

Université Bordeaux 1
Master 1 EAPS-ESA

Représentations d'état
des systèmes linéaires
à temps discret.

Benoît Bergeon
Professeur

2013-2014

Table des matières

1. Introduction.....	4
2. Discrétisation des équations d'état.....	5
3. Représentation d'état pseudo-continue des systèmes linéaires à temps discret.....	6
4. Matrices de transfert.....	8
5. Stabilité.....	9
1. Valeurs propres.....	9
2. Lyapunov.....	10
6. LQ-LQG.....	10
1. Retour d'état déterministe.....	10
2. LQ à temps discret.....	11
3. Observateur de Kalman à temps discret.....	12
7. Exemple.....	13
8. Conclusion.....	16
9. Bibliographie.....	16

1. Introduction

Les systèmes physiques pour lesquels on est amené à réaliser des systèmes de commande automatique sont analogiques, et évoluent dans le temps considéré comme continu ($t \in \mathbb{R}$).

L'aspect dynamique de ces systèmes est décrit par des équations différentielles que l'on suppose ici linéaires (vérifient le théorème de superposition) et stationnaires (coefficients constants). Cette hypothèse forte et contraignante suppose que l'on a effectué la modélisation avec soin, en précisant les domaines de fonctionnement dans lesquels cette hypothèse est acceptable.

Dans ce contexte, 2 formes de représentation sont utilisées pour l'analyse et la synthèse des systèmes de commande automatique:

- la fonction ou la matrice de transfert;
- la représentation d'état.

La fonction de transfert a l'avantage d'être d'utilisation simple, mais cette simplicité est perdue dans le cas de matrice (multivariable) de transfert. De plus, les conditions initiales ne sont pas facilement prises en compte, et seules les parties observables et gouvernables sont représentées. Malgré tout, les représentations fréquentielles, à la base de ces représentations, donnent une vision irremplaçable sur les comportements externes des systèmes.

Par ailleurs, la représentation d'état permet d'utiliser les techniques de calcul disponibles en algèbre linéaire, et des outils de synthèse puissants ont pu être développés: placement de pôles, commande optimale linéaire quadratique, commande linéaire quadratique gaussienne, commande H_∞ , μ -synthèse,

En ce qui concerne les réalisations concrètes de systèmes de commande, on fait de plus en plus appel aux calculateurs numériques. Il est en effet plus facile de modifier un programme de calcul qu'un circuit électronique, et le calculateur peut effectuer d'autres opérations en même temps qu'il calcule et applique la commande.

Les calculateurs numériques effectuent des suites d'opérations élémentaires dont chacune nécessite un temps d'exécution fini non nul. Le temps du calculateur n'est donc pas de même nature que le temps du système physique à régler. Par commodité, on a choisi de considérer ce temps comme une suite d'instant, séparés par un intervalle constant, la période d'échantillonnage h . Le temps est alors représenté par une variable discrète, c'est à dire définie sur un ensemble discret, isomorphe à l'ensemble des entiers relatifs ($k \in \mathbb{Z}$).

L'aspect dynamique des systèmes est alors traduit par des équations récurrentes sur des séquences numériques. Ces équations seront ici supposées linéaires (vérifient le théorème de superposition) et stationnaires (coefficients constants). Ces hypothèses sont de même nature que pour les systèmes à temps continu. On retrouvera alors les 2 formes de représentation:

- la fonction ou matrice de transfert;
- la représentation d'état.

L'objectif de ce cours est d'introduire les outils mathématiques et de montrer le chemin permettant de transposer les méthodes connues en commande analogique pour la synthèse de commandes numériques.

2. Discrétisation des équations d'état

Soit le système d'équations d'état déterministe, à temps continu:

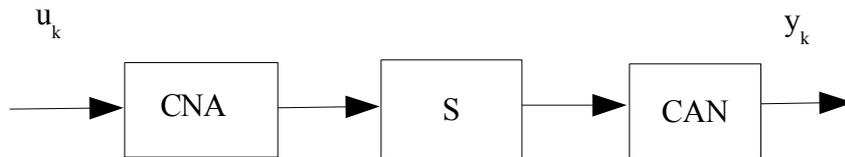
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A x(t) + B u(t) \\ y(t) &= C x(t) + D u(t) \end{aligned} \quad 1$$

où : $x(t)$, $n \times 1$ vecteur d'état
 $u(t)$, $l \times 1$ vecteur de commande
 $y(t)$, $m \times 1$ vecteur de sortie

La solution s'écrit:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \\ y(t) &= C x(t) + D u(t) \end{aligned} \quad 2$$

Pour discrétiser le système, il faut disposer un Convertisseur Numérique-Analogique pour transformer le vecteur u_k des séquences numériques d'entrée en vecteur de signaux à temps continu, et d'un Convertisseur Analogique-Numérique pour transformer le vecteur des signaux de mesure en vecteur y_k de séquences numériques.



