A propos de la « suspension crone »

Gérard Montseny, Gérard Salut

Cette communication contenant un commentaire critique de résultats de l'équipe « CRONE », un droit de réponse a été proposé à cette dernière. Cette réponse, figure à la suite de cet article.

A propos de la "suspension CRONE"

Gérard Montseny, Gérard Salut

LAAS/CNRS, 7 avenue du Colonel Roche, 31077 Toulouse cedex 4, France

montseny@laas.fr, salut@laas.fr

 $R\acute{e}sum\acute{e}$ — A partir d'un tour d'horizon rapide de la suspension d'automobile examinée sous l'angle de l'automatique linéaire, cette communication a pour objet d'une part de mettre en évidence les contradictions conceptuelles et technologiques de la solution "CRONE" proposée dans [13], d'autre part d'introduire le problème correct prenant en compte une contrainte "de sustentation".

Mots-clés— Suspension d'automobile, Robustesse, Thermodynamique, Invariance.

I. INTRODUCTION

Etant donné un système linéaire *incertain*, paramètré par $\lambda > 0$ et décrit par la fonction de transfert:

$$G_{\lambda}(p) = \frac{1}{\lambda p},$$

un compensateur linéaire invariant de la forme:

$$K(p) = kp^{\alpha}, \ -1 < \alpha < 0, \ k > 0$$

conduit à la réponse en boucle fermée en suivi de consigne:

$$H_{\lambda}(p) = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{k} p^{1-\alpha}} = \frac{1}{1 + Qp^{\beta}}, \ 1 \le \beta < 2, \ Q > 0.$$
(1)

Une telle fonction de transfert est stable et présente un graphe de Nyquist *invariant* par rapport à Q. Le compensateur K(p) est donc "robuste" au sens d'une marge de phase *indépendante* de λ (fixée par β), corollaire de cette propriété d'invariance.

Pour le cas $\alpha \neq 0$, les compensateurs K(p) ci-dessus sont non rationnels: il s'agit d'intégrateurs fractionnaires (d'ordre non entier). Seuls les modèles (rationnels) s'exprimant sous la forme d'un "monôme" $G_{\lambda}(p) = \lambda p^{-n}$, n > 0 permettent d'obtenir (1), par homogénéité de la fonction puissance. On notera que le cas $n \ge 2$ nécessite une simplification de la fonction de transfert par p^{α} , terme qui recèle alors une instabilité interne en réponse au bruit blanc car $\alpha > 0$.

Sous une forme plus technique, ces propriétés, induites par l'homogénéité de la fonction puissance, furent mentionnées en 1963 par Horowitz [5], dans un contexte qui allait devenir la célèbre théorie QFT^1 . Les prémisses en sont présentes dans le fameux ouvrage de Bode [2]². Elles résument l'approche CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier) [12] dont l'objet réside dans l'emploi de tels opérateurs fractionnaires (et leurs approximations réalisables) afin de conférer à un système monovariable linéaire temps-invariant une réponse en boucle fermée proche de l'idéal (1). La "suspension CRONE", présentée notamment dans [13], se veut une application type de l'approche du même nom au domaine de la suspension d'automobile.

A partir d'un tour d'horizon rapide du problème de la suspension d'automobile et de ses solutions classiques, cette communication (qui prolonge [7]) a pour objet d'une part de mettre en évidence les contradictions conceptuelles et technologiques inhérentes à la solution CRONE, d'autre part d'introduite brièvement le problème de suspension "robuste au sens de l'invariance", compatible avec les contraintes physiques que doit vérifier tout dispositif de suspension. Dans la partie II. de cet article sont rappelés le problème simplifié de la suspension d'automobile et ses solutions, interprétés sous l'angle de l'Automatique linéaire. On développe en III. l'analyse mécanique et thermodynamique de la solution technologique "CRONE" telle qu'elle a été avancée dans [13] (véhicule expérimental BX Citroën). Dans la partie IV. est simplement introduit le problème au sens étendu de la "pseudo-invariance", prenant en compte la contrainte de sustentation que la physique impose.

II. LA SUSPENSION D'AUTOMOBILE

Elle doit remplir trois fonctions, par ordre décroissant d'importance, dont la première pré-existe aux deux autres:

- 1. maintenir le véhicule en compensant son poids,
- 2. assurer une bonne tenue de route,
- 3. garantir un confort suffisant.

Le point 1. est obtenu par une raideur (en général un ressort) C_0 , de valeur suffisante ($C_0 \ge C_{\min} > 0$) pour compenser, outre le poids proprement dit, les transferts dynamiques de ce dernier lors des phases d'accélération ou de freinage. La valeur de C_{\min} est concrètement fixée par l'analyse physique. Elle peut être réduite autour de 2000 N/m dans le cas de certains systèmes à raideur variable (non linéaires) en fonction de la charge et incluant un correcteur (actif) d'assiette, de réponse lente et entrant en action essentiellement lors de la montée ou la descente de passagers. L'ensemble permet un confort exceptionnel, cependant que l'effet des transferts de poids lors d'accélérations horizontales demeure acceptable³. C'est le cas notamment des véhicules équipés de suspension oléopneumatique⁴ [3], [16], [15].

⁴Ou hydropneumatique.

¹Quantitative Feedback Theory.

 $^{^2\}S$ XVIII, "ideal cut-off characteristic".

³La suspension hydropneumatique (Th. Halconruy, Automobiletechnologie, Encyclopædia Universalis, Corpus 3, 1990, p 555): "Avec un tel dispositif, il est possible de réguler la quantité de liquide dans le circuit de supension et de corriger ainsi automatiquement la hauteur du véhicule en fonction de la charge. En outre, la raideur de l'élément élastique varie en fonction du cas de chargement, ce qui autorise l'emploi de flexibilités favorables au confort sans dégrader le comportement du véhicule."

Confort et tenue de route étant relativement antinomiques, un compromis est nécessaire: une fois le ressort fixé, ce dernier est essentiellement déterminé par le dispositif amortisseur dont la fonction est de dissiper l'énergie mécanique accumulée par le système suspensionmasse suspendue (amortissement des oscillations verticales).

A. Le modèle linéaire

Dans le domaine fréquentiel (transformation de Laplace), le déplacement vertical Z de la caisse s'exprime, en première approximation:

$$Z(p) = \frac{C(p)}{C(p) + Mp^2} Y(p) - \frac{Mg}{p(C(p) + Mp^2)}, \qquad (2)$$

où Y est le déplacement vertical relatif de la chaussée, M la masse suspendue, g le coefficient de gravité et C(p) la transmittance de la suspension (Figure 1, 2).



Fig. 1. Système de suspension



Fig. 2. Suspension en régime linéaire.

Le terme en Mg est essentiel: il représente l'effet du poids que doit "soutenir" la suspension et constitue, du point de vue de l'automatique, une perturbation statique incontournable: il s'agit essentiellement d'un problème de type "suivi de consigne + rejet de perturbations". On notera que le terme Mg renferme deux quantités pouvant varier: d'une part la masse suspendue M, qui varie en fonction du cas de chargement, d'autre part le terme de gravité g, qui peut varier dans des proportions significatives lors d'accélérations horizontales du véhicule: il s'agit alors de gravité dynamique apparente: $g(t) \neq$ cte, donnant un poids apparent variable: Mg(t), responsable de l'enfoncement de l'arrière d'un véhicule lors d'un démarrage brusque, phénomène d'autant plus marqué que la suspension est souple. *Remarques*: Le modèle (2) est élémentaire: en pratique, il ne serait pas possible d'isoler chaque roue sans tenir compte des interactions multiples (tangage, roulis...). Il permet néanmoins d'introduire et d'analyser le comportement dynamique "au premier ordre". Il est en outre utilisé pour la définition de la "suspension CRONE" [14].

B. Les solutions traditionnelles

Le système de suspension le plus répandu est constituée, en première approximation, d'un ressort et d'un amortisseur visqueux avec réglage judicieux des constantes: $C(p) = C_0 + k p$, soit un comportement de type P.D.

Dans le cas de la suspensions oléopneumatique [3], [16], [15], le ressort peut être choisi de raideur faible grâce à un correcteur hydraulique de hauteur (ou correcteur d'assiette), qui s'apparente à un terme intégrateur. Cette particularité des suspensions oléopneumatiques réalise ainsi, par un comportement de type P.I.D.:

$$C(p) = C_0 + k \, p + \varepsilon \frac{1}{p},$$

l'annulation de l'erreur statique, c'est à dire l'invariance de l'état d'équilibre asymptotique par rapport à la charge Mg, forme élémentaire de robustesse au sens du rejet de perturbation statique.

On notera en outre l'adaptativité⁵ dynamique naturelle de la suspension oléopneumatique, induite par la non linéarité du ressort pneumatique⁶. Elle procure un confort et une tenue de route peu sensibles à la charge, devenus légendaires⁷ [16], que ne permettent pas les suspensions passives ordinaires à ressort hélicoïdal en acier, de raideur constante (loi de Hooke).

C. La solution CRONE [13], [14]

Dans sa version idéale, elle s'exprime sous la forme d'un compensateur linéaire invariant non rationnel ("dérivateur fractionnaire"), de symbole:

$$C(p) = k p^{\alpha}, \ 0 < \alpha < 1.$$
(3)

La robustesse invoquée, qui concerne l'incertitude sur M, est l'invariance du graphe de Nyquist du transfert $Y \to Z$, alors de la forme (1). On notera:

1. cela nécessite une simplification illicite par le terme p^{α} , $\alpha > 0$, qui recèle l'instabilité interne déjà signalée,

2. une telle transmittance présente une *raideur statique* nulle

$$C_0 := C(0) = 0,$$

et ne peut donc pas soutenir seule le poids Mg du véhicule (non existence d'un état d'équilibre statique si $Mg \neq 0$, par le théorème de la valeur finale appliqué à (2)),

⁵Propriété largement préférable, lorsqu'elle est accessible et tant du point de vue automatique que mécanique, à celle, plus rudimentaire, de robustesse au sens d'un compensateur *linéaire invariant*.

⁶Dont la raideur augmente avec la charge.

⁷Suspension oléopneumatique [3], pp 120-123: "On utilise un matelas de gaz comprimé dans une enveloppe, dont le volume varie avec les déplacements relatifs des roues par rapport à la carosserie. Il est possible d'obtenir ainsi une suspension dont la raideur varie en raison directe de la masse suspendue. En pratique, la fréquence des oscillations naturelles du véhicule se maintient entre 0,6 et 0,9 cycles par seconde, valeurs excellentes pour le confort".

3. un "précompensateur" (correcteur d'assiette) ne peut garantir a priori l'existence d'un état d'équilibre tout en préservant la forme (3) de C(p) a posteriori: en effet, il intervient nécessairement dans l'expression de la transmittance résultante, qui ne peut alors être de la forme (3).

Les approximations mises en œuvre [13] de l'idéal (3) sont présentées comme association de cellules élémentaires convenablement tarées, conduisant à une raideur statique (roues arrières du véhicule expérimental): $C_0 = 215 \text{ N/m}$ [13], [11], [14], valeur insuffisante⁸ vis à vis notammentdes variations du poids apparent sur les roues arrières, qui atteignent aisément plusieurs dizaines de kgf lors des accélérations horizontales du véhicule.

Remarque: Par une analyse simple, on démontre que, de façon très générale, il ne peut exister de transmittance invariante réalisant à la fois la fonction "suspension" et conférant au système un comportement dynamique invariant sous changement de fréquence⁹. En revanche, il existe des solutions non invariantes réalisant la fonction suspension (raideur statique non nulle) et conférant en même temps au système un comportement dynamique strictement invariant par rapport à la charge, c'est à dire totalement insensible aux variations de la masse suspendue M. Quelques solutions technologique très simples sont décrites dans [9].

D. La solution "CRONE LQG-optimale"

Dans la situation considérée en [13], c'est-à-dire où l'on effectue la simplification illicite sus-dite et où le poids n'est toujours pas pris en compte, on montre aisément que la solution stationnaire "CRONE" LQG-optimale est:

$$C(p) = k p$$

transmittance ordinaire réalisant en outre trivialement l'invariance du graphe de Nyquist du transfert $Y \rightarrow Z$, alors de la forme $\frac{1}{1+Qp}$: il s'agit d'un cas particulier de (1), solution CRONE "d'ordre entier" ($\alpha = 1$) réduite à un amortisseur visqueux.

Remarques: La réponse indicielle ne présente, dans ce dernier cas, aucun dépassement, le temps de montée étant déterminé par le choix de k. Dans [13], l'ordre choisi est $\alpha = 0.8$, valeur relativement proche de 1. Un ordre inférieur conduit à des oscillations prohibitives, alors que l'ordre 1, bien qu'optimal au sens LQG, n'est pas considéré. En ajoutant à la transmittance d'ordre $\alpha = 1$ un coefficient de raideur de valeur 215 N/m, soit $C(p) = C_0 + kp$, on obtient une solution quasi-optimale LQG, présentant la même raideur statique mais à dépassements toujours inférieurs aux cas $\alpha < 1$. Le choix a priori d'un ordre strictement non entier apparaît ainsi contraire aux conclusions de l'analyse LQG (abordée dans [13]).

