Essai sur l'inégalité

Paul Caspi

11 février 2002

1 Introduction

La question de l'inégalité a toujours intrigué et elle n'est pas plus préoccupante aujourd'hui qu'hier, ou plutôt elle est toujours aussi préoccupante. Comment se fait-il qu'il y ait de tels écarts de richesse entre les gens, entre les nations, de tels écarts de talents, d'activité ? Dans ma profession même, pourquoi des personnes déjà chargées d'honneurs continuent d'accumuler des publications avec une frénésie telle que l'on dirait que leur vie en dépend ?

Cela n'a cessé de me poser question, d'autant que mon éducation soixante-huitarde m'a toujours présenté l'idéal d'égalité comme éminemment souhaitable. A la fin, je me suis demande s'il n'y avait pas quelque chose d'objectif derrière tout cela. Depuis quelque temps me trottait derrière la tête une vague idée de modèle mathématique (la seule chose que je sois sensé savoir faire) et cela s'est débloqué pendant une semaine pluvieuse et sans neige dans les Vosges. C'est ce qui est exposé ici.

2 Un modèle mathématique

Je considère une population d'individus (qui peuvent être aussi des groupes ou des nations) et une quantité que j'appelle richesse, mais qui peut représenter toute autre quantité désirable selon les cas.

Soit $c(x,t)$ la densité d'individus possédant la richesse x à l'instant t.

Considérons une région de richesse X, par exemple un intervalle. La quantité de richesse dans cette région, $q_X(t)$ vaut

$$q_X(t) = \int_X c(x,t)$$

et sa dérivée dans le temps :

$$\frac{dq_X}{dt}(t) = \int_X \frac{\partial c}{\partial t}(x,t)$$

Mais cette dérivée est aussi égale à l'opposé du flux instantané Φ_S d'individus franchissant la frontière S de la région.

Je suppose ici que le flux local d'individus $\phi(x,t)$ est proportionnel à la densité $c(x,t)$ avec un coefficient de proportionnalité $a(x)$, constant dans le temps, que j'ai envie d'appeler *coefficient d'avidité*, car il caractérise la propension qu'ont les individus de cette classe de richesse x à vouloir l'augmenter (s'il est positif, la diminuer sinon !)

Donc,

$$\frac{dq_X}{dt}(t) = -\Phi_S = -\int_S \phi(x,t) = -\int_S a(x)c(x,t)$$

Mais, d'après la formule d'Ostrogradski, le flux d'un vecteur à travers une surface est égal à l'intégrale de sa divergence dans le volume. Comme nous sommes ici à une dimension cela se réduit à la simple dérivée. D'où

$$\int_X \frac{\partial c}{\partial t}(x,t) = -\int_X \frac{\partial ac}{\partial x}(x,t)$$

et comme la région X a été choisie arbitrairement, on obtient **l'équation d'évolution de la densité de richesse**[1] :

$$\boxed{\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial ac}{\partial x}}$$

3 Première loi de l'inégalité

Si on considère un vieux système, on peut considérer qu'il est proche de l'équilibre et que sa densité de richesse ne varie plus trop. On aura alors :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial ac}{\partial x} = 0$$

Soit encore, en appelant c_∞ la densité atteinte,

$$a(x)c_\infty(x) = cste$$

On obtient alors la **première loi de l'inégalité :**

La densité de richesse est inversement proportionnelle à l'avidité de richesse.

Ainsi, les individus seraient d'autant plus avides qu'ils sont peu nombreux dans une classe de richesse ; par exemple les gens très riches sont peu nombreux et d'autant plus avides d'accroître leur richesse. Cela explique selon moi déjà pas mal de choses.

[1] Le lecteur averti aura reconnu ici la classique équation de transport.

4 Deuxième loi de l'inégalité

Cette **deuxième loi** est un corollaire de la première :

L'inégalité de richesse est d'autant plus faible que l'avidité croît vite en fonction de la richesse.

Cette loi éminemment paradoxale peut être illustrée par des exemples :

Croissance linéaire Si $a(x) \approx x$ à l'infini, $c_\infty(x) \approx 1/x$; la densité n'a aucun moment.

Croissance polynômiale Si $a(x) \approx x^n$ à l'infini, $c_\infty(x) \approx 1/x^n$; la densité a des moments jusqu'à l'ordre $n-2$.

Croissance exponentielle Si $a(x) \approx e^{\lambda x}$ à l'infini, $c_\infty(x) \approx e^{-\lambda x}$; la densité a des moments à tous les ordres. L'inégalité (dispersion des richesses) est donc moindre que dans les cas précédents, car l'avidité des riches croît beaucoup plus rapidement.

