

Exercice 1

Résoudre dans \mathbb{Z} l'équation $x^2 - 3x + 4 \equiv 0[7]$.

Exercice 2

1. Résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation $23x - 17y = 6$.
2. Dédire de l'étude précédente les entiers naturels A inférieurs à 1000 tels que dans la division euclidienne de A par 23, le reste soit 2, et dans celle de A par 17, le reste soit 8.

Exercice 3

Soit a et b deux entiers premiers entre eux.

1. Montrer que $a + b$ et ab sont premiers entre eux. En déduire que les nombres $a + b$ et $a^2 - ab + b^2$ sont premiers entre eux ou divisibles par 3
2. Démontrer l'égalité : $\text{PGCD}(a + b, a^2 - ab + b^2) = \text{PGCD}(a + b, 3)$.

Exercice 4

1. Soit a et b deux entiers naturels tels que $\text{PGCD}(a + b, ab) = p^2$ où p est premier.
 - a) Montrer que p^2 divise a^2 . En déduire que p divise a . Montrer que p divise b .
 - b) Démontrer que $\text{PGCD}(a, b)$ est soit p , soit p^2 .
2. On cherche à déterminer les entiers naturels a et b tels que :
$$\text{PGCD}(a + b, ab) = 49 \text{ et } \text{PPCM}(a, b) = 231.$$
 - a) Soit a et b deux tels entiers. Montrer que $\text{PGCD}(a, b) = 7$.
 - b) Quelles sont les solutions du problème posé.