⁸Le coefficient C_0 est présenté, dans [13], [14], comme un nombre sans dimension. Il s'agit d'une erreur, conséquence directe d'une autre erreur portant sur une quantité introduite dans l'analyse: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{M}}$, variable (car fonction de M) et de dimension kg^{- $\frac{1}{2}$}, considérée comme une pulsation constante, donc exprimée en rd/s (les valeurs mentionnées dans [13], [10] sont respectivement: ω_0 = $12.16 \ 10^{-5} \text{ rd/s}$ et $4.062 \ 10^{-7} \text{ rd/s}$, associées aux constantes de temps $\frac{1}{\omega_0}\simeq 8\,200\,{\rm s}$ et $2.5\,10^6\,{\rm s},$ soit respectivement environ 2 heures et 1 mois).

⁹Une telle hypothèse débouche en effet sur une équation d'homogénéité, dont seules les fonctions puissances sont solution.

III. ANALYSE MÉCANIQUE ET THERMODYNAMIQUE DE LA RÉALISATION MISE EN ŒUVRE SUR UN VÉHICULE EXPÉRIMENTAL [13]

Cette réalisation consiste à approcher la transmittance CRONE idéale par trois cellules élémentaires, constituées de sphères de suspension oléopneumatique d'origine (voir Figure 5-B) "convenablement réglées". On montre dans cette partie qu'une telle réalisation se heurte à une incompatibilité qui rend notamment inopérante au moins une sphère.

A. Principe de fonctionnement de la suspension oléopneumatique (Figure 3, 5-A) [3]

On note:

f la force sur l'axe de la roue,

 $F = \frac{f}{q}$ la force appliquée sur le piston,

P la pression de l'azote (gaz *diatomique* N_2),

 P_0 la pression de gonflage de la sphère (à charge nulle), V le volume de l'azote en charge,

 V_0 le volume utile de la sphère (à la pression P_0).

Le poids de la masse suspendue M est compensé par la force F exercée sur le piston par l'huile à la pression P qui est aussi celle de l'azote (membrane souple) et fixe son volume $V < V_0$ (loi des gaz parfaits), déterminé par la position de la membrane, supposée sans raide ur^{10} . Il y a donc une relation biunivoque entre la valeur de la masse suspendue et le volume de l'azote. La constante de raideur C_0 du ressort pneumatique aux petites variations est obtenue par dérivation (le volume d'huile déplacé dV est proportionnel au déplacement vertical dy de l'axe de la roue).

Enfin, le correcteur de hauteur, en injectant ou libérant de l'huile, permet de conserver constante la hauteur moyenne (réaction lente).



Fig. 3. Suspension oléopneumatique

B. Analyse thermodynamique du fonctionnement d'une sphère de suspension (Figure 3)

On étudie ici la sphère en tant que ressort pneumatique dont on détermine la raideur. On se place dans les hy-

 $^{^{10}\}mathrm{Cette}$ hypothèse est légitime, au moins en première approximation, du fait des importantes pressions mises en jeu (plusieurs dizaines de bars), de la finesse relative de la membrane (quelques mm), et surtout de sa géométrie spécialement étudiée pour offrir une souplesse maximale.

pothèses simplificatrices suivantes, suffisantes en première approximation:

• Hypothèse des *gaz parfaits*¹¹:

$$PV = nRT, R = 8.31 \text{ J} \text{ mol}^{-1} \text{K}^{-1},$$
 (4)

• Equilibre thermodynamique du gaz dans la sphère,

• Régime *adiabatique* (isentropique) pour l'étude des comportements dynamique *rapides* (en dessous de la seconde) induits par les fluctuations de la chaussée,

• Régime isotherme pour la détermination du point moyen de fonctionnement,

Remarque: La dernière hypothèse est justifiée par le fait que le point moyen de fonctionnement concerne des temps longs (plusieurs minutes ou plus), l'équilibre thermique ayant alors le temps de s'établir.

L'énergie interne d'un gaz parfait diatomique est donnée par [6]:

$$U = \frac{5}{2}nRT.$$
 (5)

Enfin, on suppose la température moyenne du gaz égale à la température ambiante $T_0 = 293 \,\mathrm{K}$ (on néglige, en première approximation, l'échauffement induit par l'énergie dissipée par le dispositif amortisseur visqueux, qui est un paramètre d'incertitude supplémentaire, cet échauffement pouvant varier dans des proportions significatives selon l'état de la chaussée).

On considère les valeurs numériques¹² suivantes (mesurées sur un véhicule standard):

rapport du bras de levier: q = 1/3section du piston: $S = 10 \text{ cm}^2 = 10^{-3} \text{ m}^2$, volume utile de la sphère: $V_0 = 450 \text{ cm}^3 = 0.45 \, 10^{-3} \text{ m}^3$.

On considère en outre:

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2,$$

$$M_{\min} = 150 \text{ kg} \leqslant M \leqslant M_{\max} = 300 \text{ kg},$$

$$\widetilde{P} := \frac{F}{S} \text{ la pression de l'huile.}$$

La sphère étant en acier, le volume V de l'azote vérifie nécessairement: $V \leq V_0$; de plus, $V < V_0 \Leftrightarrow \tilde{P} = P > P_0$. Si $V = V_0$, alors $P < P = P_0$ et la fonction "ressort" *n'est* pas réalisée, la raideur étant $infinie^{13}$.

En régime statique (point moyen de fonctionnement), on a directement, dans tous les cas:

$$\widetilde{P} = \frac{Mg}{qS}.$$
(6)

A noter que, lorsque $V < V_0$, une augmentation de la température moyenne du gaz T entraîne une augmentation du volume moyen V, la pression moyenne P étant quant à elle inchangée (fixée par le poids Mg).

¹¹On vérifie aisément que cette hypothèse est légitime dans le cas de l'azote, aux pressions et températures considérées. ¹²A 5% près.

¹³Pour une variation $\Delta \widetilde{P}$ suffisamment petite, $\widetilde{P} + \Delta \widetilde{P} < P = P_0$ et la variation ΔV correspondante est nécessairement nulle. D'où $\frac{dP}{dV} = -\infty$: le ressort est en "butée".

L'hypothèse $V < V_0$ est vérifiée si et seulement si la pression à vide¹⁴ P_0 de la sphère vérifie:

$$P_0 < \frac{Mg}{qS} \simeq 44\,10^5 \,\mathrm{Pa} = 44 \,\mathrm{bar} = P_{0_{\mathrm{max}}}.$$
 (7)

Pour $P_0 \ge P_{0_{\max}}$, la sphère est *inopérante* (raideur in-finie) lorsque $M \le \frac{qSP_0}{g} \in [M_{\min}, +\infty)$. Pour $P_0 \ge$ 88 bar, elle est inopérante pour toute M dans l'intervalle d'incertitude¹⁵. A noter que la pression de gonflage d'origine des sphères arrières est de l'ordre de¹⁶ 40 bar [15].

Théorème 1: Au point de fonctionnement défini par M, la raideur du ressort pneumatique s'exprime, sous l'hypothèse $V < V_0$:

$$k := -\frac{df}{dy} = \frac{7}{5}qSg\frac{M}{V} = \frac{7}{5}g^2\frac{M^2}{P_0V_0}.$$
 (8)

Preuve: L'énergie communiquée au gaz pour une variation de volume dV est -P dV. En régime rapide (adiabatique), d'après (4) et (5):

$$-P \, dV = dU = \frac{5}{2} nR \, dT = \frac{5}{2} d(PV) = \frac{5}{2} (PdV + VdP),$$

d'où l'on déduit le résultat d'après (6), $\frac{dP}{dV} = -\frac{5}{3}\frac{P}{V}, dP =$ $\frac{dF}{S} = \frac{df}{aS} \text{ et } dV = qS \, dy. \blacksquare$

Remarque: Il apparaît dans (8) que la raideur k varie comme le carré de la masse M, ce qui constitue en soi une première incompatibilité¹⁷ pour la réalisation oléopneumatique de la transmittance CRONE, par définition invariante et dont les paramètres sont donc *indépendants de* M par principe (cf. (3)).

Corollaire 2: La raideur minimale k_{\min_1} d'une sphère standard est obtenue pour $P_0 = P_{0_{\text{max}}}$, c'est à dire:

$$k_{\min_1} = \frac{7}{5} g^2 \frac{M_{\min}^2}{P_{0_{\max}} V_0} = 1531 \,\mathrm{N/m.}$$
 (9)

Enfin, dans le cas de plusieurs sphères alimentées par un même cylindre, on montre aisément:

Théorème 3: La raideur statique résultante est égale à l'inverse de la somme des inverses des raideur individuelles; en notant V_k les volumes d'azote respectifs, cette raideur statique est égale à celle d'une sphère unique 18 avec un volume d'azote $V = \sum_{k} V_k$.

¹⁴Au volume V_0 et à la température T_0 .

¹⁸Les réponses dynamiques sont en général différentes: elles dépendent des dispositifs amortisseurs.

 $^{^{15}\}mathrm{On}$ comparera avec les valeurs "optimisées" de gonflage des 3 sphères de suspension données dans [10] (page 118), respectivement: $P_0 = 61.4$ bar, 87.9 bar, 125.8 bar. ¹⁶La sphère a été conçue à coût minimal, donc à volume minimal.

¹⁷Cette incompatibilité est remarquée dans [10] page 221 (annexe

¹⁾ où la variabilité de la raideur k en fonction du poids Mg est explicitement décrite.

La raideur statique minimale possible¹⁹ avec 3 sphères standard alimentées par un même cylindre est donc: $k_{\min_3} = \frac{1}{3}k_{\min_1} = 510 \text{ N/m} \gg 215 \text{ N/m}.$

Une raideur statique de 215 N/m est par conséquent rigoureusement impossible à obtenir: cela nécessiterait, d'après ce qui précède, un volume d'azote au moins 8 fois plus important que le volume V_0 d'une sphère d'origine, ce qui est manifestement contradictoire avec ce qui a été réalisé (Figure 5-B). En outre, d'après l'analyse décrite dans [13], les pressions à vide sont toutes significativement différentes de manière à obtenir une approximation couvrant une large bande fréquentielle²⁰, ce qui amène la raideur statique minimale possible aux alentours de 1000 N/m, en vertu des expressions (7), (8) et du théorème 3.

C. Fonctionnement de la réalisation technologique mise en œuvre au moyen de 3 sphères standard (Figure 4, 5-B)

Les 3 sphères sont *identiques* à la sphère d'origine (Figures 4, 5) aux *pressions à vide* et réglage d'amortisseur près, **le reste du véhicule étant inchangé** (cf [13], page 1107, dernier §).

En régime statique (absence de perte de charge dans les amortisseurs), le principe de Pascal s'applique: pour chaque sphère, la pression d'azote est égale, en charge, à celle de l'huile, excepté si la membrane souple est plaquée contre la carcasse métallique ($V = V_0$, $\tilde{P} < P = P_0$).

La sphère S2 est en régime de fonctionnement normal: sa pression à vide est voisine de la pression à vide d'origine, qui permet, par réduction du volume de l'azote, d'atteindre la pression nécessaire pour compenser le poids, selon (6).

La constante de raideur étant inversement proportionnelle au volume V d'azote en charge, et donc inversement proportionnelle à la pression à vide (dans les limites admissibles), la valeur de C_0 , très faible (environ 12 fois moins que la raideur d'origine), imposerait, pour que la fonction "ressort" soit assurée et d'après le théorème 1, un volume V d'azote plusieurs fois supérieur au volume V_0 de la sphère, ce qui est impossible. S1 présente donc une pression à vide supérieure²¹ à la pression permettant d'équilibrer le poids de la masse M, elle reste nécessairement en butée et donc inactive ($V = V_0$, raideur infinie).

Pour obtenir une raideur beaucoup plus grande que la raideur d'origine, la sphère S3 doit présenter une pression à vide beaucoup plus faible que la pression d'origine: le volume V de l'azote est alors insuffisant, la sphère est en pratique inopérante²².

IV. APPROCHE PAR PSEUDO-INVARIANCE: INTRODUCTION

Comme il l'a été montré précédemment, les exigences de sustentation et d'invariance, par rapport à la charge, du

 $^{19}\mathrm{Lorsque}$ les 3 sphères sont gonflées à la pression $P_{0_{\mathrm{max}}}.$



Fig. 4. Solution mise en œuvre dans [13]



Fig. 5. A: Sphère de suspension avant de la BX Citroën. B: Suspension CRONE expérimentale - On distingue clairement l'entretoise en acier mettant en communication hydraulique (voir figure 4) le cylindre et les 3 sphères (seule modification mécanique apportée au véhicule, cf. [13], page 1107, dernier paragraphe).

transfert $Y \to Z$, apparaissent, dans le problème linéarisé de la suspension, comme antinomiques: la sustentation impose une *contrainte* d'origine *physique*: $C(0) \ge C_{\min} > 0$, ce qui ruine l'homogénéité nécessaire à l'invariance présentée en introduction.

