

Exercice 1. Comparaison des moyennes harmonique, géométrique et arithmétique

1. Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \ln x - x + 1$. De l'étude de f , déduire que, pour tout $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$ (1), l'égalité n'ayant lieu que si $x = 1$.

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On donne n nombres réels strictement positifs, $a_1, a_2, \dots, a_n$ et on pose:

$$u = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n), \quad v = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}, \quad \frac{n}{w} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}.$$

Les nombres u , v et w sont respectivement les moyennes arithmétique, géométrique et harmonique des n nombres.

a) En appliquant l'inégalité (1) successivement pour $x = \frac{a_1}{u}, x = \frac{a_2}{u}, \dots, x = \frac{a_n}{u}$, et en combinant les n inégalités obtenues, montrer que $v \leq u$ (2). Dans quel cas a-t-on $v = u$?

b) En remplaçant dans (2) les n nombres $a_1, a_2, \dots, a_n$ par leurs inverses, prouver que $w \leq v$. Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

Exercice 2. Une suite classique

1. Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq x$ et $\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x)$.

2. En déduire que, pour $n \geq 1$, $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$.

3. Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.

Montrer, par récurrence, que $\frac{1}{n} + \ln n \leq u_n \leq 1 + \ln n$.

En déduire que $\lim u_n = +\infty$ et que $\lim \frac{u_n}{\ln n} = 1$.