Soit h le pas (période) d'échantillonnage. Le CNA est un bloqueur d'ordre zéro (BOZ):

$$\forall t \in [kh, (k+1)h], u(t) = u_k.$$

on peut alors calculer la solution d'état aux instants d'échantillonnage:

$$\begin{aligned} x[(k+1)h] &= e^{Ah} x(kh) + \int_0^h e^{A(h-\tau)} B u(\tau) d\tau \\ x[(k+1)h] &= e^{Ah} x(kh) + \int_0^h e^{A(h-\tau)} d\tau B u_k \\ x[(k+1)h] &= e^{Ah} x(kh) + [A^{-1}(e^{Ah} - I)] B u_k \end{aligned}$$

soit:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= F x_k + G u_k \\ y_k &= C x_k + D u_k \end{aligned} \quad 3$$

où

$$F = e^{Ah}; G = A^{-1}(e^{Ah} - I)B .$$

Remarque: Soit q l'opérateur d'avance défini par $x_{k+1} = q x_k$, et z la variable complexe telle que $X(z)$ est la transformée en z de x_k , on peut alors déduire de la relation (3) :

$$\begin{aligned} q x_k &= F x_k + G u_k \\ x_k &= (qI - F)^{-1} G u_k \\ y_k &= [C(qI - F)^{-1} G + D] u_k \end{aligned}$$

d'où la matrice de transfert en z :

$$H(z) = C[(zI - F)^{-1} G + D] \quad 4$$

Ces représentations permettent de réaliser des programmes de calcul numérique,

- soit par équations récurrentes des sorties par rapport aux entrées;
- soit par représentation interne (modèle d'état).

Elles présentent cependant quelques inconvénients pour la synthèse ou l'analyse de systèmes de commande. En particulier, l'interprétation fréquentielle des phénomènes à temps discret est difficile sous ces formes.

3. Représentation d'état pseudo-continue des systèmes linéaires à temps discret

Introduisons un nouveau vecteur d'état défini par :

$$\bar{x}_k := \frac{x_{k+1} + x_k}{2} \quad 5$$

il correspond à la « valeur moyenne » du vecteur d'état x_k entre 2 instants d'échantillonnage successifs.

On peut caractériser l'évolution du vecteur d'état x_k par la « pseudo-dérivée » (ou différentiation discrète) :

$$\Delta \bar{x}_k := \frac{x_{k+1} - x_k}{h} \quad 6$$

Cette pseudo-dérivée tend vers la dérivée à gauche si h tend vers 0.

En appliquant cette transformation sur le système de l'équation (3), on obtient un nouveau système d'état :

$$\begin{aligned} \Delta \bar{x}_k &= A_d \bar{x}_k + B_d u_k \\ y_k &= C_d \bar{x}_k + D_d u_k \end{aligned} \quad 7$$

avec :

$$A_d = \frac{2}{h}(F - I)(F + I)^{-1} \quad 8$$

$$B_d = \frac{2}{h}(F + I)^{-1}G \quad 9$$

$$C_d = 2C(F + I)^{-1} \quad 10$$

$$D_d = D - C(F + I)^{-1}G \quad 11$$

Preuve :

1. Existence de $(F + I)^{-1}$.

Evidemment, les relations 8, 9, 10 et 11 n'ont de sens que si $(F + I)$ est inversible. C'est à dire :

$$[(F + I) \text{ inversible}] \Leftrightarrow [\det(F + I) \neq 0]$$

$$\Leftrightarrow [\det(e^{Ah} + I) \neq 0]$$

$$\Leftrightarrow [\lambda_i(e^{Ah} + I) \neq 0, \forall 0 \leq i \leq n] (\lambda_i \text{ est la } i^{\text{ème}} \text{ valeur propre de } (e^{Ah} + I))$$

$$\Leftrightarrow [-1 \text{ n' est pas valeur propre de } e^{Ah}]$$

Or, pour que -1 soit valeur propre de e^{Ah} , il faut que :

$$\exists \omega_0 > 0, \text{ t.q. } j\omega_0 \text{ est valeur propre de } A, \text{ avec } \omega_0 = (2i + 1) \frac{\pi}{h}$$

car $(e^{j(2i+1)\frac{\pi}{h}h} = -1)$ si i est un entier.

