Exercice 1.

1. a, b et q appartiennent à $\mathbb{Z}$, alors PGCD(a, b) = PGCD(b, a – bq).
Montrons que D(a, b) = D(b, a – bq).
Soit $d \in \mathbb{Z}$. Si d/a et d/b, alors d/(a-bq) ; et réciproquement si d/b et d/(a-bq), alors d/(bq+a-bq), soit d/a.

2. $n \in \mathbb{Z},\ 5n^3 - n = (n+2)(5n^2 - 10n + 19) - 38$.
D'après1., $\text{PGCD}(5n^3 - n, n+2) = \text{PGCD}(n+2, -38) = \text{PGCD}(n+2, 38)$.

3. (n+2)/ $(5n^3 - n)$
$\Leftrightarrow \text{PGCD}(5n^3 - n, n+2) = n+2$
$\Leftrightarrow \text{PGCD}(n+2, 38) = n+2$
$\Leftrightarrow (n+2)/38$
$\Leftrightarrow n+2 = \pm 1, \pm 2, \pm 19, \pm 38$
$\Leftrightarrow n \in \{-40, -21, -4, -3, -1, 0, 17, 36\}$

4. $\text{PGCD}(5n^3 - n, n+2) = \text{PGCD}(n+2, 38)$, les valeurs possibles font partie des diviseurs strictement positifs de 38, soit 1, 2, 19 et 38.
Ce PGCD vaut 19 si 19 divise n+2 et si 38 ne divise pas n+2, soit $n+2 = 19(2p+1)$, où $p \in \mathbb{Z}$,
Ce qui équivaut à $n \equiv 17[38]$.

Exercice 2.

$k \in \mathbb{Z}$. On : 9k + 4 = 4(2k - 1) + k + 8 et 2k – 1 = 2(k + 8) – 17, donc, d'après l'exercice 1,
PGCD(x, y) = PGCD(k + 8, 17).
Les valeurs possibles de ce PGCD sont donc 1 et 17.
Il est égal à 17 si et ssi 17 divise k + 8, soit $k \equiv 9[17]$, sinon il vaut 1.

Exercice 3.

1. $n \in \mathbb{Z}$. On a : 9n – 5 = 3(3n+4) – 17, donc, d'après l'exercice1, PGCD(A, B) = PGCD(3n+4, 17).
Les valeurs possibles de ce PGCD sont donc 1 et 17.
Ce PGCD vaut 17 si et ssi 17 divise 3n + 4.
Cherchons les valeurs de n pour lesquelles il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que 3n + 4 = 17k.
Résolvons l'équation : 17k – 3n = 4 (1). $17 \times (-1) - 3(-6) = 1$, donc (-4, -24) est une solution particulière de (1).
On a :
$17k - 3n = 4$
$\Leftrightarrow 17k - 3n = 17 \times (-4) - 3 \times (-24)$
$\Leftrightarrow 17(k+4) = 3(n+24) \qquad (2)$
3 divise 17(k + 4) et PGCD(17, 3) = 1, donc, d'après le théorème de Gauss, 3 divise k + 4 ; il existe donc $p \in \mathbb{Z}$ tel que k + 4 = 3p. Il vient alors, en remplaçant dans (2), $17 \times 3p = 3(n+24)$, soit n + 24 = 17p.
Les solutions sont donc :
$$\begin{cases} k = -4 + 3p \\ n = -24 + 17p, p \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Conclusion : si $n \equiv 10[17]$, alors PGCD(A, B) = 17, sinon il vaut 1.

2. PGCD(A, B) = 17, donc il existe $h \in \mathbb{Z}$ tel que n = 10 + 17h.
On a alors : A = 17(2 + 3h) , B = 17(5 + 9 h) et PPCM(A, B) = $17 \times |(2+3h)(5+9h)|$.

On cherche h tel que $|27h^2 + 33h + 10| = 52$. On a :

$$|27h^2 + 33h + 10| = 52$$

$$\Leftrightarrow 27h^2 + 33h - 42 = 0 \text{ ou } 27h^2 + 33h + 62 = 0 \text{ (ici } \Delta<0)$$

$$\Leftrightarrow h = -2 \text{ ou } h = 7/9$$

Seul h = -2 convient, ce qui donne A = - 68 et B = - 221.

Exercice 4.

On considère sur $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $324x - 245y = 7$ (1).

1. On a : $245 = 5.7^2$, $324 = 2^2.3^4$, donc 7 divise 245 et PGCD(7, 324) = 1.
Soit (x, y) une solution de (1), alors 324x = 7 + 245y, donc 7 divise 324x ; or PGCD(7, 324) = 1, donc, par le théorème de Gauss, 7 divise x.

2. PGCD(324, 245) = 1, en utilisant l'algorithme, on trouve $324 \times (-31) - 245(-41) = 1$.
(-217, -287) est une solution particulière de (1).
On a :

$$324x - 245y = 7$$

$$\Leftrightarrow 324x - 245y = 324 \times (-217) - 245 \times (-287)$$

$$\Leftrightarrow 324(x+217) = 245(y+287) \qquad (2)$$

245 divise 324(x + 217) et PGCD(324, 245) = 1, donc, d'après le théorème de Gauss, 245 divise x + 217 ; il existe donc $p \in \mathbb{Z}$ tel que x + 217 = 245p. Il vient alors, en remplaçant dans (2),
$324 \times 245p = 245(y+287)$, soit y + 287 = 324p.
Les solutions sont donc :

$$\begin{cases} x = -217 + 245p \\ y = -287 + 324p, p \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

3. Soit (x, y) une solution de (1) et PGCD(x, y) = d, d divise x et d divise y, donc d divise 324x – 245y, soit d divise 7. Les valeurs possibles de d sont 1 et 7.
Cherchons les solutions de (1) pour lesquelles d vaut 7.
7 divise x, donc d vaut 7 si et ssi 7 divise y. Or 7 divise 287, donc 7 divise y si et ssi 7 divise 324p.
PGCD(7, 324) = 1, donc, par le théorème de Gauss, 7 divise 324p si et ssi 7 divise p.

Conclusion : PGCD(x, y) = 7 si et ssi p est un multiple de 7, sinon PGCD(x, y) = 1.