La notion de "pseudo-invariant" [1] permet, dans un cadre étendu, de poser correctement le problème en termes de compromis, en prenant en compte la contrainte de sustentation, sous la forme:

$$\min_{T \in \mathcal{G}, C \in \mathcal{C}} \int_{M_{\min}}^{M_{\max}} \left\| T \cdot H_{Y,Z}(M,C) - H_0 \right\|_{\mathrm{H}_2}^2 \, dM, \qquad (10)$$

où $H_{Y,Z}(M, C)$ est la fonction de transfert $Y \to Z$ avec transmittance²³ C, H_0 est un transfert de référence, choisi a priori comme "idéal", \mathcal{G} est un groupe de transformations, choisi en fonction d'objectifs dynamiques²⁴, enfin, \mathcal{C} est un ensemble²⁵ convexe de transmittances admissibles, défini

²⁰D'après la "récursivité" des coefficients [13].

 $^{^{21}{\}rm Ceci}$ est parfaitement confirmé par les pressions de gonflage données dans [10], dont l'une des trois est de 125.8 bar.

 $^{^{22}}$ Ces conclusions ne sauraient être modifiées en invoquant l'action du correcteur d'assiette (terme intégral à petit paramètre) dont le rôle se limite à réguler la hauteur moyenne de caisse avec un temps de réponse de l'ordre de *plusieurs secondes*, largement "hors bande" (et donc sans effet notable en régime dynamique). De même, une compensation *géométrique* des reports dynamiques de poids (système "anti-plongée") est impossible, les roues arrières du véhicule n'étant pas motrices.

 $^{^{23}{\}rm Qui}$ peut, dans une certaine mesure, dépendre de M, de facon à prendre en compte le cas d'un système passif à éléments pneumatiques.

 $^{^{24}}$ Par exemple un groupe de changements de fréquence. Dans certains cas, ${\cal G}$ est réduit au seul élément neutre.

 $^{^{25}\}mathrm{D'op\acute{e}rateurs}$ pseudo-différentiels, cadre adapté au problème de pseudo-invariance.

 par^{26} :

$$\mathcal{C} = \{C; \ C(p=0) \ge C_{\min}\}.$$
(11)

Ce problème est numériquement résoluble sous *représenta*tion diffusive de C [8], [4], qui conduit à une expression de la forme:

$$\min_{T \in \mathcal{G}, \, \mu \in \mathcal{M}} \int_{M_{\min}}^{M_{\max}} \int_{\mathbb{R}} \left| T \cdot H_{Y,Z}(M, \mathcal{K}\mu) - H_0 \right|^2 d\omega \, dM,$$
(12)

où \mathcal{M} est un convexe fermé dans un espace de Hilbert \mathcal{H} convenable de symboles diffusifs et $C = \mathcal{K}\mu$ la transmittance associée au symbole diffusif μ .

Sous contrainte de passivité:

$$\mathcal{M} = \{ \mu \in \mathcal{H}; \ \mathcal{K}\mu(p=0) \ge C_{\min}, \ \mu \ge 0 \},$$
(13)

l'amélioration s'avère négligeable en regard des solutions traditionnelles, aussi bien dans le cas invariant par rapport à M (systèmes traditionnels) que dans le cas de raideurs de type pneumatique (solutions oléopneumatiques).

Le problème à considérer concerne le cas de systèmes actifs ou semi-actifs: il fera l'objet d'un prochain article, la définition précise du problème et sa résolution dans un contexte un tant soit peu général nécessitant un exposé suffisamment détaillé. Une étude simplifiée mais significative de solutions semi-actives conférant un comportement dynamique rigoureusement insensible à M est donnée dans [9].

V. CONCLUSION

On montre aisément que toute solution tendant à concilier une compensation en boucle fermée²⁷ C(p) et la forme de robustesse (1) conduit nécessairement à un compensateur de coefficients négligeables, de telle sorte que G(p) soit équivalent à un monôme dans la bande de fréquences significative de Y. Une telle solution ne peut en pratique assurer à la fois un "suivi de consigne de type CRONE" (1) et un rejet suffisant des perturbations dynamiques: la "compensation du poids" (effet "suspension" \Rightarrow raideur statique **non nulle**) et la forme (1) (effet "CRONE" $\Rightarrow C(p) = kp^{\alpha} \Rightarrow$ raideur statique nulle) sont contradictoires par nature: c'est précisément l'erreur de principe qu'illustre la faiblesse excessive de la valeur de C_0 (215 N/m) choisie dans [13], [14]. L'effet "suspension" est sacrifié dans l'exposé scientifique (oubli systématique du poids). L'effet "CRONE" est quant à lui absent dans la mise en œuvre expérimentale: c'est en effet grâce à l'impossibilité technique d'obtenir, au moyen de sphères d'origine, la raideur statique de faible valeur qu'exige l'approche décrite dans [10], [13], [11], [14], que le véhicule équipé comme montré en Figure 5-B peut présenter un comportement routier convenable²⁸, en fait

²⁸Par ailleurs très performant, par les qualités intrinsèques de la suspension hydropneumatique, mise au point au début des années 50. quasi-identique à celui du véhicule équipé de la suspension d'origine optimisée par le constructeur.

L'étude complète du problème de la suspension automobile "robuste au sens de l'invariance" impose, dans le cas d'une transmittance *invariante*, la prise en compte d'une contrainte "de sustentation" et ne peut être correctement abordée que par le biais d'une notion d'invariance affaiblie permettant sa prise en compte.

En revanche, il est aisé de réaliser de façon concrète des transmittances non invariantes conduisant à un comportement dynamique invariant (transfert Z(p) strictement indépendant de la masse M): tel est le cas d'une suspension oléopneumatique modifiée, dont le principe, très simple, est donné dans [9].

Remerciements Les auteurs tiennent à remercier leurs collègues qui ont contribué à cette étude à un titre ou un autre:

J.Audounet (MIP/CNRS), B.Bergeon (LAP/CNRS), P.Bidan (LGET/CNRS), Ph.Coiffet (Acad. des Techn.), A.Maruani (ENST), P.-A.Mazet (ONERA), L.Plantié (CERFACS), J.Saint-Pierre (CICT/UPS).

Références

- J. Audounet, F.-A. Devy Vareta, G. Montseny, "Pseudoinvariant diffusive control", 14th International Symposium of Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS'2000), Perpignan (France), 19-23 Juin 2000.
- [2] H. W. Bode, Network analysis and feedback amplifier design, Van Nostrand, New York 1945.
- [3] M. Desbois, F. Touache et J. Tourancheau, L'Automobile, technologie professionnelle générale, tome2: les organes de transmission et d'utilisation, Editions Foucher, Paris 1972.
- [4]F.-A. Devv Vareta. G. Montsenv. "Contrôle rod'un pseudo-invariant: buste application a_{11} cas bras flexible" Journées Doctorales d'Automatique Toulouse, 25 - 27(JDA'2001). septembre 2001.URL: www.laas.fr/JDA2001/Actes/systemes_dim-inf.html
- [5] I. M. Horowitz, Synthesis of Feedback Systems, Academic Press, New York 1963.
- [6] M. Karapetiantz, Thermodynamique chimique, MIR, 1978.
- [7] G. Montseny, "Invariances en contrôle robuste : étude d'un exemple concret", Journées Nationales d'Automatique, Autrans, février 2001. URL: www.laas.fr/gt-opd/Publis2001.html
- [8] G. Montseny, J. Audounet, "Représentation diffusive: introduction" Journées Doctorales d'Automatique une (JDA'2001), Toulouse, 25 - 27septembre 2001.URL: www.laas.fr/JDA2001/Actes/systemes_pseudo_differentiels.html
- [9] G. Montseny, P. Bidan, "Suspension automobile et invariance dynamique: analyse de quelques solutions", Comptes rendus du Séminaire Toulousain "Représentation Diffusive et Applications", LAAS/CNRS - Toulouse, No 2, Novembre 2001. URL: www.laas.fr/st-rda
- [10] X. Moreau, "La dérivation non entière en isolation vibratoire et son application dans le domaine de l'automobile - La suspension CRONE: du concept à la réalisation", Thèse de l'Université de Bordeaux I, 1/02/1995, numéro d'ordre 1218.
- [11] X. Moreau, "Un tour d'horizon sur la suspension CRONE: méthodes d'analyse et de synthèse", Journées Doctorales d'Automatique JDA'99, Nancy 21-23sept. 1999.
- [12] A. Oustaloup, La commande CRONE, Hermès, 1991.
- [13] A. Oustaloup, X. Moreau, M. Nouillant, "The CRONE suspension", Control Eng. Practice, Vol 4, No 8, pp 1101-1108, 1996.
- [14] A. Oustaloup, J. Sabatier, X. Moreau, "From fractal robustness to the CRONE approach", ESAIM: Proceedings - Vol.5, 177-192, 1998. URL: www.emath.fr/Maths/Proc/Vol.5/index.htm
- [15] La BX, Revue Technique Automobile
- [16] La DS 19, Revue Technique Automobile

²⁶Pour \mathcal{G} groupe des changements de temps, on peut montrer que dans le cas (irréaliste) $C_{\min} = 0$, la solution de (10) est bien de la forme $C(p) = kp^{\alpha}$, l'optimal LQG étant obtenu pour $\alpha = 1$.

²⁷C'est-à-dire, du point de vue mécanique, un dispositif développant un effort vertical prenant (indirectement) appui sur le sol.

Sur les remarques formulées sur la «Suspension CRONE»

Equipe CRONE¹ - LAP – UMR 5131 CNRS

Université Bordeaux 1 – ENSEIRB, 351 cours de la Libération, 33 405 TALENCE cedex - FRANCE Tél. 33 (0) 556 842 417 - Fax 33 (0) 556 846 644 - E-mail : {nom}@lap.u-bordeaux.fr

 $R\acute{e}sum\acute{e}$ — L'Equipe CRONE s'attache à apporter des réponses scientifiques aux remarques formulées sur la «Suspension CRONE» dans le cadre d'une « controverse » ouverte à l'initiative d'un chercheur CNRS. Ces remarques font en effet l'objet de réponses à la fois de l'équipe CRONE¹ et de PSA de manière à offrir au lecteur une vision académique et une vision industrielle de nature à respecter les aspects conceptuels et technologiques. Il est vrai que la « Suspension CRONE » s'est développée et se développe dans le cadre de la recherche technologique, le réalisme de ce cadre dictant des contraintes sévères qui visent à la représentativité et à la cohérence des modèles qui font la réalité de la « Suspension CRONE ».

Ce papier, accompagné de documents complémentaires, est disponible sous forme informatique à l'adresse http://www.lap.u-bordeaux.fr/rieussec/accueil.html.

Mots clés — Dérivation non entière, «Suspension CRONE», isolation vibratoire, modèle quart de véhicule, correcteur d'assiette.

PREAMBULE

Les remarques dont il s'agit dans ce document ont été formulées dans le cadre de la « controverse » ouverte à l'initiative de Gérard Montseny en décembre 2000 et abondée par Gérard Salut depuis juin 2001, tous deux chercheurs CNRS au LAAS.

Saisi en tant qu'organisme de tutelle de ces deux chercheurs, le CNRS s'est clairement exprimé sur cette « controverse » à travers le positionnement, d'une part, du Département STIC par une lettre ouverte du 24 août 2001 et, d'autre part, de la Délégation Aux Entreprises (DAE) par un courrier du 23 octobre 2001 à l'intention de Geneviève BERGER, directrice générale du CNRS.

Animés de la volonté de rétablir la réalité scientifique, il nous apparaît maintenant opportun de proposer les réponses de l'Equipe CRONE aux remarques dont la «Suspension CRONE» a fait l'objet, sachant par ailleurs que nos réponses à la « controverse » ont été officiellement transmises aux tutelles dès le mois de janvier 2001 (respectant ainsi la recommandation du département SPI de ne pas répondre directement en raison du procédé adopté pour ouvrir cette « controverse »).

Les réponses de l'équipe CRONE, telles qu'apportées dans ce document, portent sur les points suivants :

I - la compensation du poids du véhicule ;

II - la raideur statique de la «Suspension CRONE» ;

III - la solution « LQG »;

IV - le réglage des raideurs des sphères de suspension ;

V - la non-linéarité des sphères de suspension ;

VI - la propriété d'adaptativité ;

VII - le bruit blanc en isolation vibratoire de véhicule.