Mais, $\omega_e = \frac{2\pi}{h}$ est la pulsation d'échantillonnage. La plus petite valeur de ω_0 est donnée pour $i = 0$, et on a alors :

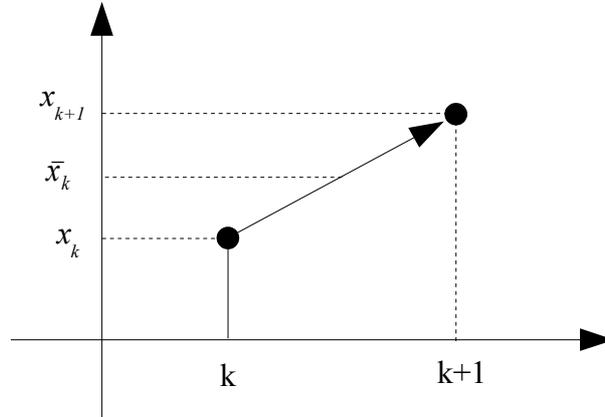
$$\omega_0 = \frac{\omega_e}{2}$$

La pulsation d'échantillonnage vaut 2 fois une pulsation d'oscillation naturelle du système, ce qui est contraire au théorème de Shannon, et entraîne la perte d'observabilité de ce mode oscillant instable.

Cela doit donc être évité dans tous les cas.

2. On introduit les équations (5) et (6) dans l'équation (3).

Remarque: dans le cas scalaire du premier ordre ($n = 1$) on peut donner la représentation :



La pente du vecteur donne la pseudo-dérivée $\Delta \bar{x}_k$.

4. Matrices de transfert

Soit Δ l'opérateur de pseudo-dérivation. On peut le définir en utilisant l'opérateur d'avance q :

$$\Delta \bar{x}_k = \frac{q-1}{h} x_k \quad 12$$

Comme par ailleurs :

$$\bar{x}_k = \frac{q+1}{2} x_k \quad 13$$

on déduit facilement que :

$$\Delta = \frac{2}{h} \frac{q-1}{q+1} \quad 14$$

Introduisons une variable complexe w définie par :

$$\left\{ w = \frac{2}{h} \frac{z-1}{z+1} \right\} \Leftrightarrow \left\{ z = \frac{2+wh}{2-wh} \right\} \quad 15$$

où z est la variable complexe associée à l'opérateur d'avance q (voir ci-dessus).

L'équation (12) permet de calculer les transformées en z de \bar{x}_k et $\Delta \bar{x}_k$:

$$Z\{\bar{x}_k\} = \frac{z+1}{2} Z\{x_k\}$$

$$Z\{\Delta \bar{x}_k\} = \frac{z-1}{h} Z\{x_k\}$$

d'où :

$$Z\{\Delta \bar{x}_k\} = w Z\{\bar{x}_k\}$$

qui exprime donc la transformée de Laplace (en z) de la pseudo-dérivée.

Le système d'équation (7) permet alors de calculer la matrice de transfert en w :

$$H(w) = C_d [wI - A_d]^{-1} B_d + D_d \quad 16$$

Remarques.

1. On obtient cette matrice de transfert à partir de la matrice de transfert en z (4) en faisant le changement de variable de l'équation (15). Il s'agit d'une transformation bilinéaire connue comme transformation de Tustin.
2. La variable complexe w est une variable semblable à la variable de Laplace p ou s . De la même façon qu'on obtient une représentation fréquentielle des systèmes à temps continu en restreignant les variations de p à l'axe imaginaire ($p \rightarrow j\omega$), on restreint les variations de w à l'axe imaginaire : $w \rightarrow j\nu$, où ν est une variable réelle appelée pseudo-pulsation. Les outils d'analyse et de synthèse fréquentielle des systèmes à temps continu sont utilisables pour la synthèse pseudo-fréquentielle des systèmes à temps discret.
3. Les systèmes pseudo-continus obtenus par transformation en w des systèmes à temps discrets causaux sont nécessairement propres, non strictement : ($D_d \neq 0$).

