Exercice 1 : Inégalité des accroissements finis

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. Soit a et b deux éléments de I tels que $a \le b$. On suppose que, pour tout x de I, on a : $m \le f'(x) \le M$.

   Posons, pour $x \in [a;b]$, h(x) = f(x) – f(a) –M(x – a).

   On a, pour tout $x \in [a;b]$, $h'(x) = f'(x) - M \le 0$.

   Donc h est décroissante sur $[a;b]$; or h(a) = 0, donc, pour tout $x \in [a;b]$, $h(x) \le 0$.

   En particulier $h(b) \le 0$, c'est-à-dire $f(b) - f(a) \le M(b-a)$.

   En posant k(x) = f(x) – f(a) – m(b – a), on montre de même que $m(b-a) \le f(b) - f(a)$.

   Conclusion : $m(b-a) \le f(b) - f(a) \le M(b-a)$.

   Interprétation géométrique : si $a < b$, $m \le \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \le M$, ainsi le taux d'accroissement de f entre a et b appartient à l'intervalle $[m;M]$.

2. On suppose que, pour tout x de I, on a : $|f'(x)| \le M$.

   On peut toujours supposer, quitte à inverser les rôles, que $x \ge x'$.

   Pour tout x∈ I, $-M \le f'(x) \le M$.

   En appliquant le résultat de la question 1, on obtient : $-M(x-x') \le f(x) - f(x') \le M(x-x')$.

   Soit $|f(x) - f(x')| \le M(x-x')$.

   Conclusion : pour x et x' appartenant à I, on a : $|f(x) - f(x')| \le M|x - x'|$.

3. Applications :

   a) Pour tout x, $|\sin'(x)| = |\cos(x)| \le 1$. Donc, par application du résultat précédent, on a, pour tous réels a et b, $|\sin a - \sin b| \le |a - b|$.

   b) Soit $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. On a : $f'(x) = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$.

   Si $x \in [40000;40401]$, alors : $-\dfrac{1}{2\times 40000\times\sqrt{40000}} \le f'(x) \le -\dfrac{1}{2\times 40401\times\sqrt{40401}}$, soit :

   $-\dfrac{1}{16000000} \le f'(x) \le -\dfrac{1}{16241202}$. On en déduit par l'inégalité des accroissements finis que :

   $-\dfrac{2}{16000000} \le \dfrac{1}{\sqrt{40002}} - \dfrac{1}{200} \le -\dfrac{2}{16241202}$, ce qui donne :

   $\dfrac{1}{200} - \dfrac{1}{8000000} \le \dfrac{1}{\sqrt{40002}} \le \dfrac{1}{200} - \dfrac{1}{8120601}$, de là :

   $0,004999875 \le \dfrac{1}{\sqrt{40002}} \le 0,004999877$.

Exercice 2 : point d'inflexion

Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Soit f une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle I. On note C la courbe représentative de f.

1. On suppose que, pour tout x de I, $f''(x) \ge 0$. Soit $a \in I$.

   Soit D la tangente au point d'abscisse a, une équation de D est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

   Soit $h(x) = f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)$. Pour tout $x \in I$, h'(x) = f '(x) – f '(a), h''(x) = f ''(x).

Or, pour tout $x \in I$, $f''(x) \geq 0$, donc h' est une fonction croissante sur I. Or h'(a) = 0, donc $h'(x) \leq 0$ sur $]-\infty; a] \cap I$, et $h'(x) \geq 0$ sur $[a; +\infty[\cap I$.

Ainsi h est décroissante sur $]-\infty; a] \cap I$, et croissante sur $[a; +\infty[\cap I$; or h(a) = 0, donc, pour tout $x \in I$, $h(x) \geq 0$.

On en déduit que, sur I, C est au-dessus de D.

Ce résultat est valable pour tout $a \in I$; donc, sur I, C est au-dessus de toutes ses tangentes. Une telle courbe est dite convexe.

2. Si, pour tout x de I, $f''(x) \leq 0$, on applique le résultat précédent à $-f$. On en déduit que, sur I, la courbe est au-dessous de toutes ses tangentes. La courbe est alors dite concave.
3. Si f '' s'annule et change de signe en a, la courbe traverse la tangente au point d'abscisse a, un tel point est un point d'inflexion.

Soit $f(x) = (x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 12)/12$, $f'(x) = \frac{x}{6}(2x^2 - 9x + 12)$, $f''(x) = (x-1)(x-2)$.

Les points d'abscisses 1 et 2 sont des points d'inflexion. La tangente au point d'abscisse 1 (resp. 2) a pour équation $y = \frac{5}{6}x - \frac{5}{4}$ (resp. $y = \frac{2}{3}x - 1$).