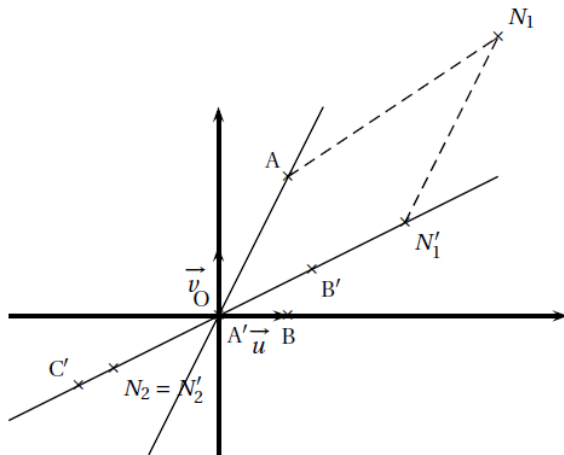


Exercice 1

1. Soit M d'affixe z , on note M' le point d'affixe $z' = f(z)$ où $f(z) = \frac{(3+4i)z + 5\bar{z}}{6}$.

$$z_A = 1+2i, z_{A'} = 0; z_B = 1, z_{B'} = \frac{4+2i}{3}; z_C = 3i, z_{C'} = -2-i$$



2. Pour tout $z = x + iy$, on a : $z' = x' + iy' = \frac{1}{6}((3+4i)(x+iy) + 5(x-iy)) = \frac{4x-2y}{3} + i\frac{2x-y}{3}$.

3. Pour tout $M(z)$, on a :

$$f(M) = M$$

$$\Leftrightarrow z' = z$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 4x - 2y \\ 3y = 2x - y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x - 2y = 0$$

L'ensemble des points invariants est la droite D d'équation $x - 2y = 0$.

Les points A' , B' et C' appartiennent à D .

4. D'après la question 2, $x' = 2y'$, donc $M'(x', y') \in D$.

5. a) Pour tout z , on a :

$$\begin{aligned} \frac{z' - z}{z_A} &= \frac{(3+4i)z + 5\bar{z} - 6z}{6(1+2i)} = \frac{((-3+4i)z + 5\bar{z})(1-2i)}{30} \\ &= \frac{(5+10i)z + 5(1-2i)\bar{z}}{30} = \frac{z + \bar{z}}{6} + i\frac{z - \bar{z}}{3} \end{aligned}$$

Si $z = x + iy$, $z + \bar{z} = 2x$ et $z - \bar{z} = 2iy$, donc $\frac{z' - z}{z_A} \in \mathbb{R}$.

b) Si $M \neq M'$, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{MM'}) = \arg\left(\frac{z' - z}{z_A}\right) [2\pi]$.

$$\frac{z' - z}{z_A} \in \mathbb{R}, \text{ donc } (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{MM'}) = 0[\pi].$$

Les droites (OA) et (MM') sont parallèles.

6. Si $N \in D$, $N' = N$.

Si $N \notin D$, N' est le point d'intersection de D avec la parallèle à (OA) passant par N .

Exercice 2

Soit A le point d'affixe 2 et B le point d'affixe $-1 + i$.

Soit M différent de A, d'affixe z , on note M' le point d'affixe $z' = f(z)$ où $f(z) = \frac{iz + 1 + i}{z - 2}$.

1. Pour tout $M \neq A$, on a :

$$M(z) \in E$$

$$\Leftrightarrow f(z) = 1$$

$$\Leftrightarrow z - 2 = iz + 1 + i$$

$$\Leftrightarrow z(1 - i) = 3 + i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{3 + i}{1 - i} = 1 + 2i$$

2. On pose $z = x + iy$ où x et y sont réels. Pour tout $z \neq 2$, on a :

$$f(z) = \frac{iz + 1 + i}{z - 2} = \frac{(1 - y + i(1 + x))(x - 2 - iy)}{(x - 2)^2 + y^2} = \frac{x + 3y - 2 + i(x^2 + y^2 - x - y - 2)}{(x - 2)^2 + y^2}.$$

3. Pour tout $M \neq A$, on a :

$$M(z) \in F$$

$$\Leftrightarrow f(z) \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - x - y - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$$

$F = C - \{A\}$ où $C = C\left(\Omega\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$. On remarquera que C est le cercle de diamètre $[AB]$.

4. Pour tout $M \neq A$, on a :

$$M(z) \in G$$

$$\Leftrightarrow f(z) \in i\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x + 3y - 2 = 0$$

G est la droite D d'équation $x + 3y - 2 = 0$ privée du point A. On remarquera que $D = (AB)$.