5. Stabilité

1 . Valeurs propres

Rappel :

{le système (3) est stable} \Leftrightarrow {toutes les valeurs propres de F sont dans le disque unité ouvert}

Proposition :

{toutes les valeurs propres de F sont dans le disque unité ouvert} \Leftrightarrow {toutes les valeurs propres de A_d sont dans le demi-plan ouvert gauche}

Preuve.

Le cercle unité, frontière du disque unité, est décrit par $|z|=1$ c'est à dire :

$$z = e^{j\omega h}, \omega \in \left[\frac{-\pi}{h}, \frac{\pi}{h} \right]$$

Le changement de variable :

$$w = \frac{2}{h} \frac{e^{j\omega h} - 1}{e^{j\omega h} + 1} = 2 \frac{j}{h} \tan\left(\frac{\omega h}{2}\right)$$

w est donc une variable imaginaire pure, de la forme $w = j\nu$, où :

$$\nu = \frac{2}{h} \tan\left(\frac{\omega h}{2}\right), \nu \in \mathbb{R}.$$

et le cercle unité est transformé en axe imaginaire. L'origine ($z=0$) est transformée en $w = \frac{-2}{h}$, donc sur l'axe réel négatif.

Il s'ensuit que l'intérieur du disque unité est transformé dans le demi-plan ouvert gauche.

La condition nécessaire et suffisante de stabilité des systèmes à temps pseudo-continu est identique

à celle des systèmes à temps continu.

2 . Lyapunov

Dans le cas de système à temps continu, on montre que le système autonome $\dot{x} = Ax$ est asymptotiquement stable si et seulement si $\forall Q$ symétrique définie positive $\exists P$ symétrique définie positive telle que :

$$A^T P + P A + Q = 0 \quad 17$$

Par analogie, on peut montrer que le système pseudo-continu (7) est asymptotiquement stable si et seulement si $\forall Q_d$ symétrique définie positive $\exists P$ symétrique définie positive telle que :

$$A_d^T P + P A_d + Q_d = 0 \quad 18$$

La démonstration est la même que dans le cas continu, puisque la stabilité dépend de la position des valeurs propres des matrices d'évolution A et A_d .

Que devient cette équation de Lyapunov dans le cas de représentation discrète du type (3) ? Introduisons la relation (8) dans (17), il vient :

$$P - F^T P F - Q = 0 \quad 19$$

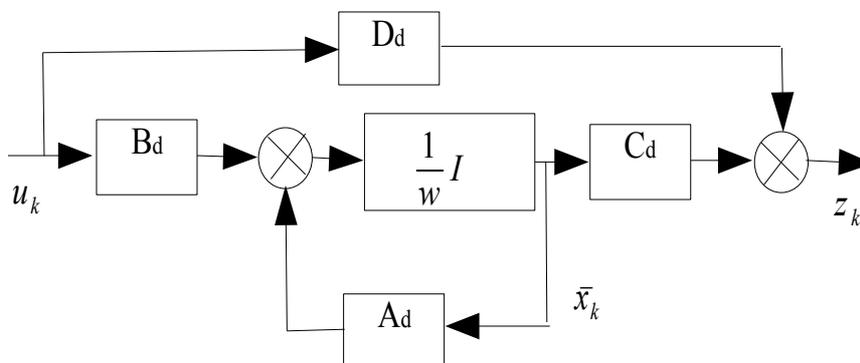
où la matrice Q est une matrice symétrique définie positive liée à n'importe quelle matrice Q_d de (18) par :

$$Q = \frac{h}{4} (F + I)^T Q_d (F + I) \quad 20$$

6. LQ-LQG

1. Retour d'état déterministe

Le système (3) en représentation d'état pseudo-continue peut être représenté par :

