Exercice 1

1. Établir que, quel que soit $(a, b, q) \in \mathbb{Z}^3$,

$$a \wedge b = b \wedge (a - bq).$$

   La notation $\wedge$ désigne le PGCD des entiers relatifs a et b.

2. Montrer que, quel que soit $n \in \mathbb{Z}$,

$$(5n^3 - n) \wedge (n+2) = (n+2) \wedge 38.$$

3. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que $(n+2)$ divise $(5n^3 - n)$.
4. Quelles sont les valeurs possibles du PGCD de $(5n^3 - n)$ et $(n+2)$?
   Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que :

$$(5n^3 - n) \wedge (n+2) = 19.$$

Exercice 2

k étant un entier relatif, on pose :

$$x = 2k - 1 \qquad \text{et} \qquad y = 9k + 4.$$

Montrer que tout diviseur commun à x et à y divise 17. En déduire, suivant les valeurs de k, le plus grand diviseur commun de x et y.

Exercice 3

Étant donné un entier relatif n, on considère les entiers relatifs :

$$A = 3n + 4 \qquad ; \qquad B = 9n - 5.$$

1. Déterminer, suivant les valeurs de n, le plus grand commun diviseur de A et B.
2. Déterminer les valeurs de n pour que le plus grand commun diviseur de A et B soit égal à 17 et le plus petit commun multiple de A et B soit égal à 884.

Exercice 4

On considère l'équation (1) :

$$324x - 245y = 7 \qquad (x\,;\,y) \in \mathbb{Z}^2.$$

1. Montrer que pour toute solution $(x\,;\,y)$, x est multiple de 7.
2. Déterminer une solution $(x_0\,;\,y_0)$ et en déduire toutes les solutions.
3. Soit δ le PGCD des éléments d'un couple $(x\,;\,y)$ solution de (1) ; quelles sont les valeurs possibles de δ ?
   Déterminer les solutions de (1) telles que x et y soient premiers entre eux.