Exercice 1.

1. Soit p un nombre premier impair, donc $p > 2$

   a) p est un nombre premier différent de 2, donc PGCD(p,2) = 1. Par le petit théorème de Fermat, on peut en déduire que : $2^{p-1} \equiv 1[p]$.

   b) Soit k un entier naturel non nul tel que $2^k \equiv 1[p]$ et soit n un entier naturel tel que k divise n. Il existe donc un entier naturel m tel que $n = km$. On a alors :

   $2^k \equiv 1[p]$

   $\Rightarrow 2^{km} \equiv 1^m [p]$

   $\Rightarrow 2^n \equiv 1[p]$

   c) Soit b le plus petit entier naturel non nul tel que $2^b \equiv 1[p]$.

   Par la division euclidienne de n par b, il existe q et r entiers naturels tels que : $n = bq + r$, avec $0 \leq r < b$. On a alors : $2^n = 2^{bq} \times 2^r$, or $2^b \equiv 1[p]$, donc $2^{bq} \equiv 1[p]$; de là $2^n \equiv 2^r [p]$.

   Si $2^n \equiv 1[p]$, alors $2^r \equiv 1[p]$; si $0 < r < b$, r est un entier naturel non nul strictement plus petit que b qui vérifie $2^r \equiv 1[p]$. Ce qui est contradictoire, donc r = 0, d'où b divise n.

2. Soit q un nombre premier impair et le nombre $A = 2^q - 1$. On prend pour p un facteur premier de A.

   a) p divise A, donc $A \equiv 0[p]$, soit $2^q \equiv 1[p]$.

   b) A est un nombre impair, donc p est impair.

   c) Soit b le plus petit entier naturel non nul tel que $2^b \equiv 1[p]$. On a : $2^q \equiv 1[p]$, donc, d'après 1c), b divise q. Or q est un nombre premier, donc b = 1 ou b = q. Le cas b = 1 est impossible car 2 n'est pas congru à 1 modulo p, donc b = q.

   d) D'après 1a), on sait que $2^{p-1} \equiv 1[p]$, donc, toujours d'après 1c), q divise p – 1.

   p – 1 est pair , donc 2 divise p – 1 . Or q est impair, donc PGCD(2, q) = 1, par un théorème du cours, on en déduit que 2q divise p – 1, soit $p \equiv 1[2q]$.

3. Soit $A_1 = 2^{17} - 1$. Supposons A_1 non premier, alors il existe deux entiers naturels p et m, où p est premier et $p \leq \sqrt{A_1}$, tels que $A_1 = pm$.

   Ainsi $p \leq 362$ et , d'après 2d), p est de la forme 34n+1.

   Aucun des nombres 103, 137, 239 et 307 ne divise A_1.

   On en déduit que A_1 est premier.

Exercice 2.

Soit k un entier ≥ 1, on note $N(k) = 111...1$ avec k chiffres 1.

1. N(k) est un nombre impair et $N(k) \equiv 1[5]$, donc N(k) ne peut pas être un multiple de 2, ni de 5.
2. N(k) est un multiple de 3 si et ssi la somme des chiffres de N(k), soit k, est un multiple de 3.
3. N(k) divisible par 9 si et ssi la somme des chiffres de N(k) est un multiple de 9. Donc le plus petit multiple de 9 est N(9).
4. $N(k) = 1 + 10 + 10^2 + ... + 10^{k-1}$, en utilisant la somme des termes consécutifs d'une progression géométrique, on a :

   $N(k) = \frac{1-10^k}{1-10} = \frac{1}{9}(10^k - 1)$.
5. a) On a : $10^1 \equiv 3[7]$, $10^2 \equiv 2[7]$, $10^3 \equiv 6[7]$, $10^4 \equiv 4[7]$, $10^5 \equiv 5[7]$ et $10^6 \equiv 1[7]$.

   En particulier, pour tout p entier naturel, $10^{6p} \equiv 1[7]$.

   b) Soit k entier ≥ 1, faisons la division euclidienne de k par 6 : $k = 6p + r$, $0 \leq r < 6$. Alors $10^k = 10^{6p+r} \equiv 10^r [7]$ car $10^{6p} \equiv 1[7]$.

   Ainsi $10^k \equiv 1[7]$ si et ssi r = 0, donc si et ssi k est un multiple de 6.

   c) PGCD(7, 9) = 1, donc, par le théorème de Gauss, on a :

   $7 / N(k)$
   $\Leftrightarrow 7 / 9N(k)$
   $\Leftrightarrow 7 / (10^k - 1)$
   $\Leftrightarrow 6 / k$ d'après b
6. Soit p premier > 5, alors PGCD(10, p) = 1.

   On peut en déduire, par le petit théorème de Fermat, que $10^{p-1} \equiv 1[p]$.

   Ainsi $p / (10^{p-1} - 1)$, soit $p / 9N(p-1)$. Or PGCD(p, 9) = 1, donc, par le théorème de Gauss, $p / N(p-1)$.