Exercice 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ d'unité graphique 4 cm. On note A et B les points d'affixes respectives 1 et i. à tout point M, distinct de A et d'affixe z, est associé le point M' d'affixe Z définie par :

$$Z = \frac{(1-\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}{z-1}.$$

1. **a.** Calculer l'affixe du point C′ associé au point C d'affixe $-\mathrm{i}$.

   b. Placer les points A, B et C.

2. Soit $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y désignent deux nombres réels.

   a. Montrer l'égalité :

$$Z = \frac{(x-1)^2 + (y-1)^2 - 1}{(x-1)^2 + y^2} - \mathrm{i}\frac{x^2 + y^2 - 1}{(x-1)^2 + y^2}.$$

   b. Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z telle que Z soit réel.

   c. Déterminer l'ensemble F des points M d'affixe z telle que $\mathrm{Re}(Z)$ soit négatif ou nul.

3. **a.** écrire le nombre complexe (1 - i) sous forme trigonométrique.

   b. Soit M un point d'affixe z, distinct de A et de B. Montrer que : $\frac{(1-\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}{z-1} \in \mathbb{R}*$ si et seulement s'il existe un entier k tel que $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

   c. En déduire l'ensemble des points M vérifiant $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

   d. Déterminer l'ensemble des points M vérifiant $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$.

Exercice 2

Dans le plan complexe $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère le quadrilatère ABCD tel que :

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right) = \alpha \quad [2\pi], \left(\overrightarrow{\mathrm{CD}}, \overrightarrow{\mathrm{CB}}\right) = \beta \quad [2\pi], 0 < \alpha < \pi, 0 < \beta < \pi.$$

On construit les triangles équilatéraux DCP, DAQ, BAM et BCN tels que :

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{DC}}, \overrightarrow{\mathrm{DP}}\right) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi], \quad \left(\overrightarrow{\mathrm{DA}}, \overrightarrow{\mathrm{DQ}}\right) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{BA}}, \overrightarrow{\mathrm{BM}}\right) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{\mathrm{BC}}, \overrightarrow{\mathrm{BN}}\right) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$$

Soit a, b, c et d les affixes respectives des points A, B, C et D, m, n, p et q les affixes respectives des points M, N, P et Q.

1. Démontrer les relations suivantes :

$$m = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(a-b)+b, \qquad n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(c-b)+b,$$

$$p = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(c-d)+d, \qquad q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(a-d)+d.$$

2. En utilisant les relations précédentes :

a. Démontrer que MNPQ est un parallélogrammme.

b. Démontrer que l'on a :

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}, \overrightarrow{\mathrm{QP}}\right) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi], \quad \mathrm{AC} = \mathrm{QP}$$

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{NP}}, \overrightarrow{\mathrm{BD}}\right) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi], \quad \text{et} \quad \mathrm{NP} = \mathrm{BD}.$$

3. Démontrer que MNPQ est un carré si, et seulement si, les diagonales [AC] et [BD] du quadrilatère ABCD vérifient :

$$\mathrm{AC} = \mathrm{BD} \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}, \overrightarrow{\mathrm{BD}}\right) = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

où k est un entier relatif.