

Exercice 1. Résolvons dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 - 3x + 4 \equiv 0[7]$.

Si $x \equiv 0[7]$, alors $x^2 - 3x + 4 \equiv 4[7]$, si $x \equiv 1[7]$, alors $x^2 - 3x + 4 \equiv 2[7]$,

si $x \equiv 2[7]$, alors $x^2 - 3x + 4 \equiv 2[7]$, si $x \equiv 3[7]$, alors $x^2 - 3x + 4 \equiv 4[7]$,

si $x \equiv 4[7]$, alors $x^2 - 3x + 4 \equiv 1[7]$, si $x \equiv 5[7]$, alors $x^2 - 3x + 4 \equiv 0[7]$,

si $x \equiv 6[7]$, alors $x^2 - 3x + 4 \equiv 1[7]$.

Conclusion : $x^2 - 3x + 4 \equiv 0[7] \Leftrightarrow x \equiv 5[7]$

Exercice 2. 1. Résolvons dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $23x - 17y = 6$.

$\text{PGCD}(23, 17) = 1$, $23 \times 1 - 17 \times 1 = 6$. Pour tous x et y appartenant à $\mathbb{Z}$, on a :

$$23x - 17y = 6 \Leftrightarrow 23x - 17y = 23 \times 1 - 17 \times 1 \Leftrightarrow 23(x - 1) = 17(y - 1) \quad (1)$$

$17/23(x-1)$ et 17 et 23 sont premiers entre eux ; par le théorème de Gauss, $17/(x-1)$, il existe donc k appartenant à $\mathbb{Z}$ tel que $x - 1 = 17k$. D'où, en remplaçant dans (1), $y - 1 = 23k$.

Conclusion : $x = 1 + 17k$, $y = 1 + 23k$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. A entier naturel tel que $A \equiv 2[23]$ et $A \equiv 8[17]$, il existe donc k et k' entiers naturels tels que

$$A = 2 + 23k = 8 + 17k' \quad \text{Or } 2 + 23k = 8 + 17k' \Leftrightarrow 23k - 17k' = 6.$$

D'après 1, on en déduit que $k = 1 + 17p$, $p \in \mathbb{N}$, d'où $A = 2 + 23(1 + 17p) = 25 + 391p$.

Les entiers inférieurs à 1000 qui conviennent sont 25, 416 et 807.

Exercice 3. Soit a et b deux entiers premiers entre eux.

1. $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(a + b, b)$, d'où $\text{PGCD}(a + b, a) = \text{PGCD}(a + b, b) = 1$, on en déduit que $\text{PGCD}(a + b, ab) = 1$.

Soit $D = \text{PGCD}(a + b, a^2 - ab + b^2)$, on a : $a^2 - ab + b^2 = (a + b)^2 - 3ab$, donc D divise $3ab$.

3 est premier, donc 3 divise D ou $\text{PGCD}(3, D) = 1$.

Si 3 divise D , alors $a + b$ et $a^2 - ab + b^2$ sont divisibles par 3.

Si $\text{PGCD}(3, D) = 1$, d'après le théorème de Gauss, D divise ab ; or D divise $a + b$, donc $D = 1$.

2. On a : $a^2 + b^2 - ab = (a + b)(a + b) - 3ab$, donc

$$\text{PGCD}(a + b, a^2 - ab + b^2) = \text{PGCD}(a + b, 3ab)$$

$$= \text{PGCD}(a + b, 3) \quad \text{car } \text{PGCD}(a + b, ab) = 1$$

Exercice 4. Soit a et b deux entiers naturels tels que $\text{PGCD}(a + b, ab) = p^2$ où p est premier.

1. a) p^2 divise $(a + b)a$ et p^2 divise ab , donc p^2 divise $(a + b)a - ab = a^2$.

p^2 divise a^2 , donc p divise $a^2 = a \times a$. Or p est premier, donc p divise a .

On montre de même que p divise b .

b) Soit $D = \text{PGCD}(a, b)$, donc, d'après 1, p divise D .

D divise a et b , donc D divise $a + b$ et ab , d'où D divise $\text{PGCD}(a + b, ab) = p^2$.

p premier et D divise p^2 , donc $D = 1$ ou $D = p$ ou $D = p^2$; or p divise D , donc $D = p$ ou $D = p^2$.

2. a) Soit a et b deux entiers naturels tels que : $\text{PGCD}(a + b, ab) = 49$ et $\text{PPCM}(a, b) = 231$.

On en déduit, d'après 1, que $D = \text{PGCD}(a, b) = 7$ ou 49 . Or $231 = 3 \times 7 \times 11$ et D divise $\text{PPCM}(a, b)$, donc $D = 7$.

b) Soit a et b des entiers naturels tels que $\text{PGCD}(a, b) = 7$ et $\text{PPCM}(a, b) = 231$.

$D = \text{PGCD}(a, b)$, on a : $a = Da'$, $b = Db'$, avec $\text{pgcd}(a', b') = 1$.

$$\begin{cases} \text{PGCD}(a, b) = 7 \\ \text{PPCM}(a, b) = 231 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = 7 \\ Da'b' = 3 \times 7 \times 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = 7 \\ a'b' = 3 \times 11 \end{cases}$$

Les seules possibilités sont $a' = 1$, $b' = 33$ ou $a' = 3$, $b' = 11$ ou $a' = 11$, $b' = 3$ ou $a' = 33$, $b' = 1$.

Les couples (a, b) solutions sont $(7, 231)$, $(21, 77)$, $(77, 21)$ et $(231, 7)$.

Or $\text{PGCD}(7 + 231, 7 \times 231) = \text{PGCD}(238, 1617) = 7$ et $\text{PGCD}(21 + 77, 21 \times 77) = \text{PGCD}(98, 1617) = 49$.

Les couples (a, b) d'entiers naturels tels que $\text{PGCD}(a + b, ab) = 49$ et $\text{PPCM}(a, b) = 231$ sont $(21, 77)$ et $(77, 21)$.