5 Troisième loi de l'inégalité

Tout se qui précède est conditionné au fait que l'état d'équilibre considéré est stable. En développant l'équation d'évolution, on obtient :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{da}{dx}c - a\frac{\partial c}{\partial x}$$

Une *condition suffisante de stabilité* est alors :

$$\frac{da}{dx} > 0$$

garantissant une valeur propre à partie réelle négative.

D'où la **troisième loi de l'inégalité**, qui conditionne les deux précédentes :

Une condition suffisante d'équilibre de la répartition des richesses est que l'avidité croisse en fonction de la richesse.

6 Comparaison avec des données réelles[2]

Une idée pour tester ce modèle serait de le comparer à des données réelles. Evidemment, c'est là un travail de profesionnel. Cependant, la presse fait souvent état de fragments de données chiffrées du type : les 10% les plus riches de la population possèdent 50% des richesse d'un pays. On peut donc essayer de voir ce que donne ce modèle pour ces mêmes chiffres.

[2] Section ajoutée le 13 décembre 2006.

6.1 Cadre général

La proportion des p plus riches correspond à un seuil de richesse x_p tel que :

$$p = \int_{x_p}^{\infty} c_\infty$$

La fraction de richesse possèdée par cette population est :

$$r_p = \frac{\int_{x_p}^{\infty} x c_\infty}{\int_0^{\infty} x c_\infty}$$

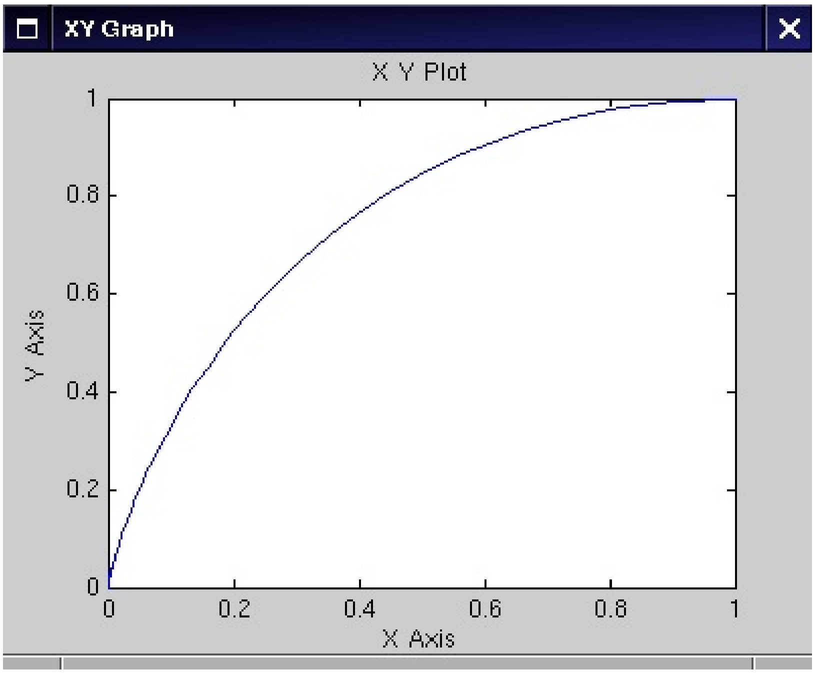
6.2 Cas exponentiel

$$\begin{aligned}
c_\infty(x) &= e^{-x} \\
p &= \int_{x_p}^{\infty} e^{-x} \\
p &= e^{-x_p} \\
r_p &= \frac{\int_{x_p}^{\infty} x e^{-x}}{\int_0^{\infty} x e^{-x}} \\
r_p &= \int_{x_p}^{\infty} x e^{-x} \\
r_p &= [-x e^{-x}]_{x_p}^{\infty} - \int_{x_p}^{\infty} -e^{-x} \\
r_p &= (x_p + 1) e^{-xp}
\end{aligned}$$

On peut résoudre en prenant :

$$\begin{aligned}
x_p &= -ln(p) \\
r_p &= (1 - ln(p))p
\end{aligned}$$

La figure suivante donne l'évolution de r_p en fonction de p.



On voit cependant que l'on est loin du compte. La loi exponentielle ne procure que très peu d'inégalité. Ainsi les 5% les plus riches ne possèdent que 20% de la richesse globale et les 10% les plus riches seulement 33% de la richesse. C'est petit.

6.3 La puissance et la gloire

Essayons maintenant une loi puissance. Il faut prendre au moins un degré 3 pour que la richesse globale ne soit pas infinie.