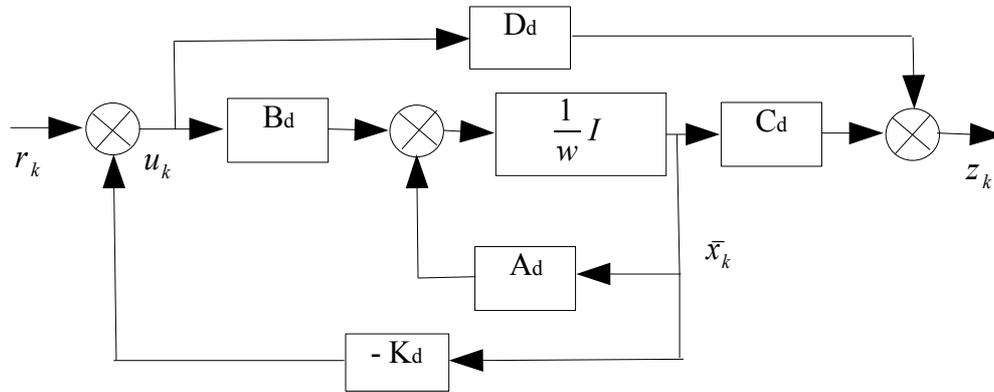


On peut effectuer le retour d'état :

$$u_k = -K_d \bar{x}_k + r_k$$

21

et représenter la boucle fermée :



Les équations d'état de la boucle fermée s'écrivent :

$$\Delta \bar{x}_k = [A_d - B_d K_d] \bar{x}_k + B_d r_k$$

22

Ce retour d'état pseudo-continu est équivalent au retour d'état discret sur le système (3) :

$$u_k = -K x_k + r_k$$

23

où :

$$K = \left[\frac{2}{h} I + K_d G \right]^{-1} K_d [F + I]$$

24

2. LQ à temps discret

Soit le critère linéaire quadratique à horizon infini sur le système (7) :

$$J_{LQ} = \sum_{k=0}^{\infty} (\bar{x}_k^T \bar{Q} \bar{x}_k + u_k^T R u_k)$$

25

où R et \bar{Q} sont des matrices symétriques définies positives.

Par analogie avec la commande LQ à temps continu, ce critère est minimisé par la commande à retour d'état :

$$K_d = R^{-1} B_d^T \bar{P}$$

26

où \bar{P} est la matrice symétrique définie positive solution de l'équation de Riccati algébrique :

$$A_d^T \bar{P} + \bar{P} A_d + \bar{Q} - \bar{P} B_d R^{-1} B_d^T \bar{P} = 0 \quad 27$$

Remarque : le critère quadratique (25) est de même structure que le critère sur le système (3) :

$$J_{LQ} = \sum_{k=0}^{\infty} (x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k) \quad 28$$

connu comme critère LQ à temps discret. Ce critère est minimisé par la commande à temps discret :

$$K = R^{-1} G^T P \quad 29$$

où P est la matrice symétrique définie positive solution de l'équation de Riccati :

$$P - F^T P F - Q - F P G (R + G^T P G)^{-1} G^T P F^T = 0 \quad 30$$

3. Observateur de Kalman à temps discret

Le système à temps discret bruité

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= F x_k + G u_k + w_k \\ z_k &= C x_k + D u_k + v_k \end{aligned} \quad 31$$

où les bruits w_k et v_k sont blancs et gaussiens :

$$E \left\{ \begin{bmatrix} w_i \\ v_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_j^T & v_j^T \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} \delta(i-j) \quad 32$$

est équivalent au système pseudo-continu :

$$\begin{aligned} \Delta \bar{x}_k &= A_d \bar{x}_k + B_d u_k + M_d w_k \\ z_k &= C_d \bar{x}_k + D_d u_k + N_d v_k \end{aligned} \quad 33$$

avec:

$$\begin{aligned} M_d &= \frac{2}{h} (F + I)^{-1} \\ N_d &= I - C (F + I)^{-1} G \end{aligned} \quad 34$$

On peut définir le critère LQG sur ce système :

$$J_{LQG} = E \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (x_k^T \bar{Q} x_k + u_k^T R u_k) \right\} \quad 35$$

Ce critère est minimisé par la commande à retour d'état \hat{x}_k de l'observateur de Kalman :

$$\Delta \hat{x}_k = (A_d - \bar{L} C_d) \hat{x}_k + (B_d - \bar{L} D_d) u_k + \bar{L} z_k \quad 36$$

où

$$\bar{L} = \bar{P} C_d^T \bar{V}^{-1} \quad 37$$

dans laquelle \bar{P} est la matrice symétrique définie positive solution de l'équation de Riccati :

$$\bar{P} A_d^T + A_d \bar{P} + \bar{W} - \bar{P} C_d^T \bar{V}^{-1} C_d \bar{P} = 0 \quad 38$$

et :

$$\begin{bmatrix} \bar{W} & 0 \\ 0 & \bar{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_d W M_d^T & 0 \\ 0 & N_d V N_d^T \end{bmatrix} \quad 39$$

