Le théorème de Napoléon et le point de Fermat

A. 1. D'après un résultat du cours, le triangle BAC' est un triangle équilatéral direct si et seulement si $c'+jb+j^2a=0$. Si K est l'isobarycentre de BAC' alors :

$$k=\frac{1}{3}(c'+b+a)=\frac{1}{3}((1-j)b+(1-j^2)a).$$

On montre de même que $l=\frac{1}{3}((1-j)c+(1-j^2)b)$ et que $m=\frac{1}{3}((1-j)a+(1-j^2)c))$.

2. On a :

$$\begin{aligned}3(k+jl+j^2m)&=a(1-j^2+j^2(1-j^2))+b((1-j)+j(1-j^2))+c(j(1-j)+j^2(1-j^2))\\&=a(1-j^2+j^2-j^4)+b(1-j+j-j^3)+c(j-j^2+j^2-j^4)\\&=0\end{aligned}$$

Car $j^3=1$.

Donc KLM est bien un triangle équilatéral direct.

B. 1. Ω, B, A et C' sont cocycliques, donc $(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B})=(\overrightarrow{C'B},\overrightarrow{C'A})=-\frac{\pi}{3}[\pi]$. De même Ω, C, A et B' sont cocycliques, d'où $(\overrightarrow{\Omega C},\overrightarrow{\Omega A})=(\overrightarrow{B'C},\overrightarrow{B'A})=-\frac{\pi}{3}[\pi]$.

Il s'ensuit que $(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B})=(\overrightarrow{\Omega C},\overrightarrow{\Omega A})=-\frac{\pi}{3}[\pi]$.

2. On a $(\overrightarrow{\Omega B'},\overrightarrow{\Omega A})=(\overrightarrow{CB'},\overrightarrow{CA})=-\frac{\pi}{3}[\pi]$, d'où :

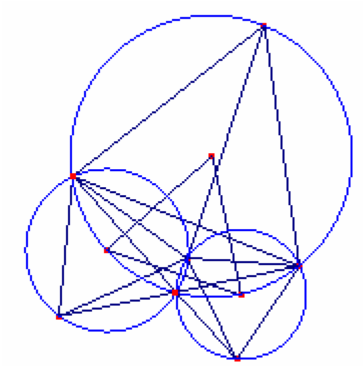
$(\overrightarrow{\Omega B'},\overrightarrow{\Omega B})=(\overrightarrow{\Omega B'},\overrightarrow{\Omega A})+(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B})=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=0[\pi]$. Donc Ω appartient à la droite (BB').

On montre de la même façon que Ω appartient aussi à la droite (CC').

3. On a :

$(\overrightarrow{\Omega C},\overrightarrow{\Omega B})=(\overrightarrow{\Omega C},\overrightarrow{\Omega A})+(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B})=-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}[\pi]$. Donc les points Ω, B, C et A', qui ne sont pas alignés, sont cocycliques. Ainsi Ω appartient au cercle circonscrit à BCA', et aussi à la droite (AA').

C. 1.



2. Le repère est centré en Ω et de telle sorte que $a=|a|, b=j|b|$ et $c=j^2|c|$.

Pour tout complexe z, on a :

$S(z)=(z-a)+j^2(z-b)+j(z-c)=(1+j+j^2)z-a+j^2(-j|b|)+j(-j^2|c|)$.

Or $1+j+j^2=0$ et $j^3=1$, d'où, pour tout complexe z, $S(z)=-|a|-|b|-|c|$.

3. Pour tout complexe z, on a :

$|S(z)|=|a|+|b|+|c|=|(z-a)+j^2(z-b)+j(z-c)|\le|z-a|+|j^2(z-b)|+|j(z-c)|=|z-a|+|z-b|+|z-c|$.

4. On a $\Omega A+\Omega B+\Omega C=|a|+|b|+|c|$ et, si N est le point d'affixe z, $NA+NB+NC=|z-a|+|z-b|+|z-c|$, donc, d'après la question 3, Ω réalise le minimum de la fonction $N\mapsto NA+NB+NC$.