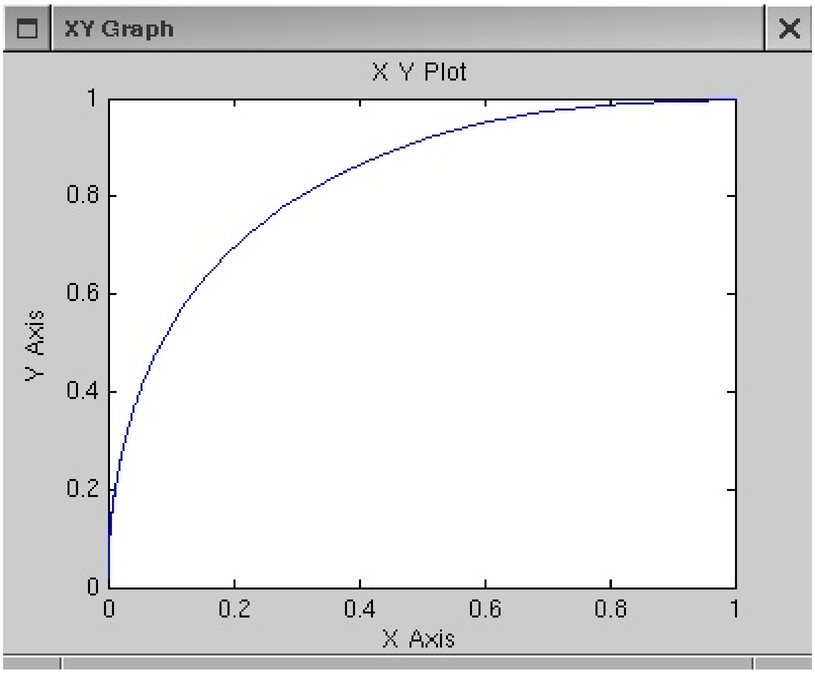
$$
\begin{aligned}
c_\infty(x) &= \frac{2}{(1+x)^3} \\
p &= \int_{x_p}^{\infty} \frac{2}{(1+x)^3} \\
p &= \frac{1}{(1+x_p)^2} \\
r_p &= \frac{\int_{x_p}^{\infty} x \frac{2}{(1+x)^3}}{\int_0^{\infty} x \frac{2}{(1+x)^3}} \\
\int_{x_p}^{\infty} x \frac{2}{(1+x)^3} &= [-x \frac{1}{(1+x)^2}]_{x_p}^{\infty} - \int_{x_p}^{\infty} - \frac{1}{(1+x)^2} \\
\int_{x_p}^{\infty} x \frac{2}{(1+x)^3} &= \frac{x_p}{(1+x_p)^2} + \frac{1}{1+x_p} \\
\int_0^{\infty} x \frac{2}{(1+x)^3} &= 1
\end{aligned}
$$

$$r_p = \frac{2x_p+1}{(1+x_p)^2}$$

Là aussi on peut résoudre.

$$\begin{aligned} x_p &= \sqrt{\frac{1}{p}}-1 \\ r_p &= \frac{2x_p+1}{(1+x_p)^2} \\ r_p &= (2\sqrt{\frac{1}{p}}-1)p \\ r_p &= 2\sqrt{p}-p \end{aligned}$$

La figure suivante donne l'évolution :



C'est beaucoup plus concluant. On voit qu'avec cette loi, les 10% les plus riches possèdent à peu près 50% des richesse (53 plus exactement). On voit aussi que les 50% les plus riches possèdent 90% de la richesse globale. Ca c'est sérieux.

Nous avons donc établi la *quatrième loi de l'inégalité :*

L'avidité de richesse croît comme le cube de la richesse possédée.

7 Conclusion

Au terme de cet essai, je ne sais plus trop quoi penser de ce que je trouve au bout de mes équations pourtant si simples, au point que j'en sois à me demander si je ne préférerais pas qu'elles fussent fausses, tant elles heurtent mes convictions. Dois-je même les divulguer ?

A Essai de résolution

A.1 Equation homogène

Partant de l'équation

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{da}{dx}c - a\frac{\partial c}{\partial x}$$

on obtient, en passant en transformée de Laplace,

$$sc = -\frac{da}{dx}c - a\frac{\partial c}{\partial x}$$

ou encore,

$$a\frac{\partial c}{\partial x} = -(s + \frac{da}{dx})c$$

En divisant,

$$\frac{\frac{\partial c}{\partial x}}{c} = -\frac{(s + \frac{da}{dx})}{a}$$

L'intégration donne

$$\ln(\frac{c}{c_0}) = -\ln(\frac{a}{a_0}) - s\int_0^x \frac{1}{a}$$

D'où la solution en transformée de Laplace

$$\boxed{c(x,s) = \frac{c(0,s)a(0)}{a(x)} e^{-s\int_0^x \frac{1}{a}}}$$

A.2 Réponse impulsionnelle

On prend $c(0,s) = 1$. D'où

$$c(x,s) = \frac{a(0)}{a(x)} e^{-s\int_0^x \frac{1}{a}}$$

et

$$c(x,t) = \frac{a(0)}{a(x)} \delta(t - \int_0^x \frac{1}{a})$$

Prenons par exemple, pour vérifier, $a(x) = 1$. Il vient (voir figure 1)[3] :

$$c(x,t) = \delta(t - x)$$

C'est bien une impulsion de Dirac qui se déplace dans l'espace à la vitesse unité.

