**Exercice 1. Comparaison des moyennes harmonique, géométrique et arithmétique**

1. Pour $x > 0$, soit $f(x) = \ln x - x + 1$, $f'(x) = \dfrac{1-x}{x}$. Donc f est strictement croissante sur ]0, 1] et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. De plus f(1) = 0, donc, pour tout $x > 0$, $f(x) \le 0$, l'égalité à 0 n'ayant lieu que si x = 1.

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On donne n nombres réels strictement positifs, $a_1, a_2 ... a_n$ et on pose:

$$u = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + ... + a_n), \quad v = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}, \quad \frac{n}{w} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}.$$

Les nombres u, v et w sont respectivement les moyennes arithmétique, géométrique et harmonique des n nombres.

a) On a, d'après 1, $\ln \dfrac{a_i}{u} \le \dfrac{a_i}{u} - 1$ pour i = 1..n.

D'où $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \ln \frac{a_i}{u} \le \frac{1}{u} \sum_{i=1}^{n} a_i - n = 0$, car $u = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$. On a alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \ln \frac{a_i}{u} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \ln a_i - n \ln u \le 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(a_1 a_2 .. a_n) \le n \ln u$$

$$\Leftrightarrow n \ln v \le n \ln u$$

$$\Leftrightarrow v \le u$$

On u = v si et seulement si, pour tout i, $\dfrac{a_i}{u} = 1$, c'est-à-dire $a_1 = a_2 = .. = a_n$.

b) On pose $A_i = \dfrac{1}{a_i}$, i = 1..n, on a alors :

$$(A_1 A_2 .. A_n)^{1/n} \le \frac{1}{n}(A_1 + A_2 + .. + A_n)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a_1 a_2 .. a_n}\right)^{1/n} \le \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + .. + \frac{1}{a_n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{v} \le \frac{1}{w}$$

$$\Leftrightarrow w \le v$$

On a l'égalité si et seulement si $a_1 = a_2 = .. = a_n$.

**Exercice 2. Une suite classique**

1. Pour $x \geq 0$, soit $h(x) = \ln(1+x) - x$, $h'(x) = -\frac{x}{x+1} \leq 0$ et h(0) = 0. Donc, pour tout $x \geq 0$, $h(x) \leq 0$, soit $\ln(1+x) \leq x$.

De même, pour $x \geq 0$, soit $g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{x+1}$, $g'(x) = \frac{x}{(x+1)^2} \geq 0$ et g(0) = 0. Donc, pour tout $x \geq 0$, $g(x) \geq 0$, soit $\ln(1+x) \geq \frac{x}{x+1}$.

2. Soit n un entier $\geq 1$, en posant $x = \frac{1}{n}$, on obtient : $\frac{1/n}{1+1/n} \leq \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$, soit :

$\frac{1}{1+n} \leq \ln(1+n) - \ln n \leq \frac{1}{n}$

3. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$.

Montrons, par récurrence, que $\frac{1}{n} + \ln n \leq u_n \leq 1 + \ln n$.

La propriété est vraie pour n = 1.

Supposons que, pour $n \geq 1$ quelconque, $\frac{1}{n} + \ln n \leq u_n \leq 1 + \ln n$, alors

$\frac{1}{n} + \ln n + \frac{1}{n+1} \leq u_n + \frac{1}{n+1} \leq 1 + \ln n + \frac{1}{n+1}$ ; or $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}$ et $\frac{1}{n+1} + \ln n \leq \ln(n+1) \leq \ln n + \frac{1}{n}$,

donc $\frac{1}{n+1} + \ln(n+1) \leq u_{n+1} \leq 1 + \ln(n+1)$. D'où l'hérédité.

$\lim_{n\to+\infty} \ln n = +\infty$, d'où, par un théorème de comparaison, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

De plus, pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{n\ln n} + 1 \leq \frac{u_n}{\ln n} \leq 1 + \frac{1}{\ln n}$. Il s'ensuit, par le théorème d'encadrement, que

$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln n} = 1$.