Avertissement – Les notations utilisées dans ce document peuvent apparaître quelque peu fluctuantes, en ce sens que nos réponses ont cherché à respecter le plus possible les notations de G. Montseny modifiées régulièrement depuis le début de la « controverse ». Nos réponses ayant également cherché à respecter la chronologie des remarques sur la « Suspension CRONE » telles que formulées depuis le 1/12/2000, le lecteur trouvera ci-après les liens de correspondance entre les paragraphes de la communication CIFA 2002 de G. Montseny-G. Salut et les points tels que traités dans le présent document : la remarque formulée dans les paragraphes I et II de la communication (nouvelle remarque dans la « controverse ») trouve sa réponse au dernier point VII de notre document. Ensuite pour le paragraphe II, voir les points I, II et III ; pour le paragraphe III, voir les points IV et V.

I. SUR LA COMPENSATION DU POIDS DU VEHICULE²

Il convient de rappeler chronologiquement les différentes remarques dont la «Suspension CRONE» a fait l'objet quant à la compensation du poids du véhicule.

■ Dans la première version de la « controverse », envoyée le 1/12/2000, G. Montseny écrit « La «Suspension CRONE», qu'une mise en œuvre sur un véhicule BX Citroën par son auteur est présentée comme une application "exemplaire" de l'automatique, s'avère ne pouvoir suspendre, par principe, qu'une charge nulle, et se révèle alors de surcroît inutile à tous les niveaux : mathématique, automatique, mécanique et technologique ».

■ Dans la deuxième version de la «controverse», diffusée le 20/12/2000, G. Montseny conclut que la solution CRONE « *ne peut pas soutenir le poids Mg du véhicule* ».

■ Dans une nouvelle version du 15 juin 2001 adressée par un envoi massif auprès de la communauté, des industriels et hors communauté concernée, G. Montseny s'exprime de nouveau sur la «Suspension CRONE», en parlant « *d'oubli rédhibitoire de la pesanteur »* et en tentant de démontrer « *l'incompatibilité de la précompensation du poids »* à partir d'un schéma sur lequel il fonde sa démonstration.

■ Dans son courrier du 14 juin 2001 à ALSTOM, G. Salut appuie les dires de G. Montseny en écrivant *« La robustesse*

¹ LANUSSE Patrick, MELCHIOR Pierre, MOREAU Xavier, OUSTALOUP Alain et SABATIER Jocelyn

² Point abordé par G. Montseny et G. Salut dans le paragraphe II de sa communication CIFA 2002

alléguée dans cette suspension repose sur une bévue : l'oubli du poids du véhicule comme perturbation statique, en sus de son inertie comme élément dynamique. Le recours à une prestabilisation séparée, parfois invoquée, est évidemment illusoire Ce pavé dans la mare de notre communauté n'a pas fini de faire des vagues. »

■ Dans son courrier du 26 juin 2001 à Francis JUTAND, G. Salut écrit « Comment, en effet, ne pas sourire d'une suspension automobile dont le principe de robustesse ne peut s'accommoder de la gravité terrestre? »

■ Enfin, dans la remarque sur la thèse de Xavier MOREAU qui complète depuis le mois de juillet 2001 le document ayant fait l'objet de l'envoi massif de juin 2001 et qui est accessible sur le site du LAAS, G. Montseny parle de l'étrange disparition d'une fonction temporelle qu'il dit représenter le poids, formulant ainsi la non-prise en compte du poids du véhicule.

Pour conclure à la non-compensation du poids du véhicule, G. Montseny appuie son discours

- sur la nullité, à fréquence nulle, de la réponse fréquentielle force-débattement de la première version de la suspension, à savoir

$$C(j\omega) = k (j\omega)^{\nu} = 0 \quad pour \quad \omega = 0 , \quad (1)$$

- ou sur une faible raideur statique de la deuxième version, celle-ci se distinguant de la première par une limitation, entre deux fréquences transitionnelles ω_b et ω_h , de l'action différentielle non entière que représente $C(j\omega) = k (j\omega)^{\nu}$.

G. Montseny écrit en effet « *La conclusion qui s'impose* d'emblée est qu'une telle transmittance, qui présente une raideur statique nulle (C(0) = 0) »

- « est incapable de soutenir le poids Mg du véhicule, simplement oublié dans [22]³ » (envoi du 1/12/2000)
- « ne peut pas soutenir le poids Mg du véhicule (non existence d'état d'équilibre statique si Mg ≠ 0), oublié dans [8]⁴, [9]⁵ » (diffusion du 20/12/2000).

Réponse de l'équipe CRONE

Tout d'abord, afin de rassurer le lecteur, il convient de souligner que l'équipe CRONE n'a pas oublié le poids du véhicule, les développements de cette réponse ayant pour but de le démontrer.

Une lecture des articles relatifs à la «Suspension CRONE», ainsi qu'une recherche bibliographique sur l'isolation vibratoire d'une manière générale et sur les suspensions de véhicules en particulier, permettent de constater que l'étude du comportement dynamique des suspensions s'effectue toujours autour de la position d'équilibre statique [1] [2] [3] [4] [5]. C'est la raison pour laquelle dans tous les articles rencontrés dans la littérature sur les suspensions (et pas seulement sur la «Suspension CRONE»), le poids de la caisse du véhicule est absent de l'équation différentielle qui décrit son comportement dynamique dans la direction verticale (pompage) [6] [7] [8] [9] [10]. Cette absence se démontre simplement dès l'instant où la variable associée au pompage est un déplacement défini par rapport à la position d'équilibre statique.

Pour une suspension mécanique équipée d'un ressort hélicoïdal, la position d'équilibre statique dépend du rapport entre le poids de la caisse et la raideur de suspension. Avec cette technologie, la fonction *maintien de la charge statique* (dont l'efficacité est d'autant plus importante que la raideur de suspension est importante) et la fonction *isolation vibratoire* (dont l'efficacité est d'autant plus importante que la raideur est au contraire faible) ne peuvent être découplées, d'où la présence d'un dilemme.

Pour une suspension hydropneumatique Citroën, la position d'équilibre statique est indépendante du poids [11] [12] [13] [14] [15]. Elle ne dépend que du correcteur de hauteur dont la dynamique est suffisamment lente par rapport à la dynamique verticale de la caisse pour considérer que les fonctions maintien de la charge statique et isolation vibratoire sont découplées. En effet, le schéma fonctionnel associé à l'équation opérationnelle qui décrit le comportement dynamique de la caisse montre clairement que l'ensemble constitué du correcteur de hauteur et de la suspension a le même rôle qu'un régulateur PID d'une boucle de commande [15]. L'action intégrale est due à la présence du correcteur de hauteur, l'action proportionnelle à celle du ressort à gaz et l'action dérivée à celle de l'amortisseur. Indépendamment des aspects énergétiques liés à la présence d'un composant actif basse fréquence que représente le correcteur de hauteur, toute augmentation de sa rapidité (qui affecterait alors le découplage) conduirait à une diminution du degré de stabilité de la caisse, voire à une instabilité, résultat bien connu des automaticiens. L'effet intégral du correcteur de hauteur (Annexe 1) est fondé sur l'injection, par une source hydraulique via un distributeur, d'un débit d'huile q(t) dans un cylindre de section S, l'évolution du niveau d'huile injectée, soit

$$h(t) = \frac{1}{S} \int_0^t q(\tau) d\tau \quad , \tag{2}$$

exprimant la mise en position d'équilibre statique de la caisse du véhicule. La fermeture du distributeur lorsque cette position est atteinte, fige alors l'altitude de la caisse conformément à un asservissement de position. La fonction *maintien de la charge statique* qu'assure le correcteur de hauteur, fait l'objet d'une documentation technique déjà bien connue, puisqu'un tel correcteur est monté en série chez Citroën dès le début des années 50 à travers la suspension arrière de la traction en version oléopneumatique. Notre domaine d'étude, conforme à celui de nos propres contributions, se trouve ainsi naturellement centré sur la fonction *isolation vibratoire* qu'assure la suspension.

Pour une «Suspension CRONE» passive réalisée en technologie hydropneumatique, telle qu'implémentée à la fois sur une BX, une Xantia et une XM, véhicules proposés en démonstration et présentés par PSA lors de la remise de la médaille d'argent du CNRS à Bordeaux le 12 mars 1998, et ce en présence de G. Montseny lui-même, la position d'équilibre statique est elle aussi indépendante du poids en raison du correcteur de hauteur, correcteur dont nos écrits n'ont jamais

³ [22] A. Oustaloup, X. Moreau and M. Nouillant - *The CRONE suspension* - Control Engineering Practice, Journal of the International Federation of Automatic Control, Vol. 4, N°8, pp 1101-1108,1996.

^{[8] = [22] = [17]} dans ce document

⁵ [9] A. Oustaloup, J. Sabatier and X. Moreau – *From fractal robustness to the CRONE approach* – ESAIM Proceeding, Vol.5, pp.177-192, 1998.

remis en cause la présence sur ces trois véhicules, aucun écrit n'ayant en effet exprimé que la «Suspension CRONE» permettait de s'affranchir d'un tel correcteur, le véhicule n'ayant fait l'objet d'aucun changement autre que celui relatif au remplacement des sphères. G. Montseny écrit d'ailleurs luimême dès son document du 20 décembre 2000 « *le reste du véhicule est* inchangé. »

En résumé, le correcteur d'assiette (ou de hauteur) est un asservissement de position qui assure, au repos, une altitude constante de la caisse indépendamment de son poids ou, plus généralement, de tout effort statique qui s'y exerce [16].

L'effort statique développé par la suspension n'a ainsi aucune action sur le point de repos de la caisse.

Aussi, une faible valeur de cet effort dans le cas de la deuxième version de la suspension telle qu'implémentée sur véhicule, voire la nullité de cet effort, conformément à celle de la réponse fréquentielle $C(j\omega)$ de la première version pour $\omega = 0$, ne peuvent constituer un problème en termes d'équilibre statique de la caisse.

Cette analyse de l'équipe CRONE est confirmée par un courrier de PSA adressé à Geneviève BERGER le 13 février 2001 (avec copie à Francis JUTAND et Jean-Jacques GAGNEPAIN, respectivement Directeurs Scientifiques des Départements STIC et SPI). Dans ce courrier, il est en effet écrit « L'auteur fonde son argumentaire sur l'oubli de la prise en compte du poids (!!!) dans la conception du système de «Suspension CRONE» passive. Dans son analyse, M. MONTSENY omet de considérer l'action du correcteur de hauteur. Cette technologie de suspension hydropneumatique permet par injection de fluide de maintenir une assiette constante au véhicule lorsque l'on charge le véhicule. L'augmentation de la pression de l'huile permet alors de compenser l'effet de la charge par l'intermédiaire de la section du piston (F = Mg = PS), ceci même pour des raideurs de suspension très faibles. » Dans ce même courrier, les auteurs concrétisent leur position en écrivant « Plusieurs dispositifs ont été calculés, réalisés puis mesurés sur des bancs d'expérimentation. Plusieurs véhicules ont été équipés des « Suspensions CRONE », testés sur des pistes puis mesurés. Tout ceci a permis de valider l'apport du concept CRONE dans le domaine des suspensions, notamment sur les aspects d'isolation vibratoire et de robustesse tels que prévus par la théorie. »

L'analyse de l'équipe CRONE est aussi confirmée par Claude BONTHOUX, Professeur de Mécanique, créateur et directeur de l'Institut Français de Mécanique Avancée de 1988 à 1999 qui, par courrier adressé le 27 janvier 2001 aux départements SPI et STIC, réfute la remarque de G. Montseny en écrivant, sur l'étude des vibrations ou petits mouvements, « Ils s'étudient toujours en mouvement relatif à partir d'une position d'équilibre obtenue par un ressort qui équilibre le poids du véhicule ou par un correcteur d'assiette. Sa remarque n'a donc pas lieu d'être. »

■ Dans sa version du 15 juin 2001, G. Montseny propose, sous l'intitulé « *Instabilité de principe de la «Suspension CRONE» »*, le schéma fonctionnel de la figure1 à partir duquel il écrit « *mais le système complet (avec poids)* :

$$z(p) = \dots \qquad \approx p \to 0 \quad w(p) - \frac{1}{p^{\alpha}} \frac{Mg/p}{k}$$
(3)

est alors **instable** et s'enfonce indéfiniment sous l'effet du poids Mg (**intégration** d'ordre $\alpha > 0$ de l'échelon Mg/k > 0). »



Figure 1

Réponse de l'équipe CRONE

L'enfoncement indéfini du système sous l'effet du poids Mg qu'exprime G. Montseny conformément à son résultat, est bien lié à la présence du poids Mg dans le schéma qu'il propose.

Là encore, G. Montseny omet de considérer l'action du correcteur d'assiette.

Conformément à l'action du correcteur d'assiette telle que décrite plus haut et qui précompense le poids Mg du véhicule, la présence du poids Mg en tant que perturbation n'a pas de raison d'être.