[3] Les figures sont produites avec Scilab

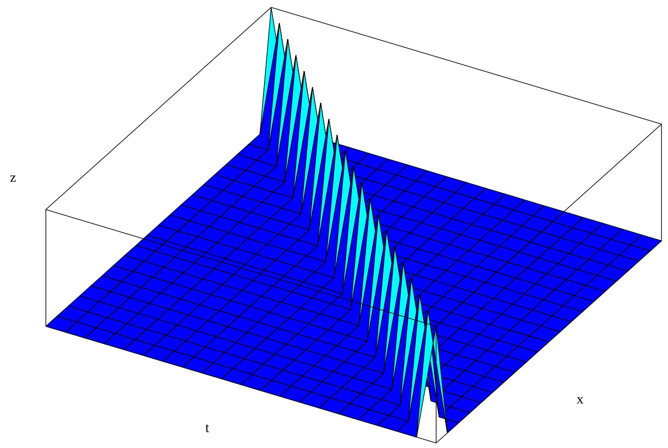


FIG. 1 – Transport à vitesse constante

A.3 Réponse à un échelon

On prend $c(0,s) = s^{-1}$ (la population est alimentée par un flux constant d'individus naissant avec une richesse nulle). D'où :

$$c(x,s) = \frac{a(0)}{a(x)} \frac{e^{-s\int_0^x \frac{1}{a}}}{s}$$

et

$$c(x,t) = \frac{a(0)}{a(x)} U(t - \int_0^x \frac{1}{a})$$

Prenons maintenant $a(x) = e^x$.

$$c(x,t) = e^{-x} U(t - (1 - e^{-x}))$$

(cf. figure 2).

A.4 Réponse avec condition initiale

Soit une condition initiale $c(x,0)$. Par linéarité, il vient :

$$c(x,t) = \int_0^\infty \frac{c(y,0)a(y)}{a(x)} \delta(t - \int_y^x \frac{1}{a})$$

Prenons $c(x,0) = U(x) - U(x-1)$ et $a(x) = e^x$:

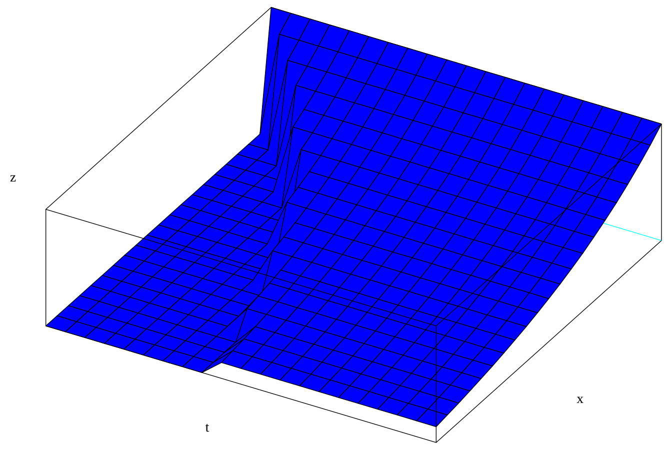


FIG. 2 – Réponse à un échelon avec avidité exponentielle

$$c(x,t) = \int_0^1 e^{y-x}\delta(t-(e^{-y}-e^{-x}))$$

Soit encore :

$$c(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{te^x+1} & \text{si} \quad e^{-1} \leq t + e^{-x} \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(cf. figure 3).

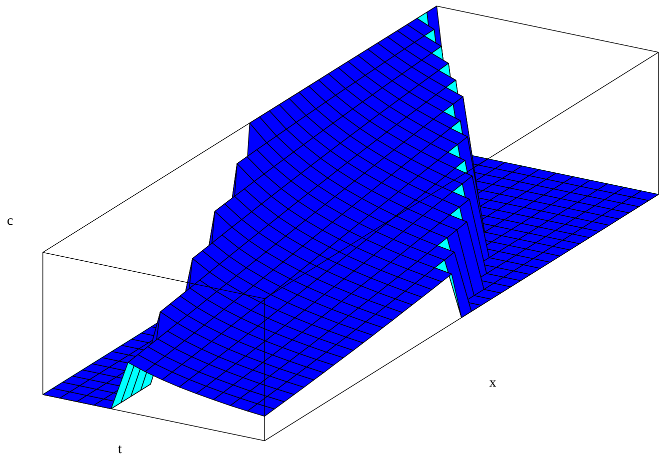


FIG. 3 – Réponse à une condition initiale