T\, u_1 \quad .$$

On écrit :

$$K = Argmin\{\|T\|_2\} \quad . \qquad 54$$

Comme :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad 55$$

on calcule facilement :

$$T = [-P_{12}(I + K P_{22})^{-1} K P_{21} + P_{11}] \qquad 56$$

ou encore :

$$T = [-P_{12} K (I + P_{22} K)^{-1} P_{21} + P_{11}] \qquad 57$$

La norme L_2 de matrice de transfert est une norme qui évalue le gain en *énergie* du vecteur de signaux de sortie par rapport au vecteur d'entrée. Ce gain est une intégrale sur l'espace des fréquences. Il en résulte que le minimum de cette norme est un résultat global, obtenu "en moyenne" sur l'ensemble des fréquences.. Il est en particulier pratiquement impossible de modeler précisément les sensibilités dans des plages réduites de fréquences.

Dès 1981, Zames, Doyle et Athans (et quelques autres) ont utilisé la norme H_∞ pour exprimer le critère d'optimisation. La solution numérique au problème d'optimisation n'a été publiée qu'en 1989, par Glover, Doyle, Kargonekar et Francis.

Ce sera l'objet du cours de commande robuste en Master 2!