Dans l'étude du comportement dynamique autour de la position d'équilibre statique, telle que menée par l'équipe CRONE pour toute masse suspendue M prenant en compte toute charge additionnelle du véhicule [15] [16] [17] [18] [19], les notions élémentaires de masse et de poids font l'objet de la distinction qu'il convient : la masse, M, à travers l'accélération verticale $\ddot{z}(t)$ due au pompage, intervient dans l'équation différentielle qui décrit le comportement dynamique et dont le schéma fonctionnel aux variations est une traduction (voir développements ci-dessous) ; en

revanche, le poids, Mg, à travers l'accélération gravitationnelle, n'intervient que dans l'équation d'équilibre statique et en aucun cas dans ce schéma fonctionnel.

Aussi, en faisant figurer le poids Mg dans le schéma qu'il propose, G. Montseny discourt et appuie sa démonstration sur un objet qui n'est pas la «Suspension CRONE». Le résultat qu'il peut en tirer ne concerne donc pas cette suspension.

Dans tous nos écrits, tous les déplacements sont définis par rapport à l'état d'équilibre statique. Ainsi, dans notre démarche, z(t) représente le déplacement de la caisse par rapport à sa position d'équilibre statique, et w(t) le déplacement de la roue par rapport à sa position d'équilibre statique, la différence w(t) - z(t) représentant le débattement de la suspension (figure 2).



Figure 2

L'application du principe fondamental de la dynamique permet d'écrire :

$$M s^{2} Z(s) = C(s) (W(s) - Z(s))$$
, (4)

C(s) désignant le transfert force-débattement de la suspension, d'où l'on tire :

$$\frac{Z(s)}{W(s)} = \frac{C(s)}{C(s) + M s^2} = \frac{\beta(s)}{1 + \beta(s)} , \qquad (5)$$

transfert qui peut être interprété comme la transmittance en asservissement d'une boucle de commande dont la transmittance en boucle ouverte est de la forme

$$\beta(s) = \frac{C(s)}{M s^2} , \qquad (6)$$

ce que traduit bien le schéma fonctionnel proposé par G. Montseny (figure 1) *mais exempt du poids Mg en tant que perturbation*, schéma fonctionnel (figure 3) qui ne conduit pas à l'enfoncement indéfini du système sous l'effet du poids.



Figure 3

■ Par ailleurs, toujours dans cette même version, G. Montseny propose, sous l'intitulé « *Impossibilité d'une prestabilisation préservant la robustesse* », le schéma fonctionnel de la figure 4 à partir duquel il tire des remarques et notamment « seule une compensation du poids en boucle ouverte pourrait préserver la forme (1)*; ce n'est évidemment pas réalisable pour un véhicule terrestre : cela nécessiterait l'équivalent de l'annulation locale du champ de gravitation⁵. (⁵ Qu'il soit statique, ou dynamique lors d'accélérations horizontales du véhicule.) »





Réponse de l'équipe CRONE

Ce schéma révèle la présence d'une boucle de précompensation qui compare une force à un déplacement (force développée par la suspension, notée u(t), et déplacement de la caisse, noté z(t)). En effet, comme le montre le premier schéma (figure 1), la sortie du transfert force-débattement de la suspension, noté C(s), est bien une force (que G. Montseny superpose d'ailleurs au poids Mg). Il s'avère que dans le second schéma (figure 4) sur lequel il fonde sa démarche, cette force u(t) est comparée au déplacement z(t) de la caisse. Aussi G. Montseny discourt et appuie sa démonstration sur un objet qui n'est pas correct. Le lecteur intéressé trouvera, dans l'annexe 1, la véritable solution de précompensation du poids par un correcteur d'assiette tel que développé par Citroën.

■ Concernant le complément de juillet 2001, G. Montseny reprend le schéma de la figure 5 qui représente le modèle à deux degrés de liberté (ddl) d'un quart de véhicule et qui figure dans la thèse de Xavier MOREAU [7].



Figure 5 – Modèle à 2 ddl d'un quart de véhicule

Pour étayer ses affirmations, G. Montseny tire également de la thèse les trois équations suivantes ($f_2(t)$ représentant l'effort développé par la suspension) :

$$m_1 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 z_1(t) = k_1 \left[z_0(t) - z_1(t)\right] + b_1 \frac{d}{dt} \left[z_0(t) - z_1(t)\right] - f_2(t) , \quad (7)$$

$$m_2 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 z_2(t) = f_1(t) + f_2(t), \qquad (8)$$

l'addition des relations (7) et (8) conduisant, en négligeant l'amortissement du pneumatique, à l'expression

$$m_2 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 z_2(t) + m_1 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 z_1(t) - k_1 \left[z_0(t) - z_1(t)\right] = 0 \quad (9)$$

Enfin, G. Montseny formule ses affirmations sous la forme du Nota Bene suivant

« N.B. : Le poids est représenté par $f_1(t)$ (« sollicitation extérieure sur la caisse »), et « l'amortissement du pneumatique » par b_1 , négligé dans la suite ($b_1 = 0$). On notera, dans l'addition (9), l'étrange disparition de $f_1(t)$, sur laquelle repose toute la thèse. »

Réponse de l'équipe CRONE

Lors de l'étude de la dynamique verticale d'un véhicule automobile, deux types de sollicitations sont prises en compte :

- les sollicitations de la route, notées $z_0(t)$, qui en raison de la difficulté de les estimer nécessitent une stratégie de commande par bouclage (feedback) permettant de les rejeter ;
- les sollicitations, notées $f_1(t)$, issues de l'action du conducteur sur les organes de conduite (pédales, volant, levier de vitesse) appelées reports de charge. La mise en place de capteurs sur les organes de conduite facilite leur estimation, permettant alors d'adopter une stratégie de commande par anticipation (feedforward). Mis à part des problèmes pratiques (nombre, localisation, coût des capteurs), cette stratégie ne présente pas de problèmes théoriques particuliers. C'est la raison pour laquelle ce type de sollicitations n'est pas traité dans la suite de cette

thèse, seules les sollicitations de la route sont prises en compte.

Dans l'interprétation que fait G. Montseny du modèle à deux degrés de liberté d'un quart de véhicule, en écrivant que « Le poids est représenté par $f_1(t)$ (sollicitation extérieure sur la caisse) », G. Montseny confond un poids constant m_2g (intrinsèque du système) qui n'intervient que dans l'équation d'équilibre statique avec une sollicitation extérieure fonction du temps $f_1(t)$ qui n'intervient que dans l'étude du comportement dynamique (et qui du reste est considérée nulle dans la définition du transfert entre les déplacements de la roue et de la caisse tel qu'utilisé dans la majeure partie de la thèse).

En utilisant ainsi cette confusion entre le poids de la caisse (constant) et une fonction (variable temporellement) qui n'a rien à voir mais qui est supposée nulle dans la suite des développements, G. Montseny voudrait démontrer que la pesanteur n'est pas prise en compte dans la conception de la «Suspension CRONE». C'est en fait une nouvelle façon, tout aussi rapide que celle fondée sur C(j0) = 0, de démontrer la non-sustentation de la caisse du véhicule.

II. SUR LA RAIDEUR STATIQUE DE LA «SUSPENSION CRONE»⁶

■ Dans son document du 20 décembre 2000, G. Montseny écrit « *La réalisation effectivement mise en œuvre est présentée comme une approximation de l'idéal ci-dessus par association de cellules convenablement tarées, conduisant à une raideur statique C₀ = 215 N/m, valeur physiquement négligeable, non admissible pour une suspension d'automobile. »*

■ Dans ce même document, G. Montseny écrit : « *Toutefois*, si tel était le cas, la suspension serait alors trop « molle » et le véhicule inutilisable ($C_0 = 215$ N/m ≈ 20 kgF/m), notamment à cause des talonnements induits par le report de masse lors d'accélérations horizontales du véhicule, longitudinales (tangage) ou transversales (roulis). »

Réponse de l'équipe CRONE

G. Montseny appuie ses remarques sur une valeur numérique de la raideur statique C_0 , à savoir 215 N/m, qu'il tire de l'article [17].

Dans cet article, cette valeur est relative à une conception illustrative, sans contraintes technologiques, qui fait volontairement appel à cinq cellules afin de conduire, pour des raisons évidentes de confidentialité avec PSA, à des valeurs numériques différentes de celles qui correspondent à la conception réelle avec trois cellules, telle que développée contractuellement avec PSA depuis 1990 et récompensée, par ailleurs, par le Trophée AFCET'95 distinguant la meilleure innovation technologique dans le cadre des relations Université-Industrie [18]. A ce propos, sans pour autant divulguer les valeurs conformément à son devoir de réserve, le

jury AFCET'95 peut, à sa discrétion, attester que les valeurs réelles, telles que figurant dans le dossier en sa possession, ne correspondent en aucun cas à celles sur lesquelles G. Montseny fonde son discours.

En d'autres termes, nul écrit de notre part ne stipule que la valeur numérique qui fait l'objet de cette discussion est relative à la réalisation à trois sphères. Le lecteur intéressé pourra d'ailleurs, à partir de l'article [19], constater par lui-même que la photo de cette réalisation proposée en fin d'article n'est accompagnée d'aucune valeur numérique, PSA nous ayant en effet autorisé à faire figurer cette photo à la condition de ne fournir aucune valeur spécifique de la réalisation. Il est à noter que dans ce même article [19], une autre conception illustrative de la «Suspension CRONE» hydropneumatique toujours avec cinq cellules (se voulant quant à elle viser les performances d'une suspension mécanique traditionnelle), met en jeu une raideur statique C_0 de 5 170 N/m.

Eu égard aux enjeux industriels de la société PSA Peugeot Citroën et aux règles de confidentialité qui régissent le partenariat contractuel avec cette société, comment imaginer, dans une communauté scientifique confrontée aux problèmes de valorisation, que l'équipe CRONE puisse bénéficier de l'autorisation de PSA pour divulguer publiquement, par la voie d'articles, les valeurs numériques significatives de l'optimisation des réglages sur véhicule. Ceci relève de la légitimité de la confidentialité qu'exige PSA au titre de son partenariat avec le CNRS. L'insistance de G. Montseny sur la valeur numérique d'un paramètre de réglage (en l'occurrence la raideur statique), ne va certes pas dans le sens de la reconnaissance de cette légitimité.

En résumé, en faisant porter son analyse sur une conception avec 5 cellules qui ne correspond aucunement à la réalisation à trois sphères (dont il reproduit cependant la photo dans sa « controverse »), G. Montseny discourt sur une valeur numérique d'un objet qui n'est pas celui qui équipe la version CRONE de la BX, de la Xantia et de la XM. Les conclusions qu'il en tire n'ont donc rien à voir avec les performances qu'assurent nos réalisations effectives sur véhicule.

La position de PSA à cet égard est des plus explicites et est exprimée dans deux courriers respectivement à l'intention de Geneviève BERGER et de G. Salut. Dans le premier, en date du 13 février 2001, il est en effet écrit «Il est important de préciser que pour des raisons de confidentialité, nous n'avons pas souhaité que MM. OUSTALOUP, MOREAU et NOUILLANT publient les valeurs optimisées qui tiennent compte des nombreuses contraintes d'une mise au point de suspension. » Dans le second, en date du 13 juillet 2001 avec copie à Geneviève BERGER, Francis JUTAND, Robert PEUGEOT (Directeur de la DINQ de PSA: Direction de l'INnovation et de la Qualité),....., il est aussi écrit « la société PSA Peugeot Citroën est liée par contrat à l'Université de Bordeaux 1 et les résultats des études entreprises sont couverts par une clause de confidentialité. M. MONTSENY n'est donc pas habilité à en prendre connaissance.»

Pour ce qui ne relève pas de la confidentialité mais qui concerne néanmoins les reports de charge évoqués par G. Montseny, il nous apparaît de rigueur de profiter de notre réponse pour apporter, au lecteur intéressé, des éléments technologiques essentiels qui contribuent, lors de reports de

⁶ Point abordé par G. Montseny et G. Salut dans le paragraphe II de sa communication CIFA 2002

charge, aux bonnes performances de la version CRONE hydropneumatique de la BX, configurée selon les valeurs optimales des paramètres de réglage (version telle que testée, dans les conditions les plus sévères, par le jury du Trophée AFCET'95).

Il faut en effet rappeler que les raideurs des suspensions hydropneumatiques traditionnelles sont déjà 4 à 5 fois plus faibles que celles des suspensions mécaniques. C'est la raison pour laquelle, les véhicules équipés de suspensions hydropneumatiques traditionnelles possèdent :

- des barres anti-roulis dont la raideur est plus importante que celle des suspensions mécaniques, permettant ainsi de limiter le roulis;
- des essieux avant et arrière dont la cinématique et l'élastocinématique ont été conçues pour limiter les variations de l'assiette du véhicule (roulis et tangage) lors des reports de charge.