On peut également définir un critère LQG sur le système à temps discret (31) :

$$J_{LQG} = E \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k) \right\} \quad 40$$

et appliquer la commande LQ-optimale (29) sur l'état \hat{x}_k de l'observateur de Kalman :

$$\hat{x}_{k+1} = (F - LC) \hat{x}_k + (G - LD) u_k + L z_k \quad 41$$

où :

$$L = P C^T V^{-1} \quad 42$$

et P est solution de l'équation de Riccati discrète :

$$F P F^T - P - F P C^T (V + C P C^T)^{-1} C P F^T + W = 0 \quad 43$$

7. Exemple

Soit le système à temps continu:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \ 0] x(t)$$

échantillonné à la période $h = 0,01$ s; on calcule successivement les régulateurs LQ discrets, d'abord par équation de Riccati pseudo-continue, puis par équation de Riccati discrète.

```
%système à temps continu
h=0.01;
A=[0,1;-1,-2];B=[0;3];C=[1,0];D=0;
[n,d]=ss2tf(A,B,C,0,1);
S1=tf(n,d)

%système à temps discret
[nz,dz]=c2dm(n,d,0.01,'zoh');
G1d=tf(nz,dz)
[F,G,C,D]=c2dm(A,B,C,D,h,'zoh');
S1z=ss(F,G,C,D)
```

```

%systeme à temps pseudo-continu
[nw, dw]=D2cm(nz,dz,0.01,'tustin');
Glw=tf(nw, dw)
bode(Glw)
T=inv(F+eye(2));
Ad=(F-eye(2))*T*(2/h);
Bd=T*G*(2/h);
Cd=2*C*T;
Dd=D-C*T*G;
Slw=ss(Ad, Bd, Cd, Dd)
figure
bode(Slw)

```

```

%LQ pseudo-continu
Qd=1000*eye(2); r=1;
[Kd, Sd, Ed]=lqr(Ad, Bd, Qd, r);
K1=inv((2/h)+Kd*G)*Kd*(F+eye(2))

```

```

%solution alternative:
[Add, Bdd, Cdd, Ddd]=tf2ss(nw, dw);
[Kdd, Sdd, Edd]=lqr(Add, Bdd, Qd, r);
K3=inv((2/h)+Kdd*G)*Kd*(F+eye(2))

```

```

%LQ discret
Q=(h/4)*(F+eye(2))*Qd*(F+eye(2))
[K2, S2, E2]=dlqr(F, G, Q, 10*r)

```

Les résultats:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.99995 & 0.0099005 \\ -0.0099005 & 0.98015 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0.000149 \\ 0.029701 \end{bmatrix} u_k$$

$$\Delta \bar{x}_k = \begin{bmatrix} -1.66e^{-5} & 0.99998 \\ -0.99998 & -2 \end{bmatrix} \bar{x}_k + \begin{bmatrix} 4.99e^{-5} \\ 2.9999 \end{bmatrix} u_k$$

LQR pseudo-continu:

$$K_d = [31.2912, 31.2907]$$

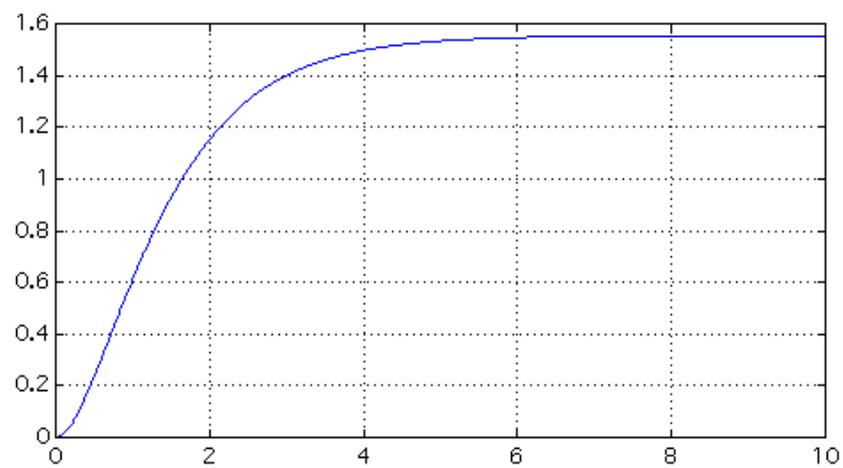
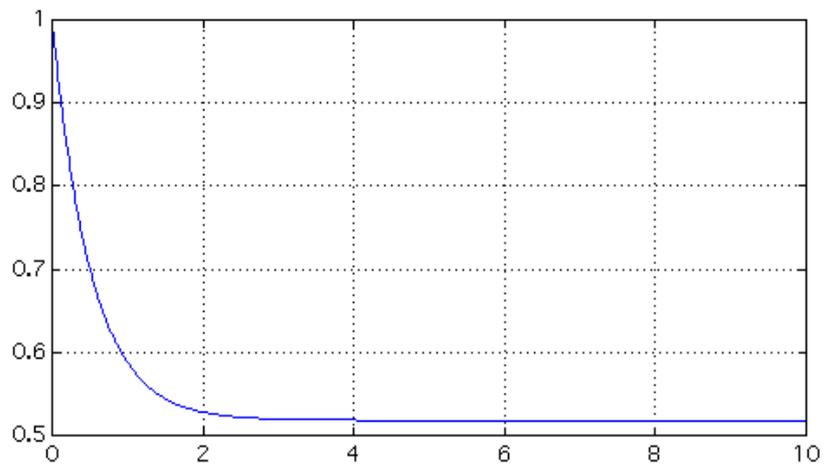
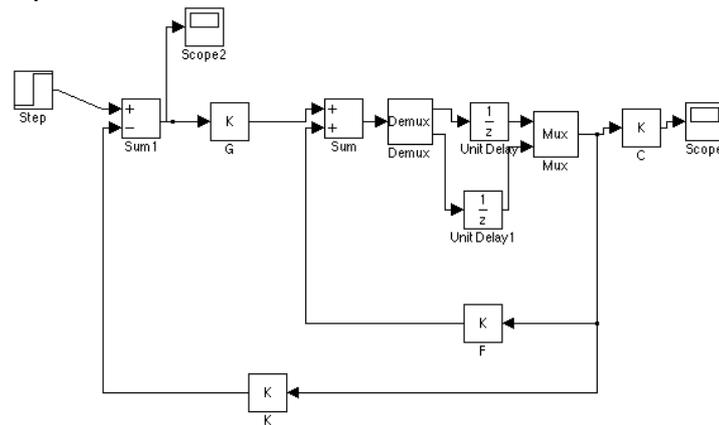
$$K1 = [0.3099, 0.3099]$$

LQR discret:

$$K2 = [0.3300, 0.3268]$$

On constate que pour obtenir sensiblement le même résultat, on a dû recalculer la pondération Q conformément à la relation (20), et modifier (par tâtonnement) la pondération r .

Les simulations numériques:



8. Conclusion

Les représentations d'état à temps discret et à temps pseudo-continu sont équivalentes puisque la transformation bilinéaire de Tustin est inversible, et conserve les propriétés algébriques.

Les résultats établis sur les systèmes à temps continu (propres mais non strictement) sont donc utilisables sur les représentations à temps pseudo-continu des systèmes à temps discret.

Une méthode de synthèse de commande à temps discret consiste donc à :

- Calculer le modèle à temps discret du système à commander (équation récurrente puis transfert en z ou représentation d'état);
- En déduire le modèle à temps pseudo-continu (transfert en w ou représentation d'état);
- Calculer la commande à temps pseudo-continu (transfert en w ou représentation d'état);
- En déduire la commande à temps discret par inversion de la transformation bilinéaire de Tustin.

9. Bibliographie

Th. KAILATH, *Linear Systems*, Prentice Hall, New Jersey, 1980.

I. TROCH, Solving the Discrete Lyapunov Equation Using the Solution of the Corresponding Continuous Lyapunov Equation and Vice Versa, *IEEE Trans. On Automatic Control*, Vol 33, n° 10, 1988.

R. J. OBER, S. MONTGOMERY-SMITH, «Bilinear transformation of infinite dimensional state-space systems and balanced realizations of non rational transfer functions, *SIAM, Journal of Control and Optimisation*, Vol 28 (2), 1990.

B. BERGEON, F. CAZAURANG, S. YGORRA, Méthodologie de commande robuste linéaire, *APII-JESA*, Vol 35, n° 1-2, 2001.