Il est à noter en particulier l'effet anti-plongée de l'essieu arrière à bras tirés et roues indépendantes qui équipe en série la BX Citroën, et donc la BX CRONE. Cette propriété remarquable d'anti-plongée dont bénéficie aussi la BX CRONE lui permet de maintenir une assiette horizontale même lors d'un freinage d'urgence (enfoncement brutal de la pédale de frein) qui représente pour le véhicule une sollicitation des plus sévères. Cette propriété d'anti-plongée a été largement constatée au cours des nombreuses démonstrations de la BX CRONE, notamment par les participants aux journées « Automatique et Automobile » organisées à Bordeaux les 22 et 23 juin 1995 (parmi lesquels des constructeurs et des équipementiers du secteur automobile), mais aussi par les 17 membres du jury du Trophée AFCET'95 réunis à Toulouse le 25 octobre 1995 au salon SITEF (dont Jean-Jacques PAYANT, alors Directeur de la Recherche chez Renault).

III. SUR LA SOLUTION « LQG »⁷

■ Dans les deux versions de la «controverse», diffusées respectivement le 1/12/2000 et le 20/12/2000, G. Montseny écrit « ..., on montre que la solution stationnaire LQG-optimale est de la forme : C(s) = k s.»

Réponse de l'équipe CRONE

Reprenons le transfert entre les déplacements Z(s) de la caisse et W(s) de la roue, à savoir

$$\frac{Z(s)}{W(s)} = \frac{C(s)}{C(s) + M s^2} , \qquad (10)$$

dans lequel C(s) désigne le transfert force-débattement de la suspension.

La proposition de G. Montseny de remplacer $C(s) = k s^{v}$ avec 0 < v < 1 par C(s) = k s (qu'il qualifie de « solution stationnaire LQG-optimale»), revient en fait, en boucle fermée, à passer

- du transfert

$$\frac{Z(s)}{W(s)} = \frac{1}{1 + \frac{M}{k}s^{2-\nu}}$$
(11)

qui présente une décroissance de gain à raison de 6 (2-v) dB/oct (donc supérieure à 6 dB/oct)

- au transfert

$$\frac{Z(s)}{W(s)} = \frac{1}{1 + \frac{M}{k}s}$$
(12)

qui assure certes un dépassement nul mais qui, en termes de performances d'isolation vibratoire recherchées prioritairement par le constructeur, ne présente plus qu'une décroissance de gain à raison de 6 dB/oct, exprimant ainsi, par un filtrage moindre au-delà de la fréquence transitionnelle, une plus mauvaise isolation vibratoire et notamment aux fréquences qui correspondent à une grande sensibilité du corps humain.

Cette analyse de l'équipe CRONE ne fait que traduire mathématiquement la position de PSA à cet égard, communiquée directement à G. Montseny par un courrier du 04/01/01, à savoir « Quant au LQG optimal, je ne comprends pas bien ce qui est optimal et ce que vous voulez dire : une suspension qui réaliserait C(p) = k p (+ un système pour le statique) serait optimale car sans dépassement ? Une chose au moins est sûre, c'est que le véhicule serait pour le moins inconfortable... ».

IV. SUR LE REGLAGE DES RAIDEURS DES SPHERES DE SUSPENSION⁸

■ Dans les deux versions de la «controverse», diffusées respectivement le 1/12/2000 et le 20/12/2000, G. Montseny écrit « ..., on montre que la pression à vide p_0 d'une sphère Citroën ne peut être ajustée que dans des proportions très limitées¹⁶ (¹⁶ De l'ordre de 20% dans le meilleur des cas) »...... « Cette constatation conduit à une impasse technologique : contrairement à ce qui est annoncé dans [24], et [25], les 3 sphères par roues montées sur la BX expérimentale ne peuvent physiquement avoir que des raideurs sensiblement égales, voisines de la raideur d'origine fixée par Citroën, ou bien être en état de saturation (raideur quasi-infinie) si elles s'en éloignent... »

Réponse de l'équipe CRONE

Cette affirmation est inexacte. La suspension hydractive commercialisée par Citroën depuis 1989 est un parfait exemple d'illustration des possibilités de réglage de la constante de raideur des sphères Citroën. Le lecteur intéressé trouvera dans [15] une description précise de la suspension

Conférence Internationale Francophone d'Automatique, Nantes, 8-10 juillet 2002

⁷ Point abordé par G. Montseny et G. Salut dans le paragraphe II de sa communication CIFA 2002

⁸ Point abordé par G. Montseny et G. Salut dans le paragraphe III de sa communication CIFA 2002

hydropneumatique de Citroën ainsi que les calculs permettant de définir les possibilités de réglage de la constante de raideur dans le cas d'une suspension avant de Citroën BX. Toutes les valeurs paramétriques nécessaires pour les calculs nous ont été fournies par PSA pendant la période 1990-1995 au moment du dimensionnement de la «Suspension CRONE» passive développée en technologie hydropneumatique.

Le résultat de ces calculs est que le rapport entre la pression de tarage maximale ($p_{0max} = 71.5$ bar) et la pression de tarage minimale ($p_{0min} = 10$ bar) est de l'ordre de 7 et ne correspond donc en aucun cas aux 20 % avancés par G. Montseny. Ce rapport peut même être augmenté (de 7 à 13) avec l'utilisation de sphères Citroën de 700 cm³ à la place des sphères de 400 cm³.

Cette analyse de l'équipe CRONE est d'ailleurs confirmée par PSA par courrier adressé à Geneviève BERGER le 13 février 2001. Dans ce courrier il est en effet écrit « *il est possible d'obtenir des variations de raideur beaucoup plus importantes (d'au moins un facteur 8 entre raideurs mini et maxi), ceci par variation de la pression de gonflage ou par variation du volume des sphères ».*

V. SUR LA NON-LINEARITE DES SPHERES DE SUSPENSION ⁹

■ Dans les deux versions de la «controverse», diffusées respectivement le 1/12/2000 et le 20/12/2000, G. Montseny écrit «On montre que la raideur d'un ressort pneumatique tel que la sphère de suspension Citroën, augmente nécessairement avec la charge : ceci est un des avantages spécifiques de la suspension hydropneumatique.

Or dans la solution CRONE, les constantes de raideur et d'amortissement des cellules sont données comme indépendantes de la charge, considérée comme paramètre d'incertitude dans une approche « commande robuste » linéaire avec compensateur invariant. En conséquence, la solution CRONE est également de ce point de vue irréalisable au moyen de sphères Citroën. »

Réponse de l'équipe CRONE

La prise en compte de la non-linéarité des sphères, telle que l'exigent la conception et la réalisation de la «Suspension CRONE» dans une technologie hydropneumatique, conduit à des performances qui sont nettement en faveur de l'approche CRONE puisque, contrairement à une suspension traditionnelle, l'amortissement de la «Suspension CRONE» reste, dans son principe, indépendant de la masse suspendue M.

En effet, la variation des raideurs en fonction de la masse M, à travers la non-linéarité des sphères, s'effectue

- à rapport constant des raideurs (voir Annexe 2)

- donc à valeur constante des facteurs récursifs α et η qui caractérisent les distributions de coefficients de frottement visqueux et de raideurs utilisées dans la synthèse de C(s) = k s^{v}

- et ainsi à valeur constante de l'ordre non entier v directement lié aux facteurs récursifs α et η conformément à (voir Annexe 3)

$$v = \frac{\log \alpha}{\log(\alpha \eta)} , \qquad (13)$$

ordre non entier v qui fixe le facteur d'amortissement ζ conformément à (voir Annexe 4)

$$\zeta = -\cos\left(\frac{\pi}{2-\nu}\right) \,. \tag{14}$$

Au plan pratique (que caractérise un nombre réduit de cellules de synthèse), la désensibilisation du facteur d'amortissement à la masse suspendue, dont l'idée emprunte à un tel principe, est certes un avantage remarquable qu'offre la version hydropneumatique de la «Suspension CRONE».

Cette analyse de l'équipe CRONE est confirmée par la réponse de PSA donnée sur ce point par le courrier du 04/01/01 directement à l'intention de G. Montseny et dans lequel il est écrit « Il s'agit bien là d'avantages incontournables de la suspension Citroën. Contrairement à ce que vous sousentendez, ceci est favorable dans le cas d'une «Suspension CRONE» réalisée avec des sphères. »

VI. SUR LA PROPRIETE D'ADAPTATIVITE

■ Toujours dans les deux versions de la «controverse», G. Montseny écrit « A noter qu'indépendamment de sa raideur statique nulle qui ne permet pas de sustenter le véhicule, la solution CRONE ne saurait concurrencer, sur les aspects dynamiques, la solution originelle, mise au point au début des années 50 : cette dernière présente en effet une propriété d'adaptativité grâce à la non-linéarité du ressort précédemment évoquée (raideur variant avec le poids), particulièrement avantageuse pour la suspension, et qui, par principe, doit disparaître dans la solution CRONE, au profit d'une invariance de facteur de surtension que rien ne justifie au plan mécanique. »

La réponse de PSA, telle que formulée dans le courrier du 13/02/01 à l'intention de Geneviève BERGER, est sans équivoque. Dans ce courrier, il est en effet écrit « Nous avons vérifié sur véhicule que la «Suspension CRONE» présente des qualités d'adaptativité plus importantes que la série par la non-linéarité des raideurs et par l'apport du non-entier. »

VII. SUR LE BRUIT BLANC EN ISOLATION VIBRATOIRE DE VEHICULE¹⁰

Dans sa communication du CIFA 2002, G. Montseny écrit

 $^{^{9}}$ Point abordé par G. Montseny et G. Salut dans le paragraphe III de sa communication CIFA 2002

 $^{^{10}}$ Point abordé par G. Montseny et G. Salut dans les paragraphes I et II de sa communication CIFA 2002

- dans le paragraphe I, « On notera que le cas $n \ge 2$ nécessite une simplification illicite car $\alpha > 0$, de la fonction de transfert p^{α} , terme qui recèle une instabilité interne en réponse au bruit blanc »;
- dans le paragraphe II, « cela nécessite une simplification illicite par le terme p^{α} , $\alpha > 0$, qui recèle l'instabilité interne déjà signalée ».

Réponse de l'équipe CRONE

A. Sur le modèle de l'excitation

Dans le cas général d'un contexte déterministe ou stochastique, le concept de processus générateur consiste à considérer la perturbation comme résultant du filtrage d'un signal w(t)« irréductible » (impulsion ou bruit blanc gaussien). Selon la forme du spectre de la perturbation, le filtre formeur peut être d'ordre entier ou non entier.

Dans le cas particulier de l'étude de la dynamique verticale d'un véhicule [20] [21] [22] [23] [24], la densité spectrale de puissance (DSP) de l'élongation verticale $z_0(t)$ d'un profil routier présente deux pentes négatives dont les valeurs sont des multiples non entiers de 12 dB/oct [21]. Une telle densité spectrale peut être modélisée [25] à partir d'un bruit blanc $w_0(t)$ de DSP égale à une constante *c* et d'un filtre non entier de transfert H(s) défini par une expression de la forme :

$$H(s) = \frac{Z_0(s)}{W_0(s)} = H_0 \left(\frac{\left(1 + \frac{s}{\omega_0}\right)^{\nu_1}}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^{\nu_1}} \right) \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{\omega_0}\right)^{\nu_2}}, \quad (15)$$

où les ordres v_1 et v_2 appartiennent à \Re^+ , transfert dont les diagrammes asymptotiques de gain et de phase sont présentés figure 6. Le signal de sortie $z_0(t)$ possède alors une DSP $S_{z_0}(\omega)$ de la forme :

$$S_{z_0}(\omega) = c H_0^2 \frac{\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^{\nu_1}}{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2\nu_1}} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^{\nu_2}}.$$
 (16)



Figure 6 - Diagrammes asymptotiques de Bode de $H(j\omega)$

Le signal $z_0(t)$ étant appliqué au modèle à deux degrés de liberté d'un quart de véhicule en tant que sollicitation de la route, le déplacement vertical $z_1(t)$ de l'axe de la roue est alors tel que :

$$Z_1(s) = T_1(s) Z_0(s), (17)$$

où le transfert $T_1(s)$, dans le cas d'un modèle à deux degrés de liberté tel que représenté figure 7, a pour expression :

$$T_1(s) = \frac{b_1 m_2 s^3 + (k_1 m_2 + b_1 b_2) s^2 + (k_1 b_2 + k_2 b_1) s + k_1 k_2}{D(s)}, (18)$$

avec

$$D(s) = m_1 m_2 s^4 + (b_1 m_2 + b_2 (m_1 + m_2)) s^3 + (k_2 (m_1 + m_2) + k_1 m_2 + b_1 b_2) s^2 + (k_1 b_2 + k_2 b_1) s + k_1 k_2$$
(19)

 $T_{I}(s)$ est un transfert du type passe-bas qui présente en haute fréquence une décroissance du gain à raison de 20 dB/dec, voire de 40 dB/dec si le coefficient de frottement visqueux équivalent b_{I} du pneumatique est négligé (comme c'est souvent le cas compte tenu de sa faible valeur devant celle du coefficient de frottement visqueux b_{2} de l'amortisseur).

Ainsi, le bruit blanc gaussien $w_0(t)$ utilisé dans le processus générateur de l'élongation verticale $z_0(t)$ du profil routier doit faire l'objet d'un deuxième filtrage pour que le modèle stochastique du déplacement vertical $z_1(t)$ en tant que sollicitation de l'étage secondaire (constitué de la suspension et de la masse suspendue) soit réaliste.



Figure 7 – Modèle à 2 ddl d'un quart de véhicule équipé d'une suspension traditionnelle

En résumé, l'utilisation par G. Montseny d'un bruit blanc en tant que signal modélisant le déplacement vertical de l'axe de la roue, qu'il note y(t) sur sa figure 1 de sa communication de CIFA 2002, n'est absolument pas réaliste. La conclusion qu'il en tire, à savoir « terme qui recèle une instabilité interne en réponse au bruit blanc » n'a pas de raison d'être eu égard à la réalité des excitations en isolation vibratoire de véhicule.

B. Sur la représentativité et la cohérence des modèles

Quand dans l'introduction de la communication de CIFA 2002, G. Montseny et G. Salut parlent d'une simplification illicite et d'une instabilité interne en réponse au bruit blanc, les auteurs discutent, sous l'hypothèse d'une excitation par bruit blanc, d'un objet théorique qui consiste en un bouclage d'un correcteur $C(p) = k p^{\alpha}$ avec $\alpha > 0$ en cascade avec un procédé $G_{\lambda}(p) = \lambda p^n$ avec $n \ge 2$ (figure 8). Le correcteur que considèrent les auteurs s'avère correspondre à une forme idéale du transfert force-débattement de la « Suspension CRONE ». Le procédé qu'ils considèrent est une généralisation au-delà de n = 2 de celui qui figure dans le schéma fonctionnel de la suspension, à savoir $G(p) = 1/Mp^2$ (figure 3).





La forme idéale du transfert force-débattement définie par

$$C(p) = k \ p^{\alpha} \quad , \tag{20}$$

fait abstraction de sa réalisabilité dans tout l'espace des fréquences, sachant que la synthèse de l'opérateur de dérivation non entière étendue à l'ensemble des fréquences exigerait une infinité de zéros et de pôles. Représentative de la réalité aux fréquences moyennes, significatives en isolation vibratoire, cette forme idéale n'est notamment pas représentative de la réalité en haute fréquence. En effet, un silent-block en élastomère, appelé coupelle antibruit, est intercalé au niveau de la liaison entre la suspension et la caisse. Ce composant essentiellement élastique constitue un étage supplémentaire qui participe à l'isolation vibratoire haute fréquence [15].

Ainsi, étant donné le comportement élastique de la suspension à la fois aux basses et aux hautes fréquences, une forme idéale plus représentative de la réalité pour l'ensemble des fréquences admet une expression de la forme [15] :

$$C(p) = C_0 \left(\frac{1 + \frac{p}{\omega_b}}{1 + \frac{p}{\omega_h}}\right)^{\alpha} .$$
 (21)

Enrichie par l'introduction des fréquences transitionnelles basse et haute, ω_b et ω_h , cette forme idéale prend en compte sa réalisabilité dans tout l'espace des fréquences.

Aux fréquences moyennes qui correspondent au domaine d'étude de la fonction isolation vibratoire, les formes idéales ainsi définies sont équivalentes et par conséquent tout aussi représentatives de la réalité.

C'est pourquoi, dans le domaine de l'isolation vibratoire qui constitue notre centre d'intérêt, nous n'avons pas remis en cause le choix de G. Montseny et G. Salut de ne considérer que la première forme idéale. En revanche, lorsque G. Montseny et G. Salut continuent à porter leur choix sur cette forme idéale dans le contexte d'une excitation par bruit blanc, il y a, en ce choix, une véritable incohérence entre

- l'excitation dont le spectre occupe alors uniformément tout l'espace des fréquences
- et l'objet excité (première forme idéale) qui n'est représentatif de la réalité qu'aux fréquences moyennes (et en aucun cas aux hautes fréquences, déterminantes quant à elles en termes de sensibilité de l'entrée du procédé).

Les affirmations que peuvent tirer G. Montseny et G. Salut de cette incohérence ne concernent donc pas la « Suspension CRONE ».

A titre de remarque, il convient de souligner que l'instabilité interne en réponse au bruit blanc du terme p^{α} avec $\alpha > 0$ (dont parlent les auteurs dans le cadre d'étude discuté ici), concerne aussi le PID à travers son action différentielle p, PID dont les auteurs font abstraction de cette instabilité bien qu'ils le définissent par

$$C(p) = C_0 + k \ p + \varepsilon \frac{1}{p}$$
(22)

dans le papier CIFA 2002 au paragraphe II.B intitulé « Les solutions traditionnelles ». Cette remarque est d'autant plus importante que l'action différentielle est plus marquée pour le PID que pour le CRONE (puisque $\alpha = 1$ pour le PID et $\alpha = 0.5$ pour le CRONE avec une marge de phase de 45°). La différence entre PID et CRONE en termes de sensibilité de l'entrée du procédé, en est certes un exemple illustratif.

Quant à la stabilité interne proprement dite, telle qu'elle est définie pour une boucle de commande au sens de M. Vidyasagar [26], elle s'avère assurée aussi bien pour l'une ou l'autre des deux formes idéales du transfert forcedébattement de la suspension. Une telle stabilité est en effet garantie si tous les transferts (figure 9) liant les signaux s(t), u(t) et $\mathcal{E}(t)$ aux différents signaux exogènes e(t), $d_u(t)$ et $d_s(t)$ sont stables, et tel est le cas.



Figure 9

Enfin, quand on sait qu'une excitation par bruit blanc n'est pas représentative de la réalité en matière d'isolation vibratoire de véhicule, et ce conformément au point A de notre réponse, toutes les sources de bruit étant en effet filtrées, *le constat est que G. Montseny et G. Salut ne choisissent*

ni le bon modèle d'excitation
ni le bon modèle de transfert.

En conclusion, un tel irréalisme des modèles retenus, certes à l'origine de résultats qui n'ont rien à voir avec la réalité de la « Suspension CRONE », nous entraîne sur un terrain bien éloigné du cadre de la recherche technologique dans lequel se développe cette suspension.

Cette analyse de l'équipe CRONE est d'ailleurs conforme aux spécifications techniques fournies par PSA tant en matière de génération de profil routier que de plage de fonctionnement du dispositif de suspension. Dans le cas de l'isolation vibratoire, les spécifications sont en effet données pour une bande de fréquences de 50 Hz, que ce soit au niveau des sollicitations que de l'étage de suspension proprement dit.

VIII. REFERENCES

- [1] F. Autran, F. Bessière, J. Lévine et P. Rouchon : « La fonction suspension, du passif à l'actif : l'approche Valéo » ; Proc. EEA-CNRS workshop « Automatique et Automobile », Bordeaux, Juin 1995.
- [2] J. K. Hedrick : «Invariant Properties of Automotive Suspensions »; Journal of Automotive Engineering, Vol. 204, Part D, pp. 21-27, 1990.
- [3] D. Hrovat : « Influence of Unsprung Weight Vehicle Ride Quality » ; Journal of Sound and Vibration, Vol. 124, n°3, pp. 497-516, 1988.
- [4] D. Karnopp : «Active Damping in Road Vehicle Suspension Systems» ; Journal of Vehicle System Dynamics, Vol. 12, pp. 291-316, 1983.
- [5] D. Karnopp : «Force Generation in Semi-Active Suspensions Using Modulated Dissipative Elements» ; Journal of Vehicle System Dynamics, Vol. 16, pp. 333-343, 1987.
- [6] J. Lévine : « Are there new industrial perspectives in the control of mechanical systems ? »; in « Advances in Control (ECC99) », P.M. Frank Ed., pp.197-223, Springer, 1999.
- [7] X. Moreau : « La dérivation non entière en isolation vibratoire et son application dans le domaine de l'automobile. La suspension CRONE : du concept à la réalisation », Thèse de Doctorat soutenue le 1 Février 1995 à l'Université Bordeaux I.
- [8] A. G. Thompson : « The Effect of Tyre Damping on the Performance of Vibration Absorbers in an Active Suspension » ; Journal of Sound and Vibration, Vol. 133, n° 3, pp. 457-465, 1989.
- [9] C. Yue, T. Butsuen and J. K. Hedrick : « Alternative control laws for automotive active suspensions » ; Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Vol. 111, pp. 286-291, 1989.
- [10] D. A. Wilson, R. S. Sharp and S. A. Hassan : « The Application of Linear Optimal Control Theory to the Design of Active Automotive Suspensions » ; Vehicle System Dynamics, Vol. 15, pp. 105-118, 1986.
- [11] M. Alirand, H. Lachaize and M. Lebrun : « Study and analysis of an active self levelling suspension » ; Proceedings of IEEE, International Conference on Systems, Man and Cybernetics, tome 2, pp. 222-227, Le Touquet, October 17-20, 1993.
- [12] M. M. ElMadany : «Active Damping and Load Leveling for Ride Improvement» ; Computers and Structures, Vol. 29, n°1, pp. 88-97, 1988.
- [13] M. M. ElMadany : «Ride Performance Potential of Active Fast Load Leveling Systems» ; Vehicle System Dynamics, Vol. 19, pp. 19-47, 1990.
- [14] R. S. Sharp and S. A. Hassan : «On the Performance Capabilities of Active Automobile Suspension Systems of Limited Bandwidth »; Vehicle System Dynamics, Vol. 16, pp. 213-225, 1987.

- [15] X. Moreau : « De la suspension traditionnelle à la suspension CRONE : un tour d'horizon » - Journées d'étude « Automatique et Automobile » dans le cadre de l'Action "Automatique et Applications" du Club EEA, Ministère de la Recherche, SEE - Bordeaux, 24-25 Octobre 2001.
- [16] X. Moreau, O. Altet, C. Nouillant et A. Oustaloup : « Etude de l'influence de la suspension CRONE active sur la dynamique longitudinale d'un véhicule automobile en phase de freinage. Synthèse des commandes feedforward et feedback ». CIFA 2002, Nantes, 8-10 juillet, 2002.
- [17] A. Oustaloup, X. Moreau. and M. Nouillant : « The CRONE suspension » - Control Engineering Practice, Journal of the International Federation of Automatic Control, Vol. 4, N°8, pp 1101-1108,1996.
- [18] Trophée AFCET'95 décerné à une application particulièrement innovante en milieu industriel et résultant d'un exemple de réussite d'une collaboration entre chercheurs et industriels - La «Suspension CRONE» : du concept à la réalisation - Projet mené en collaboration avec PSA (Vélizy) - Toulouse, 26 Octobre 1995.
- [19] A. Oustaloup, X. Moreau. et B. Mathieu: « Commande CRONE : principes et exemple d'application »; Collection « Techniques de l'Ingénieur », Vol. R7422, pp. 1-15, 1997.
- [20] T. Dahlberg : « Optimization Criteria for Vehicles Travelling on a Randomly Profiled Road : a Survey » ; Vehicle System Dynamics, Vol. 8, pp. 239-252, 1979.
- [21] C.J. Dodds and J.D.Robson : «The Description of Road Surface Roughness» ; Journal of Sound and Vibration, Vol. 31, n°2, pp. 175-183, 1973.
- [22] M. Guglielmi and J. Levy-Vehel : « Analysis and simulation of road profile by means of fractal model »; AVCS'98 - IEEE International Conference on Advances in Vehicle Control Safety, Amiens, July 1-3 1998.
- [23] D. Karnopp : «Analytical Results for Optimum Actively Damped Suspensions Under Random Excitation »; Journal of Vibration, Acoustic, Stress and Reliability in Design, Vol. 111, pp. 279-282, july 1989.
- [24] G. V. Raju and S. Narayan : « Optimal Estimation and Control of Non-stationary Response of a Two-Degree-Of-Freedom Vehicle Model »; Journal of Sound and Vibration, Vol. 149, n°3, pp. 413-428, 1991.
- [25] X. Moreau, A. Oustaloup and M. Nouillant : « From analysis to synthesis of vehicle suspensions : the CRONE approach »; European Control Conference, ECC'99, Karlsruhe, Germany, 31 August - 3 September, 1999.
- [26] M. Vidyasagar : « Nonlinear systems analysis » ; Prentice-Hall International Editions, 1993.

Annexe 1

Le système complet de suspension hydropneumatique permet une régulation quasi-statique de l'assiette du véhicule grâce à un distributeur hydraulique commandé mécaniquement par une biellette (Figure 10.a). Chaque roue est reliée à un cylindre de suspension. Le cylindre de suspension comprend un piston qui est cinématiquement solidaire de la roue, et une sphère qui est montée à l'autre extrémité du cylindre. De plus, un silent-block en élastomère, appelé coupelle antibruit, est intercalé au niveau de la liaison entre la suspension et la caisse. Ce composant

Conférence Internationale Francophone d'Automatique, Nantes, 8-10 juillet 2002

essentiellement élastique constitue un étage supplémentaire de la suspension qui participe à l'isolation vibratoire haute fréquence.

Les comportements des ressorts à gaz et des amortisseurs hydrauliques sont linéarisés *autour de la position d'équilibre statique*. k_0 désigne la raideur du silent-block placé entre la caisse et la suspension, k_2 la raideur du ressort de suspension et b_2 le coefficient de frottement visqueux de l'amortisseur. Quant au correcteur d'assiette, il constitue un générateur de débit q(t), introduisant ainsi un degré de liberté supplémentaire repéré par $z_3(t)$. La figure 10.b présente le modèle quart de véhicule équipé d'une suspension hydropneumatique avec correcteur d'assiette.



Figure 10 – Schéma de principe de l'ensemble hydropneumatique correcteur d'assiette-suspension d'un quart de véhicule (a) et modèle associé (b)

L'expression de la force $f_s(t)$ développée par la suspension est de la forme

$$f_{s}(t) = k_{2} \left(z_{3}(t) - z_{4}(t) \right) + b_{2} \left(\dot{z}_{3}(t) - \dot{z}_{4}(t) \right) , \qquad (23)$$

où $z_3(t)$ et $z_4(t)$ sont donnés par :

$$z_{3}(t) = z_{1}(t) + \frac{1}{S} \int q(t) dt \quad \text{et} \quad z_{4}(t) = z_{2}(t) + \frac{f_{s}(t)}{k_{0}} , \quad (24)$$

S étant la section du vérin de suspension. Sous l'hypothèse de conditions initiales nulles, la transformée de Laplace de la relation (23), puis l'introduction des transformées de Laplace des relations (24) conduisent à l'expression de l'effort $F_s(s)$ dé-

veloppé par l'ensemble correcteur d'assiette-suspension en fonction de son débattement $Z_{ds}(s) = Z_2(s) - Z_1(s)$ et du débit Q(s), soit :

$$F_{s}(s) = \frac{k_{3}(k_{2} + b_{2}s)}{k_{3} + k_{2} + b_{2}s} \left\{ \frac{1}{Ss} Q(s) - Z_{ds}(s) \right\} , \qquad (25)$$

ou encore, sous forme canonique :

$$F_{s}(s) = C_{0} \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_{b}}}{1 + \frac{s}{\omega_{h}}} \right) \left\{ \frac{1}{S \ s} Q(s) - Z_{ds}(s) \right\} , \qquad (26)$$

en posant $C_0 = k_0 k_2 / (k_0+k_2)$, le gain statique, $\omega_b = k_2/b_2$, la fréquence transitionnelle basse et $\omega_h = (k_0+k_2)/b_2$, la fréquence transitionnelle haute.

La réduction du modèle du distributeur hydraulique du correcteur d'assiette conduit à une fonction de transfert du premier ordre entre le débit Q(s) délivré par le distributeur et l'écart $\varepsilon_{ds}(s)$, écart défini entre la hauteur d'assiette de référence qui fixe la position d'équilibre statique et le débattement $Z_{ds}(s)$, soit :

$$\frac{Q(s)}{\varepsilon_{ds}(s)} = \frac{A}{1 + \frac{s}{\omega_c}} , \qquad (27)$$

où *A* est le gain statique et ω_c la fréquence de coupure du distributeur. Dans la mesure où les variables $Z_2(s)$ et $Z_1(s)$ qui figurent dans le débattement de suspension $Z_{ds}(s)$ sont définies par rapport à la position d'équilibre statique, l'expression de l'écart $\varepsilon_{ds}(s)$ se réduit à

$$\varepsilon_{ds}(s) = -Z_{ds}(s) \quad . \tag{28}$$

En résumé, l'ensemble des équations fonctionnelles qui décrivent le comportement dynamique du sous-système lent constitué de la masse suspendue et de l'ensemble hydropneumatique, est de la forme :

$$\begin{cases} Z_{2}(s) = \frac{1}{m_{2} s^{2}} \{F_{s}(s) + F_{0}(s)\} \\ F_{s}(s) = C_{0} \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_{b}}}{1 + \frac{s}{\omega_{h}}} \right) \left\{ \frac{1}{S s} Q(s) - Z_{ds}(s) \right\} , \quad (29) \\ Q(s) = -\frac{A}{1 + \frac{s}{\omega_{c}}} Z_{ds}(s) \end{cases}$$

système d'équations auquel est associé le schéma fonctionnel de la figure 11.



Figure 11 - Schéma fonctionnel d'un quart de véhicule équipé de l'ensemble hydropneumatique correcteur d'assiette-suspension

Les deux boucles qui figurent dans ce schéma sont dynamiquement découplées. En effet, la boucle interne qui régule le débattement autour de la position d'équilibre statique est caractérisée par une fréquence au gain unité en boucle ouverte de l'ordre de 6 rad/s, alors que la boucle externe qui régule la position d'équilibre statique à une valeur égale à la moitié de la course de la suspension, est caractérisée par une fréquence au gain unité en boucle ouverte de l'ordre de 0.1 rad/s. Il est à noter que la fonction *isolation vibratoire*, objet de notre contribution, est relative à la boucle interne (et ce conformément aux propos du paragraphe 1).

L'introduction de l'expression de Q(s) en fonction du débattement $Z_{ds}(s)$ dans la relation (26) permet d'établir la fonction de transfert force-débattement de l'ensemble hydropneumatique, soit :

$$C_2(s) = C_0 \left(1 + \frac{K}{s} \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_c}} \right) \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_b}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right), \quad (30)$$

avec K = A/S, expression qui permet d'établir la boucle équivalente de la figure 12 dans laquelle l'ensemble hydropneumatique joue le même rôle qu'un correcteur PID [15].



Figure 12 - Boucle équivalente obtenue par réduction du schéma fonctionnel de la figure 11

et

Annexe 2

La raideur k_i de la sphère de rang *i* admet une expression de la forme :

$$k_i = \frac{(Mg)^2}{P_0, V_0} \ . \tag{31}$$

Le rapport k_{i+1}/k_i s'écrit alors :

$$\frac{k_{i+1}}{k_i} = \frac{P_{0_i}}{P_{0_{i+1}}} \ . \tag{32}$$

Exclusivement liée au rapport des pressions de deux sphères consécutives, la variation des raideurs en fonction de la masse M, s'effectue à rapport constant des raideurs de deux sphères consécutives.

Annexe 3

La «Suspension CRONE» passive a été développée à partir du lien qui existe entre récursivité et dérivation non entière. En effet, il est possible, sur une bande de fréquences donnée, de synthétiser la dérivation non entière en utilisant un ensemble de N cellules élémentaires ressort-amortisseur dont les constantes de temps sont distribuées de manière récursive (Figure 13). Chaque cellule développe un effort $f_i(t)$ de la forme :

$$f_i(t) = k_i z_{ri}(t) + b_i \frac{d}{dt} z_{ri}(t),$$
 (33)

où k_i est la raideur, b_i le coefficient de frottement visqueux et $z_{ri}(t)$ le déplacement relatif de la cellule de rang *i*, avec :

$$k_i = \eta^{i-1} k_1 \tag{34}$$

$$b_i = \frac{1}{\alpha^{i-1}} b_1 \,. \tag{35}$$



Figure 13 – Arrangement récursif de N cellules élémentaires ressort-amortisseur : schémas hydropneumatique (a) et mécanique équivalent (b)

A partir de l'écriture symbolique de la relation (33), soit

$$F_i(s) = [k_i + b_i s] Z_{ri}(s),$$
 (36)

on obtient la transmittance $C_i(s)$ de la cellule de rang *i*, soit :

$$C_{i}(s) = \frac{F_{i}(s)}{Z_{ri}(s)} = [k_{i} + b_{i} s].$$
(37)

L'arrangement étant de type parallèle puisque

$$f_1(t) = \dots = f_i(t) = \dots = f_N(t)$$
 (38)

$$\frac{d}{dt}z_{r}(t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}z_{ri}(t), \qquad (39)$$

 $z_r(t)$ étant le débattement de la suspension, la transmittance globale $C_N(s)$ de la suspension est de la forme :

$$\frac{1}{C_N(s)} = \frac{1}{k_0} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i(s)} = \sum_{i=1}^N \frac{\frac{1}{k_i}}{1 + \frac{s}{\omega'_i}},$$
 (40)

où

et

$$\omega'_i = \frac{k_i}{b_i} \,. \tag{41}$$

La réduction de l'expression (40) au même dénominateur conduit à la relation :

$$\frac{1}{C_N(s)} = \sum_{i=0}^N \frac{1}{k_i} \prod_{i=1}^N \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_i}}{1 + \frac{s}{\omega'_i}} \right), \tag{42}$$

où

 $\frac{\omega'_{i+1}}{\omega'_i} = \alpha \eta > 1.$ Finalement la transmittance $C_N(s)$ a pour expression :

$$C_N(s) = C_0 \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega'_i}}{1 + \frac{s}{\omega_i}} \right), \tag{44}$$

avec

Dans son principe, la synthèse de la «Suspension CRONE» passive repose sur par une transmittance d'ordre entier résultant d'une distribution récursive de N zéros et de N pôles médians appartenant à l'intervalle $[\omega'_1; \omega'_N]$ (Figure 14).

 $C_0 = \left(\sum_{i=0}^N \frac{1}{k_i}\right)^{-1}.$

Le lissage des marches d'escalier qui constituent le diagramme asymptotique de gain de $C_N(s)$ entre ω_h et ω_h (Figure 14), peut être matérialisé par une droite, appelée droite de lissage de gain, de pente inférieure à 6 dB/oct, soit 6 v dB/oct avec v compris entre 0 et 1 ; cette droite supporte l'asymptote de gain de C(s) entre ω_b et ω_h . En désignant par Δ la hauteur des marches d'escalier, les pentes de la droite de lissage de gain et d'une contremarche (pentes des segments AB et A'B') sont respectivement données par les équations :

$$6\nu \, dB/oct = \frac{\Delta \, dB}{\log \alpha + \log \eta} \tag{46}$$

et

(43)

(45)

et

 $6dB/oct = \frac{\Delta dB}{\log \alpha}$ (47)

desquelles on tire, en effectuant leur rapport, l'expression de l'ordre non entier v en fonction des facteurs récursifs α et η :

$$v = \frac{\log \alpha}{\log(\alpha \eta)}.$$
 (48)

Le lissage des créneaux qui constituent le diagramme asymptotique de phase de $C_N(s)$ entre ω_b et ω_h , peut être matérialisé par une droite, appelée droite de lissage de phase, d'ordonnée inférieure à $\pi/2$, soit $v\pi/2$ avec v compris entre 0 et 1 ; cette droite supporte l'asymptote de phase de C(s)entre ω_h et ω_h . En désignant par S l'aire des surfaces hachurées, l'ordonnée de la droite de lissage de phase et la hauteur d'un créneau s'expriment respectivement par les équations :

$$v\frac{\pi}{2} = \frac{S}{\log\alpha + \log\eta} \tag{49}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{S}{\log \alpha},\tag{50}$$

dont se déduit, en effectuant leur rapport, l'expression de vobtenue à partir du gain (relation (48)), soit :

$$v = \frac{\log \alpha}{\log(\alpha \eta)}.$$
 (51)



Figure 14 – Diagrammes asymptotiques de Bode de la «Suspension CRONE» passive idéale (- - - - -) et réelle (-----) pour $0 \le v \le 1$

Annexe 4

Pour $C(s) = k s^{\nu}$, le transfert entre les déplacements Z(s) de la caisse et W(s) de la roue s'exprime par la relation (11), soit :

$$\frac{Z(s)}{W(s)} = \frac{1}{1 + \frac{M}{k}s^{2-\nu}} \quad . \tag{52}$$

Solutions de l'équation

$$1 + \frac{M}{k}s^{2-\nu} = 0 \quad avec \quad 1 < 2 - \nu < 2 \quad , \tag{53}$$

les pôles sont complexes conjugués :

$$s_{1,2} = \left(\frac{k}{M}\right)^{\frac{1}{2-\nu}} e^{\pm j\frac{\pi}{2-\nu}} .$$
 (54)

Ils forment un demi-angle au centre θ , indépendant de M, tel que

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{2 - \nu} , \qquad (55)$$

duquel on tire le facteur d'amortissement ζ , soit :

$$\zeta = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{2-\nu}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2-\nu}\right).$$
 (56)